ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 1 (2023). С. 22-34.

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА–ЛЫКОВА

С.Х. ГЕККИЕВА, М.А. КЕРЕФОВ, Ф.М. НАХУШЕВА

Аннотация. При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами. Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, как по временной, так и по пространственной переменной, которые являются основой большинства математических моделей в механике жидкости, вязкоупругости, а также в процессах переноса в средах с фрактальной структурой и памятью.

В настоящей работе представлено качественно новое уравнение влагопереноса, являющееся обобщением уравнения Аллера–Лыкова. Данное обобщение дает возможность отражения в характере исходного уравнения специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности.

Работа посвящена исследованию локальных и нелокальных краевых задач для неоднородного уравнения влагопереноса типа Аллера–Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Римана–Лиувилля. Для обобщенного уравнения типа Аллера–Лыкова рассмотрены начально-краевые задачи с условиями первого и третьего рода, а также нелокальные задачи, содержащие в краевых условиях нелокальность по времени. Методом энергетических неравенств, при предположении существования регулярных решений, получены априорные оценки в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, из которых следует единственность решений рассматриваемых краевых задач, их устойчивость по правой части и начальным данным.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова, дробная производная Римана–Лиувилля, метод Фурье, априорная оценка.

Mathematics Subject Classification: 35E99

1. Введение

Вопросы тепло-, влагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов и т.д. [1, гл. 6]. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [2, гл. 5].

Примером такого рода моделей, описывающих процесс переноса почвенной влаги с учетом движения против потенциала влажности, а также фрактальной структуры почвы,

S.Kh. Gekkieva, M.A. Kerefov, F.M. Nakhusheva, Local and nonlocal boundary value problems for the generalized Aller–Lykov equation.

Поступила 2 декабря 2021 г.

может служить обобщенное уравнение переноса Аллера–Лыкова:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [2, с. 9], $0<\alpha<1$, A_1, $A = const > 0$, $k(x,t)$ — коэффициент диффузии, $f(x,t)$ — плотность источников влаги. Для функции $u(x,t)$, зависящей от двух переменных, оператор частного интегро-дифференцирования $D_{0t}^{\alpha} u(x,\tau)$ по переменной t определяется так же, как и для функции одной пременной, при этом вторая переменная x рассматривается как параметр. Так, для случая $0<\alpha<1$ имеем

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau.$$

Уравнения влагопереноса в локальной постановке (при $\alpha = 1$) рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [3], [4], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работы [5]–[7], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями.

В [8] доказаны существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения Аллера–Лыкова с постоянными коэффициентами. В работе [9] исследована вторая краевая задача.

В [10] для обобщенных уравнений Аллера и Аллера–Лыкова с краевыми условиями первого рода получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых. Получены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка.

Настоящая работа посвящена исследованию локальных и нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса типа Аллера–Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Римана–Лиувилля

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t). \tag{1.1}$$

Исследование уравнения (1.1) будем проводить методом априорных оценок.

2. Локальные краевые задачи для неоднородного уравнения Аллера-Лыкова с дробной по времени производной

В прямоугольнике $\Omega_T = \{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ рассмотрим уравнение (1.1).

Регулярным решением уравнения (1.1) в Ω_T назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t),\ D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_T\right)$; $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(\Omega_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) во всех точках $(x,t)\in\Omega_T$.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1.1) в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}_T = \{(x,t):\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = u_0(x), \qquad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = u_1(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2.2}$$

где $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные функции.

В дальнейшем будем предполагать существование регулярных решений рассматриваемых в работе задач. Далее M_i, $i = 1, 2, \ldots$ — положительные постоянные, зависящие исключительно только от входных данных рассматриваемой задачи.

Скалярное произведение и норма определяются следующим образом:

$$(a, b) = \int_0^l abdx, \qquad (a, a) = \|a\|_0^2,$$

где a, b — заданные на отрезке $[0, l]$ функции.

2.1. Априорная оценка решения первой краевой задачи.

Теорема 2.1. *Если $k_x(x,t)$, $\eta_x(x)$, $k_t(x,t)$, $q_t(x,t)$, $f(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_T\right)$; $u_1(x) \in C[0,l]$; $u_0(x) \in C^2[0,l]$; $0 < c_1 \le k(x,t)$; $\eta(x)$, $q(x,t) \le c_2$; k_t, $q_t \le 0$ всюду на $\overline{\Omega}_T$ и выполнено условие $u_0(0) = u_0(l) = 0$, тогда для решения задачи (1.1)–(2.2) справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^{\alpha} u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha} u\|_{2,\Omega_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha} u_x\|_{2,\Omega_t}^2 \le M \left(\|f\|_{2,\Omega_t}^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 \right), \tag{2.3}$$

где

$$\|D_{0t}^{\alpha} u\|_{2,\Omega_t}^2 = \int_0^t \|D_{0\tau}^{\alpha} u(x,\tau_1)\|_0^2 \, d\tau, \qquad \|u_0(x)\|_{W_2^2(0,l)}^2 = \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2 + \|u_0''(x)\|_0^2.$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $g(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = g(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \tag{2.4}$$

так, что $g(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x)$. С учетом [11, с. 15]

$$D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0, \qquad D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = 0, \qquad D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$$

функция $g(x,t)$ будет определяться, как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g + D_{0t}^{\alpha} g - (k g_x)_x - D_{0t}^{\alpha} (\eta g_x)_x + q g = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} \left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \right) = u_0(x) - \frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \\ \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} \left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \right) = u_1(x) - \frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = u_1(x) \end{gathered} \tag{2.6}$$

и граничными условиями

$$g(0,t) = g(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.7}$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(k_x u_0'(x) + k u_0''(x) + \eta_x u_0'(x) + \eta u_0''(x) - q u_0(x) \right).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, для чего умножим уравнение (2.5) скалярно на

$$D_{0t}^{\alpha} g = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},$$

получим:

$$\begin{aligned}\left(A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^{\alpha} g\right) + \left(D_{0t}^{\alpha} g, D_{0t}^{\alpha} g\right) - \left(\left(k g_x\right)_x, D_{0t}^{\alpha} g\right) \\ - \left(D_{0t}^{\alpha}\left(\eta g_x\right)_x, D_{0t}^{\alpha} g\right) + \left(q g, D_{0t}^{\alpha} g\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha} g\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Преобразуем слагаемые тождества (2.8) с учетом (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned}
\left(A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^{\alpha} g\right) &= A_1 \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \\
&= \frac{A_1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(D_{0t}^{\alpha} g\right)^2 dx = \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2, \\
\left(D_{0t}^{\alpha} g, D_{0t}^{\alpha} g\right) &= \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2, \\
\left(\left(k g_x\right)_x, D_{0t}^{\alpha} g\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l \left(k g_x\right)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ k g_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \Bigg|_0^l - \int_0^l k g_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l k g_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx, \\
\left(D_{0t}^{\alpha}\left(\eta g_x\right)_x, D_{0t}^{\alpha} g\right) &= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\left(\eta g_x\right)_x d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \eta \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \Bigg|_0^l \right. \\
&\quad \left. - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \eta \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\} \\
&\leq -c_1 \int_0^l \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^2 dx = -c_1 \left\| D_{0t}^{\alpha} g_x \right\|_0^2.
\end{aligned}$$

Для оценки правой части (2.8) воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и ε–неравенством [12, с. 100]:

$$\left(F, D_{0t}^{\alpha} g\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2, \quad \varepsilon > 0.$$

С учетом полученных неравенств из (2.8) получим

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2 + \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l k g_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \\ + c_1 \left\| D_{0t}^{\alpha} g_x \right\|_0^2 + \left(q g, D_{0t}^{\alpha} g\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\| D_{0t}^{\alpha} g \right\|_0^2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Проинтегрируем (2.9) по τ от 0 до t :

$$\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g(x,\tau_1)\right\|_0^2d\tau+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l kg_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\frac{g_x(x,\tau_1)d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha}}dx$$
$$+c_1\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g_x(x,\tau_1)\right\|_0^2d\tau+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l qg(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\frac{g(x,\tau_1)d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha}}dx \quad (2.10)$$
$$\leq\frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|_{2,\Omega_t}^2+\varepsilon\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g(x,\tau_1)\right\|_0^2d\tau+\frac{A_1}{2}\left\|(D_{0t}^{\alpha}g)(x,0)\right\|_0^2.$$

Докажем неотрицательность тройных интегралов в левой части последнего неравенства [13, гл. 2]. Введем обозначения:

$$J=\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t kg_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\frac{g_x\left(x,\tau_1\right)d\tau_1}{\left(\tau-\tau_1\right)^{\alpha}}d\tau,$$
$$F_1(x,t)=\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{g_x(x,\tau_1)d\tau_1}{(t-\tau_1)^{\alpha}}.$$

Тогда с учетом формулы обращения интегрального уравнения Абеля [14, с. 39] имеем

$$J=\frac{\pi}{\sin\pi(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t kF_1(x,\tau)d\tau\int\limits_0^\tau\frac{F_1(x,\tau_1)d\tau_1}{(t-\tau_1)^{1-\alpha}}.$$

Используя формулу для гамма-функции

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu-1}\cos kt dt=\frac{\Gamma(\mu)}{k^{\mu}}\cos\frac{\mu\pi}{2},\quad k>0,\quad 0<\mu<1,$$

при $k=(\tau-\tau_1)$, $\mu=1-\alpha$ получаем

$$\frac{1}{(t-\tau_1)^{1-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^\infty\xi^{-\alpha}\cos\xi(t-\tau_1)d\xi,$$

а для исходного интеграла получим

$$J=\frac{\pi}{\sin\pi(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t kF_1(x,\tau)d\tau\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)d\tau_1\int\limits_0^\infty\xi^{-\alpha}\cos\xi(t-\tau_1)d\xi$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t kF_1(x,\tau)d\tau\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)d\tau_1\int\limits_0^\infty\xi^{-\alpha}\cos\xi(\tau-\tau_1)d\xi.$$

Поменяв порядок интегрирования, будем иметь

$$J=\frac{\Gamma(\alpha)}{\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\left[\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty\xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t kF_1(x,t)\cos\xi\tau d\tau\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\cos\xi\tau_1 d\tau_1\right.$$

$$+\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t kF_1(x,\tau)\sin\xi\tau d\tau\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\sin\xi\tau_1 d\tau_1\Bigg]$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t k\,(x,\tau)\left[\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\cos\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right]_\tau d\tau\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t k(x,\tau)\left[\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau)\sin\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right]_\tau dt\right\}.$$

Последнее равенство интегрированием по частям преобразуется к виду

$$J=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}k\left[\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\cos\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\sin\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right]d\xi-\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t k_\tau\left[\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\cos\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int\limits_0^\tau F_1(x,\tau_1)\sin\tau_1\xi d\tau_1\right)^2\right]\right\}.$$

При выполнении условия $k_t\le 0$, так как $\Gamma(\alpha)>0$, $0<\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}<1$, получим, что $J\ge 0$.

Таким образом, при выполнении условий k_t, $q_t\le 0$ доказана неотрицательность тройных интегралов в левой части неравенства (2.10).

Усиливая неравенство (2.10), получим

$$A_1\left\|D_{0t}^\alpha g\right\|_0^2+2(1-\varepsilon)\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^\alpha g(x,\tau_1)\right\|_0^2 d\tau+2c_1\int\limits_0^t\left\|D_{0\tau}^\alpha g_x(x,\tau_1)\right\|_0^2 d\tau$$

$$\le\frac{1}{2\varepsilon}\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2+A_1\|u_1(x)\|_0^2,$$

откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_0^2+\|D_{0t}^\alpha g\|_{2,\Omega_t}^2+\|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2,\Omega_t}^2\le M_1\left(\|F\|_{2,\Omega_t}^2+\|u_1(x)\|_0^2\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$, получим (2.3). □

Замечание 2.1. *Из (2.3) следует единственность решения задачи (1.1)–(2.2).*

Действительно, пусть u — решение однородной задачи, т.е. $f=u_0=u_1=0$. Тогда из (2.3) имеем:

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2+\|D_{0t}^\alpha u\|_{2,Q_t}^2+\|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2,Q_t}^2=0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона-Лейбница [11, с. 15]:

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^\alpha u(x,t)=u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t),$$

в частности, получим:

$$u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_0(x)=0\quad\text{в}\quad\Omega_T.$$

2.2. Априорная оценка решения третьей краевой задачи. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1.1) в области Ω_T с краевыми условиями

$$\begin{cases} \Pi(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t) \end{cases} \tag{2.11}$$

и начальными условиями (2.2), где $\Pi(x,t) = k(x,t)u_x + D^\alpha_{0t}(\eta u_x)$.

Теорема 2.2. *Если дополнительно к условиям теоремы 2.1 выполняются соотношения $\beta_1,\ \beta_2 \in C^1[0,T]$; $\mu_1,\ \mu_2 \in C[0,T]$; $\beta_1,\ \beta_2 \geq c_0 > 0$; $\beta_{1t} \leq 0$; $\beta_{2t} \leq 0$ всюду на $\overline{\Omega_t}$ и выполнено условие $u_0(0) = u_0(l) = u_0'(0) = u_0'(l) = 0$, тогда для решения задачи (1.1), (2.11), (2.2) справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha_{0t}u\|_0^2 + \|D^\alpha_{0t}u\|^2_{2,Q_t} + \|D^\alpha_{0t}u_x\|^2_{2,Q_t} \\ &\leq M\left(\|f\|^2_{2,Q_t} + \int\limits_0^t \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|u_1(x)\|_0^2\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $g(x,t)$ по формуле (2.4). В результате получим определение функции $g(x,t)$, как решение уравнения (2.5) с начальными условиями (2.6) и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi_1(0,t) = \beta_1(t)g - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\Pi_1(l,t) = \beta_2(t)g - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $\Pi_1(x,t) = k(x,t)g_x + D^\alpha_{0t}(\eta g_x)$.

Далее, преобразовывая слагаемые (2.8) с учетом (2.6), (2.13), получим:

$$\begin{aligned} \left(A_1 D^{\alpha+1}_{0t} g, D^\alpha_{0t} g\right) =& \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D^\alpha_{0t}g\|_0^2, \\ \left(D^\alpha_{0t} g, D^\alpha_{0t} g\right) =& \|D^\alpha_{0t}g\|_0^2, \\ \left((kg_x)_x, D^\alpha_{0t}g\right) =& kg_x(l,t)\, D^\alpha_{0t}g(l,\tau) - kg_x(0,t)\, D^\alpha_{0t}g(0,\tau) \\ & - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx, \\ \left(D^\alpha_{0t}(\eta g_x)_x, D^\alpha_{0t}g\right) \leq& D^\alpha_{0t}\left(\eta(l)\, g_x(l,\tau)\right) D^\alpha_{0t}g(l,\tau) \\ & - D^\alpha_{0t}\left(\eta(0)\, g_x(0,\tau)\right) D^\alpha_{0t}g(0,\tau) - c_1\|D^\alpha_{0t}g_x\|_0^2, \\ \left(F, D^\alpha_{0t}g\right) \leq& \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \varepsilon\|D^\alpha_{0t}g\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

С учетом полученных неравенств из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D^\alpha_{0t}g\|_0^2 + \|D^\alpha_{0t}g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx \\ &+ c_1\|D^\alpha_{0t}g_x\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l qg(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \varepsilon\|D^\alpha_{0t}g\|_0^2 + \Pi_1(x,t)D^\alpha_{0t}g(x,\tau)\big|_0^l. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Оценим последнее слагаемое правой части неравенства (2.14):

$$\begin{aligned}\Pi_1(x,t)D_{0t}^{\alpha}g(x,\tau)\big|_0^l =&D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\left(kg_x\left(l,t\right)+D_{0t}^{\alpha}\left(\eta\left(l\right)g_x(l,\tau)\right)\right)\\ &-D_{0t}^{\alpha}g(0,\tau)\left(kg_x\left(0,t\right)+D_{0t}^{\alpha}\left(\eta(0)g_x(0,\tau)\right)\right)\\ =&D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\left(\mu_2(t)-\beta_2 g\right)-D_{0t}^{\alpha}g(0,\tau)\left(\beta_1 g-\mu_1(t)\right)\\ =&D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\mu_2(t)-D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\beta_2 g\left(l,t\right)\\ &-D_{0t}^{\alpha}g\left(0,\tau\right)\beta_1 g\left(0,t\right)+D_{0t}^{\alpha}g\left(0,\tau\right)\mu_1\left(t\right)\\ \le&-D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\beta_2 g\left(l,t\right)-D_{0t}^{\alpha}g\left(0,\tau\right)\beta_1 g\left(0,t\right)+\frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)\\ &+\frac{1}{2}\left(\left(D_{0t}^{\alpha}g\left(0,\tau\right)\right)^2+\left(D_{0t}^{\alpha}g\left(l,\tau\right)\right)^2\right).\end{aligned}$$

Учитывая полученную оценку, из (2.14) приходим к неравенству:

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+D_{0t}^{\alpha}\left(0,\tau\right)\beta_1 g\left(0,t\right)+D_{0t}^{\alpha}g(l,\tau)\beta_2 g\left(l,t\right)&\\ +\left(kg_x,D_{0t}^{\alpha}g_x\right)+c_1\left\|D_{0t}^{\alpha}g_x\right\|_0^2+\left(qg,D_{0t}^{\alpha}g\right)&\\ \le\frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2+\varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)&\\ +\frac{1}{2}\left(\left(D_{0t}^{\alpha}g\left(0,\tau\right)\right)^2+\left(D_{0t}^{\alpha}g\left(l,\tau\right)\right)^2\right).&\end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g\right\|_0^2d\tau+\int_0^t\beta_1 g\left(0,\tau\right)D_{0\tau}^{\alpha}g\left(0,\tau_1\right)d\tau+\int_0^t\beta_2 g\left(l,\tau\right)D_{0\tau}^{\alpha}g\left(l,\tau_1\right)d\tau&\\ +\int_0^t\left(kg_x,D_{0\tau}^{\alpha}g_x\right)d\tau+c_1\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g_x\right\|_0^2d\tau+\int_0^t\left(qg,D_{0\tau}^{\alpha}g\right)d\tau&\\ \le\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t\|F\|_0^2d\tau+\varepsilon\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g\right\|_0^2d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau&\\ +\frac{1}{2}\int_0^t\left(\left(D_{0\tau}^{\alpha}g\left(0,\tau_1\right)\right)^2+\left(D_{0\tau}^{\alpha}g\left(l,\tau_1\right)\right)^2\right)d\tau+\frac{A_1}{2}\left\|\left(D_{0t}^{\alpha}g\right)(x,0)\right\|_0^2.&\end{aligned}$$

При выполнении условий $k_t\le 0$, $q_t\le 0$, $\beta_{1t}\le 0$, $\beta_{2t}\le 0$, усиливая это неравенство, получим

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g\right\|_0^2+\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g\right\|_0^2d\tau+c_1\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g_x\right\|_0^2d\tau\le\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t\|F\|_0^2d\tau+\varepsilon\int_0^t\left\|D_{0\tau}^{\alpha}g\right\|_0^2d\tau&\\ +\frac{1}{2}\int_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\left(D_{0\tau}^{\alpha}g\left(0,\tau_1\right)\right)^2+\left(D_{0\tau}^{\alpha}g\left(l,\tau_1\right)\right)^2\right)d\tau&\\ +\frac{A_1}{2}\left\|\left(D_{0t}^{\alpha}g\right)(x,0)\right\|_0^2.&\end{aligned}$$

С учетом оценок [15, с. 124]

$$\left(D_{0\tau}^{\alpha} g\left(0, \tau_{1}\right)\right)^{2} \leq \varepsilon\left\|\left(D_{0t}^{\alpha} g\right)_{x}\right\|_{0}^{2}+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2},$$
$$\left(D_{0\tau}^{\alpha} g\left(l, \tau_{1}\right)\right)^{2} \leq \varepsilon\left\|\left(D_{0t}^{\alpha} g\right)_{x}\right\|_{0}^{2}+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2}$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{A_{1}}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2}+\left(1-\varepsilon-\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\right) \int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2} d\tau+\left(c_{1}-\varepsilon\right) \int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} g_{x}\right\|_{0}^{2} d\tau \\ \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{0}^{t}\|F\|_{0}^{2} d\tau+\frac{1}{2} \int_{0}^{t}\left(\mu_{1}^{2}+\mu_{2}^{2}\right) d\tau+\frac{A_{1}}{2}\left\|\left(D_{0t}^{\alpha} g\right)(x, 0)\right\|_{0}^{2}\end{aligned}$$

или

$$\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2}+\int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} g\right\|_{0}^{2} d\tau+\int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} g_{x}\right\|_{0}^{2} d\tau \leq M_{2}\left(\int_{0}^{t}\|F\|_{0}^{2} d\tau+\int_{0}^{t}\left(\mu_{1}^{2}+\mu_{2}^{2}\right) d\tau+\left\|u_{1}(x)\right\|_{0}^{2}\right).$$

Возвращаясь к $u(x,t)$, получим (2.12), откуда следует единственность решения задачи (1.1), (2.11), (2.2). □

3. Нелокальные краевые задачи для неоднородного уравнения Аллера–Лыкова с дробной по времени производной

Задачам с нелокальными граничными условиями для уравнений в частных производных посвящены многие работы, в том числе, уже ставшая классической, работа [16]. Известно [17, с. 135], что нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках.

Задача 3.1. *Рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения (1.1) в области Ω_T, удовлетворяющую краевым условиям*

$$\begin{cases}\Pi_{2}(0, t)=\beta_{1}(t) u(0, t)+D_{0t}^{\alpha} u(0, \tau)-\mu_{1}(t), \\ -\Pi_{2}(l, t)=\beta_{2}(t) u(l, t)+D_{0t}^{\alpha} u(l, \tau)-\mu_{2}(t)\end{cases} \tag{3.1}$$

и начальным условиям (2.2), где $\Pi_2(x,t) = k(x,t)u_x + D_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)$.

Нелокальные краевые задачи, содержащие в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изучены А.И. Кожановым [18]. Краевые задачи для уравнений влагопереноса с такого рода граничными условиями рассматривались также в работах [19], [20].

Теорема 3.1. *Если выполняются условия теоремы 2.2, тогда для решения задачи (1.1), (3.1), (2.2) справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned}\left\|D_{0t}^{\alpha} u\right\|_{0}^{2}+\int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} u\right\|_{0}^{2} d\tau+\int_{0}^{t}\left\|D_{0\tau}^{\alpha} u_{x}\right\|_{0}^{2} d\tau+\int_{0}^{t}\left(D_{0\tau}^{\alpha} u\left(l, \tau_{1}\right)\right)^{2}+\left(D_{0\tau}^{\alpha} u\left(0, \tau_{1}\right)\right)^{2} d\tau \\ \leq M_{3}\left(\int_{0}^{t}\|f\|_{0}^{2} d\tau+\int_{0}^{t}\left(\mu_{1}^{2}+\mu_{2}^{2}\right) d\tau+\left\|u_{0}(x)\right\|_{W_{2}^{2}(0, l)}^{2}+\left\|u_{1}(x)\right\|_{0}^{2}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Доказательство. Для новой неизвестной функции $g(x,t)$ получим определение функции $g(x,t)$, как решение уравнения (2.5) с начальными условиями (2.6) и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi_3(0,t) = \beta_1(t)g(0,t) + D_{0t}^{\alpha}g(0,t) - \mu_1(t), \\ -\Pi_3(l,t) = \beta_2(t)g(l,t) + D_{0t}^{\alpha}g(l,t) - \mu_2(t), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\Pi_3(x,t) = k(x,t)g_x + D_{0t}^{\alpha}(\eta g_x)$.

Последнее слагаемое правой части неравенства (2.14), с учетом (3.3), представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_3 D_{0t}^{\alpha} g\Big|_0^l =& D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau)\left(kg_x(l,t) + D_{0t}^{\alpha}(\eta(l)\,g_x(l,\tau))\right) \\ & - D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau)\left(kg_x(0,t) + D_{0t}^{\alpha}(\eta(0)\,g_x(0,\tau))\right) \\ =& D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau)\left(\mu_2(t) - \beta_2(t)\,g(l,t) - D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau)\right) \\ & - D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau)\left(\beta_1(t)\,g(0,t) + D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau) - \mu_1(t)\right) \\ & + D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau)\mu_2(t) - D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau)\beta_2 g(l,t) - D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau) D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau) \\ & + D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau)\,\mu_1(t) - D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau)\beta_1 g(0,t) - D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau)\, D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau). \end{aligned}$$

Оценим сумму $\mu_2(t)D_{ot}^{\alpha}g(l,t) + \mu_1(t)D_{ot}^{\alpha}g(0,t)$:

$$\mu_1 D_{ot}^{\alpha} g(0,t) + \mu_2 D_{ot}^{\alpha} g(l,t) \leq \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \left(\varepsilon \left\|(D_{0t}^{\alpha} g(x,t))_x\right\|_0^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)\left\|D_{0t}^{\alpha} g(x,t)\right\|_0^2\right).$$

Учитывая полученную выше оценку, из (2.14) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_0^2 + \left(1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)\right)\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_0^2 + (kg_x, D_{0t}^{\alpha} g_x) + (c_1 - \varepsilon)\left\|D_{0t}^{\alpha} g_x\right\|_0^2 \\ + (qg, D_{0t}^{\alpha} g) + \beta_2(t) D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau) g(l,t) + \beta_1(t)\, D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau) g(0,t) \\ + (D_{0t}^{\alpha} g(l,\tau))^2 + (D_{0t}^{\alpha} g(0,\tau))^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Проинтегрируем (3.4) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha} g\right\|_0^2 + \nu(\varepsilon)\int_0^t \left\|D_{0\tau}^{\alpha} g\right\|_0^2 d\tau + \int_0^t (kg_x, D_{0\tau}^{\alpha} g_x)\, d\tau + \nu_1(\varepsilon)\int_0^t \left\|D_{0\tau}^{\alpha} g_x\right\|_0^2 d\tau \\ + \int_0^t (qg, D_{0\tau}^{\alpha} g)\, d\tau + \int_0^t \beta_2 g(l,\tau) D_{0\tau}^{\alpha}(l,\tau_1) d\tau \\ + \int_0^t \beta_1 g(0,\tau)\, D_{0\tau}^{\alpha}(0,\tau_1) d\tau + \int_0^t (D_{0\tau}^{\alpha} g(l,\tau_1))^2 + (D_{0\tau}^{\alpha} g(0,\tau_1))^2 d\tau \\ \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2}\left\|(D_{0t}^{\alpha} g)(x,0)\right\|_0^2, \end{aligned}$$

где $\nu(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)$, $\nu_1(\varepsilon) = c_1 - \varepsilon$.

При выполнении условий $k_t \le 0$, $q_t \le 0$, $\beta_{1t} \le 0$, $\beta_{2t} \le 0$ можно усилить последнее неравенство. В результате получим

$$\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+\nu(\varepsilon)\int\limits_0^t\|D_{0\tau}^{\alpha}g\|_0^2\,d\tau+\nu_1(\varepsilon)\int\limits_0^t\|D_{0\tau}^{\alpha}g_x\|_0^2\,d\tau+\int\limits_0^t(D_{0\tau}^{\alpha}g(l,\tau_1))^2+(D_{0\tau}^{\alpha}g(0,\tau_1))^2\,d\tau$$
$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^t\|F\|_0^2\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau+\frac{A_1}{2}\|u_1(x)\|_0^2.$$

Откуда следует оценка (3.2), доказывающая единственность решения задачи (1.1), (3.1), (2.2). □

Задача 3.2. *В задаче (1.1), (3.1), (2.2) заменим граничные условия (3.1) условиями вида*

$$\begin{cases}\Pi_4(0,t)=\beta_1(t)\left(u(0,t)+D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)-\mu_1(t),\\ -\Pi_4(l,t)=\beta_2(t)\left(u(l,t)+D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)-\mu_2(t).\end{cases}\tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *Если выполняются условия теоремы 2.2, тогда для решения задачи (1.1), (3.5), (2.2) справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned}&\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+\|D_{0t}^{\alpha}u\|_{2,\Omega_t}^2+\|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_{2,\Omega_t}^2+\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)^2+\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)^2\\&\le M\left(\|f\|_{2,\Omega_t}^2+\int\limits_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau+\|u_1(x)\|_0^2+u_0^2(0)+u_0^2(l)\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}u$:

$$\begin{aligned}&\left(A_1D_{0t}^{\alpha+1}u,D_{0t}^{\alpha}u\right)+(D_{0t}^{\alpha}u,D_{0t}^{\alpha}u)-((ku_x)_x,D_{0t}^{\alpha}u)\\&\quad-(D_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,D_{0t}^{\alpha}u)+(qu,D_{0t}^{\alpha}u)=(f,D_{0t}^{\alpha}u).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Повторим те же рассуждения, которые проводились при выводе неравенства (2.14), тогда получим

$$\begin{aligned}&\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big\|D_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2+\big\|D_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l ku_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx\\&\quad+c_1\big\|D_{0t}^{\alpha}u_x\big\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l qu(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx\\&\le\Pi_4(x,t)D_{0t}^{\alpha}u(x,\tau)\big\|_0^l+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\big\|D_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Для получения априорной оценки преобразуем, с учетом (3.5), первое слагаемое правой части неравенства (3.8):

$$\begin{aligned}\Pi_4D_{0t}^{\alpha}u\big|_0^l=&D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\left(ku_x(l,t)+D_{0t}^{\alpha}(\eta(l)u_x(l,\tau))\right)-D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\big(ku_x(0,t)\\&+D_{0t}^{\alpha}(\eta(0)u_x(0,\tau))\big)=D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\left(\mu_2(t)-\beta_2(t)\left(u(l,t)+D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)\right)\\&-D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\left(\beta_1(t)\left(u(0,t)+D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)-\mu_1(t)\right)\\=&D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\mu_2(t)-D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\beta_2(t)u(l,t)-D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\beta_2(t)D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\\&+D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\mu_1(t)-D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\beta_1(t)u(0,t)-D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\beta_1(t)D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau).\end{aligned}$$

Учитывая оценки

$$D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)\beta_2(t)D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau) \geq c_0\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)^2,$$
$$D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)\beta_1(t)D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau) \geq c_0\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)^2,$$

из (3.8) находим, что

$$\begin{gathered}\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \left(1-\varepsilon-\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\right)\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + (ku_x, D_{0t}^{\alpha}u_x) + (c_1-\varepsilon)\|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2 \\ + (qu, D_{0t}^{\alpha}u) + \beta_2(t)D_{0t}^{\alpha}u(l,\tau)u(l,t) + \beta_1(t)D_{0t}^{\alpha}u(0,\tau)u(0,t) \\ + \frac{c_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)^2 + \frac{c_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2).\end{gathered} \tag{3.9}$$

Проинтегрируем (3.9) по τ от 0 до t :

$$\begin{gathered}\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \nu(\varepsilon)\int_0^t \|D_{0\tau}^{\alpha}u\|_0^2\,d\tau + \int_0^t (ku_x, D_{0\tau}^{\alpha}u_x)\,d\tau + \nu_1(\varepsilon)\int_0^t \|D_{0\tau}^{\alpha}u_x\|_0^2\,d\tau \\ + \int_0^t (qu, D_{0\tau}^{\alpha}u)\,d\tau + \int_0^t \beta_2 u(l,\tau)\,D_{0\tau}^{\alpha}u(l,\tau_1)d\tau + \int_0^t \beta_1 u(0,\tau)D_{0\tau}^{\alpha}u(0,\tau_1)d\tau \\ + \frac{c_0}{2}\left[\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)^2 + \left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)^2\right] \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau \\ + \frac{A_1}{2}\|(D_{0t}^{\alpha}u)(x,0)\|_0^2 + \frac{c_0}{2}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,0)\right)^2 + \frac{c_0}{2}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,0)\right)^2,\end{gathered}$$

где $\nu(\varepsilon) = 1-\varepsilon-\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)$, $\nu_1(\varepsilon) = c_1-\varepsilon$.

При выполнении условий $k_t \leq 0$, $q_t \leq 0$, $\beta_{1t} \leq 0$, $\beta_{2t} \leq 0$ усилим последнее неравенство. В результате получим оценку

$$\begin{gathered}\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \nu(\varepsilon)\int_0^t \|D_{0\tau}^{\alpha}u\|_0^2\,d\tau + \nu_1(\varepsilon)\int_0^t \|D_{0\tau}^{\alpha}u_x\|_0^2\,d\tau + \frac{c_0}{2}\Big[\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,\tau)\right)^2 \\ + \left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,\tau)\right)^2\Big] \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t \|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^t (\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau + \frac{A_1}{2}\|(D_{0t}^{\alpha}u)(x,0)\|_0^2 \\ + \frac{c_0}{2}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(l,0)\right)^2 + \frac{c_0}{2}\left(D_{0t}^{\alpha-1}u(0,0)\right)^2,\end{gathered}$$

из которой вытекает искомая оценка (3.6), доказывающая единственность решения задачи (1.1), (3.5), (2.2). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Чудновский. *Теплофизика почв.* М.: Наука. 1976.
2. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003.
3. С.М. Архестова, М.Х. Шхануков-Лафишев. *Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием* // Известия КБНЦ РАН. **3**, 7–16 (2012).
4. М.М. Лафишева, М.А. Керефов, Р.В. Дышекова. *Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием* // Владикавказский математический журнал. **19**:1, 50–58 (2017).

5. С.Х. Геккиева. *Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. **4 (24)**, 19–28 (2018).
6. М.А. Керефов, Ф.М. Нахушева, С.Х. Геккиева. *Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью* // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. **24**:3, 23–29 (2018).
7. С.Х. Геккиева, М.А. Керефов. *Краевая задача для нелокального уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **167**, 27–33 (2019).
8. S.Kh. Gekkieva, M.A. Kerefov. *Dirichlet boundary value problem for Aller–Lykov moisture transfer equation with fractional derivative in time* // Ufa Math. J. **11**:2, 71–81 (2019).
9. М.А. Керефов, С.Х. Геккиева. *Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **23**:4, 607–621 (2019).
10. М.А. Керефов, С.Х. Геккиева. *Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса* // Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Комп. науки. **31**:1, 19–34 (2021).
11. А.В. Псху. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука. 2005.
12. А.А. Самарский. *Теория разностных схем.* М.: Наука. 1989.
13. М.А. Керефов. *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с.
14. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987.
15. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. 1973.
16. А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // Докл. АН СССР. **185**:4, 739–740 (1969).
17. А.М. Нахушев. *Уравнения математической биологии.* М.: Физматлит. 1995.
18. А.И. Кожанов. *Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера* // Дифференц. уравнения. **40**:6, 763–774 (2004).
19. M.Kh. Beshtokov. *Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative* // Differential equations. **54**:6, 763–778 (2018).
20. М.Х. Бештоков. *Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся дифференциальных уравнений дробного порядка с нелокальным линейным источником и разностные методы их численной реализации* // Уфимск. матем. журн. **11**:2, 36–55 (2019).

Сакинат Хасановна Геккиева,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89 А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Марат Асланбиевич Керефов,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173,
360004, г. Нальчик, Россия
E-mail: kerefov@mail.ru

Фатима Мухамедовна Нахушева,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173,
360004, г. Нальчик, Россия
E-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru