

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ ПОРЯДКА НАИЛУЧШИХ M -ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА–КАРАМАТЫ

Г.А. АКИШЕВ

Аннотация. В статье рассматривается известный класс слабо колеблющихся функций и по этим функциям определяется анизотропное пространство Лоренца–Караматы 2π -периодических функций многих переменных. Частными случаями этих пространств, являются анизотропные пространства Лоренца–Зигмунда и Лоренца. В анизотропном пространстве Лоренца–Караматы определен аналог класса Никольского–Бесова. Основной целью статьи является нахождение точных порядков наилучших M -членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского–Бесова по норме другого анизотропного пространства Лоренца–Караматы. В статье установлены точные по порядку двусторонние оценки наилучших M -членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Караматы в разных метриках. Для доказательства оценки сверху наилучших M -членных приближений, использована идея метода жадных алгоритмов предложенного В.Н. Темляковым, с модификацией для анизотропного пространства Лоренца–Караматы.

Ключевые слова: пространство Лоренца–Караматы, класс Никольского–Бесова, M -членное приближение.

Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A05

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{R}^m — m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; 0 \leq x_j < 1; j = 1, \dots, m\} = [0, 1]^m$ — m -мерный куб.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1.1. Пусть f — измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0, 1)$. Функция распределения для $|f|$ определяется как мера Лебега (см., например, [1, с. 81])

$$\mu_f(y) := \mu\{x \in [0, 1) : |f(x)| > y\}, \quad 0 \leq y < \infty.$$

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если их функции распределения равны (см., например, [1, с. 82]).

Определение 1.2. Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной называется невозрастающая на $[0, 1)$ функция $f^*(t)$ равноизмеримая с функцией $|f(x)|$ (см., например, [1, с. 83]).

G.A. AKISHEV ON ESTIMATES OF THE ORDER OF BEST M -TERM APPROXIMATIONS OF MULTIVARIATE FUNCTIONS IN ANISOTROPIC LORENTZ–KARAMATA SPACES.

© АКИШЕВ Г.А. 2023.

Исследование выполнено в рамках гранта МОН РК, Проект AP 08855579.

Поступила 31 ноября 2021 г.

Невозрастающая перестановка f^* функции f одной переменной на $[0, 1)$ определяется по формуле (см., например, [1, с. 83])

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \mu_f(y) \leq t\}, \quad t \in [0, 1).$$

Теперь напомним определение невозрастающей перестановки функции m переменных.

Определение 1.3 (см. [2]–[4]). Пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m = [0, 1)^m$. Невозрастающей перестановкой функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$, по первой переменной понимается функция $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$, равноизмеримая на I^m , невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$ и $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных x_2, \dots, x_m .

Аналогичным образом рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ по переменной x_2 , при фиксированных t_1, x_3, \dots, x_m определяется функция $f^{*1*2}(t_1, t_2, x_3, \dots, x_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1, \dots, x_m)|$. Продолжая этот процесс определяется невозрастающая перестановка $f^{*1*2 \dots *m}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1, \dots, x_m)|$.

Определение 1.4 (см., например, [5]). Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей на $[1, \infty)$, если существует такое постоянное число C , что $\varphi(t_1) \leq C\varphi(t_2)$ для $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

Функция $\varphi(t)$ называется почти убывающей на $[1, \infty)$, если существует такое постоянное число C , что $\varphi(t_1) \geq C\varphi(t_2)$ для $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

Определение 1.5. Положительная и измеримая по Лебегу функция $b(t)$ называется слабо меняющейся (slowly varying) на $[1, +\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^\varepsilon b(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} b(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$ (см. [6], [7]).

Множество таких функций обозначается $SV[1, \infty)$. Для заданной слабо меняющейся функции v на $[1, \infty)$, положим $V(t) = v(1/t)$ для $t \in (0, 1]$.

Пусть даны числа $p, \tau \in (1, \infty)$ и функция $v \in SV[1, \infty)$. Пространством Лоренца–Караматы $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T})$ называется множество всех измеримых по Лебегу 2π периодических функций f для которых (см., например, [6, с. 112])

$$\|f\|_{p,V,\tau} := \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^\tau V^\tau(t) t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi x)|$, $x \in [0, 1)$, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$.

Известно, что $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T})$ является симметричным пространством (см., например, [6, с. 114]).

Отметим, что при $V(t) = 1$ пространство Лоренца–Караматы $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с известным пространством Лоренца, обозначаемым символом $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p, \tau < \infty$ (см. [8, с. 228]) с

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p} \int_0^1 (f^*(t))^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right)^{1/\tau} < \infty,$$

для $1 < p < \infty$, $1 \leq \tau < +\infty$.

Пусть даны функции $v_j \in SV[1, \infty)$, для $j = 1, \dots, m$ и положим $V_j(t) = v_j(1/t)$, для $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$ и $\bar{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_m(t))$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, числа $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$. Анизотропное пространство Лоренца–Караматы $L_{\bar{p},\bar{V},\bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$, состоит из всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина (см. [2])

$$\|f\|_{\bar{p},\bar{V},\bar{\tau}}^* := \|\dots\|_{p_1,V_1,\tau_1} \|f^{*1,\dots,*m}\|_{p_m,V_m,\tau_m}$$

$$= \left[\int_0^1 \left[\dots \left[\int_0^1 (f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m))^{\tau_1} \left(\prod_{j=1}^m V_j(t_j) t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\tau_1} dt_1 \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1]$ при фиксированных остальных переменных.

Через $\mathring{L}_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ обозначим множество всех функций $f \in L_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Для $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ через $l_{\bar{p}}$ обозначается пространство последовательностей $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ действительных чисел с нормой

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m}\|_{l_{\bar{p}}(\mathbb{Z}_+^m)} = \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

для $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$ и

$$\|\{a_{\bar{n}}\}\|_{l_{\infty}(\mathbb{Z}_+^m)} = \sup_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} |a_{\bar{n}}|$$

для $p_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$

Введем обозначения: $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}$, $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}$, где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$,

$$\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\},$$

$[y]$ — целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим функциональный класс Никольского–Бесова

$$S_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^{\bar{\theta}} B = \left\{ f \in \mathring{L}_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m) : \|f\|_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^* + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\},$$

где $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $1 \leq \theta_j \leq +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

В случае $V_j(t) = 1$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \dots, m$ класс $S_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^{\bar{\theta}} B$ совпадает с известным классом Никольского–Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$ (см. [9]–[11]).

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\},$$

$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$.

Положим

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} := \sup_{f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}},$$

где $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{V}^{(i)}(t) = (V_1^{(i)}(t), \dots, V_m^{(i)}(t))$, $t \in (0, 1]$, $\bar{\tau}^{(i)} = (\tau_1^{(i)}, \dots, \tau_m^{(i)})$ и $1 < q_j$, $\tau_j^{(i)} < \infty$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть X — нормированное пространство 2π -периодических функций многих переменных. Для функции $f \in X$ наилучшим M -членным тригонометрическим приближением

называется величина (см. [12])

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^j, \bar{x} \rangle} \right\|_X,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$ — система векторов $\bar{k}^j = (k_1^j, \dots, k_m^j)$ с целочисленными координатами, b_j — действительные или комплексные числа. Если F — некоторый функциональный класс в пространстве X , то положим $e_M(F)_X = \sup_{f \in F} e_M(f)_X$.

Оценкам порядка величины $e_M(F)_Y$ в пространстве $Y = L_q(\mathbb{T}^m)$ для классов Соболева $F = W_p^r$, Никольского–Бесова $F = S_{p,\theta}^r B$, Лизоркина–Трибеля посвящены исследования Р.С. Исмагилова [12], Э.С. Белинского [13]–[15], Ю. Маковоза [16], В.Е. Майорова [17], Р. Девора [18], В.Н. Темлякова [19]–[21], А.С. Романюка [22], М. Хансена и У. Зикеля [23], С. А. Стасюка [24], Д.Б. Базарханова [25]–[26] и других авторов. По этой тематике, более подробную библиографическую ссылку можно найти в обзорной статье [27].

Оценки наилучших M -членных приближений функций класса Никольского–Бесова в пространствах Лоренца и Лебега с анизотропными нормами исследованы в [28]–[34].

Методы доказательства оценок снизу и сверху для наилучших M -членных тригонометрических приближений классов периодических функций многих переменных смешанной гладкости были разработаны В.Н. Темляковым [19]–[21] и были использованы другими авторами (например, [22], [24]–[26], [28]–[32], а также см. библиографию в [27]). В предлагаемой статье для доказательства основного результата (теорема 3.1), использованы идея метода В.Н. Темлякова, с модификацией для анизотропных пространств Лоренца–Караматы.

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе даны некоторые вспомогательные результаты необходимые для доказательства основных результатов. Во втором разделе сформулированы и доказаны основные результаты статьи. Отметим, что в случае

$$V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1, \quad t \in (0, 1]$$

и $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$ для $j = 1, \dots, m$ и $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ теорема 3.1 совпадает с ранее известными результатами В.Н. Темлякова [19, теорема 2.2, с. 92] и А.С. Романюка [22, теорема 3.1] для пространств Лебега и в общем случае обобщает их на анизотропные пространства Лоренца–Караматы.

Через $C(p, q, y, \dots)$ обозначим положительные величины зависящие от указанных в скобках параметров (иногда без указания параметров), но не зависящие от M -порядка наилучшего M -членного приближения. Запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A_n \leq B_n \leq C_2 A_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Также для краткости записи вместо неравенств $B_n \geq C_1 A_n$ или $B_n \leq C_2 A_n$, часто будем использовать $B \gg A$ или $B \ll A$, соответственно.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе определен один класс функций и даны несколько вспомогательных утверждений.

Через $SVL[1, \infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1, \infty)$ функций $v(t)$, для которых функция $(\log 2t)^{-\varepsilon} v(t)$ почти убывает и функция $(\log 2t)^\varepsilon v(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Ясно, что $SVL[1, \infty) \subset SV[1, \infty)$.

Пример 1. Функция $v(t) = (1 + \log(1 + \log t))^\alpha \in SVL[1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Здесь и далее $\log t$ означает логарифм с основанием 2 от числа $t > 0$.

Теорема 2.1 (см. [35]). Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$, $\bar{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $1 < p_j < q_j < +\infty$ и функции $v_j^{(i)} \in SV[1, \infty)$, $V_j^{(i)}(t) = v_j^{(i)}(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{V}^{(i)}(t) = (V_1^{(i)}(t), \dots, V_m^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

Если $f \in L_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^*(\mathbb{T}^m)$ и величина

$$\left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \in l_{\bar{\tau}^{(2)}},$$

то $f \in L_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}^*(\mathbb{T}^m)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}^* \leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}.$$

Теорема 2.2 (см. [37]). Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$, $\bar{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и $0 < \theta_j \leq \infty$, $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $1 < p_j < q_j < +\infty$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}$, $1 \leq \gamma'_j \leq \gamma_j$, $j = 1, \dots, m$ и $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j : \frac{\gamma'_j}{\gamma_j} = 1, j = 1, \dots, m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$ и функции $v_j^{(i)} \in SV[1, \infty)$, $V_j^{(i)}(t) = v_j^{(i)}(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{V}^{(i)}(t) = (V_1^{(i)}(t), \dots, V_m^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

1. Если $1 \leq \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq +\infty$ и функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, то

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} \left(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \asymp 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})},$$

для $n \in \mathbb{N}$ таких, что $n > n_0$.

2. Если $1 \leq \theta_j \leq \tau_j^{(2)} < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то справедливо соотношение

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} \left(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \asymp 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ и $A \setminus \{j_1\} = \emptyset$ или $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}$ почти возрастает,

а $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$, $\varepsilon > 0$, $j = 1, \dots, m$ и множество $A \setminus \{j_1\} \neq \emptyset$,

для $n \in \mathbb{N}$, таких, что $n > n_0$, где n_0 некоторое положительное число большее 1.

Следующее утверждение будет использовано в доказательстве оценок снизу М-членного приближения функций класса Никольского–Бесова в теореме 3.1.

Теорема 2.3. Пусть функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $V_j(t) = v_j(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $1 < \tau_j, \beta_j < +\infty$, $1 < p_j < \lambda_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Если $f \in L_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$, то справедливо неравенство

$$\|f\|_{\bar{p}, \bar{V}, \bar{\tau}}^* \gg \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{p_j})} V_j(2^{-s_j}) \right)^{\tau_1} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\lambda}, \bar{\beta}}^* \right)^{\tau_1} \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\tau_m}}.$$

Эта теорема доказывается также, как теорема 4 в [33] и теорема 4 в [37].
Рассмотрим множества

$$Y^m(\bar{\gamma}, n) = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n\} \quad \text{и} \quad \kappa^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.1. Пусть даны функции $V_j(t) = v_j(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$ и $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$ и $\alpha \in (0, \infty)$, $\delta = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j = 1, \dots, m : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$. Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m V_j(2^{-s_j}) \right\}_{\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C 2^{-n\alpha\delta} \prod_{j \in A} V_j(2^{-n/\gamma'_j}) n^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum \frac{1}{\theta_j}},$$

в случаях:

если $1 \leq \theta_j < \infty$ и функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$;

или если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$ и функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ и множество $A \setminus \{j_1\} = \emptyset$;

или если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$ и функции $v_j(t)$ почти возрастают, а $t^{-\varepsilon} v_j(t)$ почти убывают на $[1, \infty)$, для $\varepsilon > 0$, $j = 1, \dots, m$ и множество $A \setminus \{j_1\} \neq \emptyset$.

Доказательство. В случае $1 \leq \theta_j < \infty$ и функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ эта лемма фактически доказана в [37].

Рассмотрим случай $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$. Оценим величину

$$I_n := \sup_{\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m V_j(2^{-s_j}). \quad (2.1)$$

Пусть $m = 2$. Множество $Y^2(n, \bar{\gamma}')$ можно представить в следующем виде

$$Y^2(n, \bar{\gamma}') = \{\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma'_2}, s_1 \geq \frac{n - s_2 \gamma'_2}{\gamma'_1}\} \\ \cup \{\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : s_2 \geq \frac{n}{\gamma'_2}, s_1 \geq 0\}.$$

По условию леммы функция $v_2 \in SV[1, \infty)$. Значит функция $v_2(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) = 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m v_j(2^{s_j}) \\ \leq C 2^{-n \frac{\gamma_1}{\gamma'_1} \alpha} 2^{-s_2 \gamma'_2 (\frac{\gamma_2}{\gamma'_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma'_1}) \alpha} v_2(2^{s_2}) v_1(2^{\frac{n - s_2 \gamma'_2}{\gamma'_1}}) \quad (2.2)$$

для $s_1 \geq \frac{n - s_2 \gamma'_2}{\gamma'_1}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma'_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma'_1} > 0$. Выберем число $\eta \in \left(0, \left(\frac{\gamma_2}{\gamma'_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma'_1}\right) \alpha\right)$. Так как функция $v_1(t)t^\eta$ почти возрастает на $[1, \infty)$ для $\eta > 0$, а $v_2(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$,

и $0 < n - s_2\gamma_2' \leq n$ для $0 \leq s_2 < n/\gamma_2'$, то из неравенства (2.2) получим, что

$$\begin{aligned} 2^{-\alpha(\bar{s}, \bar{\gamma})} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) &\leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} 2^{-n\eta} 2^{(n-s_2\gamma_2')\eta} \\ &\times v_1(2^{-\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}}) 2^{-s_2\gamma_2'((\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1})\alpha - \eta)} v_2(2^{s_2}) \\ &\leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} 2^{-n\eta} 2^{n\eta} v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1}}) 2^{-s_2\gamma_2'((\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1})\alpha - \eta)} v_2(2^{s_2}) \\ &\leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1}}) = C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

для $0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma_2}$ и $s_1 \geq \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} < 0$. Тогда выбирая число $\eta \in (0, -(\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1})\alpha)$ аналогично (2.3) можно доказать, что

$$2^{-\alpha(\bar{s}, \bar{\gamma})} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) \leq C 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2}\alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) \quad (2.4)$$

для $0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma_2}$ и $s_1 \geq \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} = 0$. Тогда из (2.2) имеем

$$2^{-\alpha(\bar{s}, \bar{\gamma})} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) \leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} v_2(2^{s_2}) v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}}) \quad (2.5)$$

для $0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma_2}$ и $s_1 \geq \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}$. Так как функции v_j , $j = 1, 2$ почти возрастают, то

$$v_2(2^{s_2}) \leq C v_2(2^{\frac{n}{\gamma_2}}), \quad 0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma_2}$$

и

$$v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}}) \leq C v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1}}), \quad 0 < \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1} \leq \frac{n}{\gamma_1}.$$

Поэтому из (2.5) следует, что

$$2^{-\alpha(\bar{s}, \bar{\gamma})} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) \leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1}}) v_2(2^{\frac{n}{\gamma_2}}) = C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}) V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) \quad (2.6)$$

для $0 \leq s_2 < \frac{n}{\gamma_2}$ и $s_1 \geq \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1}$, в случае $\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} = 0$.

Пусть $s_1 \geq 0$ и $s_2 \geq \frac{n}{\gamma_2}$. Тогда в силу того, что функция $v_j(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$ получим

$$\begin{aligned} 2^{-\alpha(\bar{s}, \bar{\gamma})} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) &= 2^{-s_1\gamma_1\alpha} v_1(2^{s_1}) 2^{-s_2\gamma_2\alpha} v_2(2^{s_2}) \\ &\leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} v_1(1) v_2(2^{\frac{n}{\gamma_2}}) = C 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2}\alpha} V_1(1) V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теперь, из неравенств (2.1), (2.3) и (2.7) следует, что

$$I_n \leq C \left\{ 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}) + 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2}\alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) \right\} \leq C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}), \quad (2.8)$$

если $\frac{\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} > 0$.

Если $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < 0$, то из неравенств (2.1), (2.4) и (2.7) следует, что

$$I_n \leq C 2^{-n \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}). \quad (2.9)$$

Если $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 0$, то из неравенств (2.1), (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} I_n &\leq C \left\{ 2^{-n \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}) V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) + 2^{-n \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) \right\} \\ &\leq C 2^{-n \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2}}) V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1}}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

для почти возрастающей на $[1, \infty)$ функции v_j , $j = 1, 2$.

Этим утверждение леммы доказано для $m = 2$, в случае $\theta_j = \infty$, $j = 1, 2$.

Далее, применяя метод математической индукции и неравенства (2.8)–(2.10) утверждение можно доказать для $m > 2$. \square

Лемма 2.2. (см. [30, лемма 4]). Пусть $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 \leq \tau_j < +\infty$, и $j = 1, \dots, m$. Тогда справедливо соотношение

$$\left\| \left\{ \chi_{\varkappa(n)}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp n^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее, $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ характеристическая функция множества

$$\varkappa(n) = \{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n \}.$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом параграфе докажем основной результат статьи.

Теорема 3.1. Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$, $\bar{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_m')$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и $0 < \theta_j \leq \infty$, $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $1 < p_j < q_j \leq 2$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}$, $j = 1, \dots, m$ и $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma_j} = 1, j = 1, \dots, m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$ и функции $v_j^{(i)} \in SV[1, \infty)$, $V_j^{(i)}(t) = v_j^{(i)}(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{V}^{(i)}(t) = (V_1^{(i)}(t), \dots, V_m^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

1. Если $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq +\infty$ и функции $v_j^{(2)}/v_j^{(1)} \in SVL[1, \infty)$, $j \in A$, то

$$\begin{aligned} e_M(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} &\asymp M^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \\ &\times (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})}. \end{aligned}$$

2. Если $1 \leq \theta_j = \theta \leq \tau_j^{(2)} = \tau^{(2)} < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$\begin{aligned} e_M(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} &\asymp M^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \\ &\times (\log M)^{((|A|-1)(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}) + \frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta})_+}, \end{aligned}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j \in A$ и $A \setminus \{j_1\} = \emptyset$ или $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{-\varepsilon}$ почти убывает для $\varepsilon > 0$ и $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}$ почти возрастает на $[1, \infty)$ для $j \in A$ и множество $A \setminus \{j_1\} \neq \emptyset$, для $M \in \mathbb{N}$, таких, что $M > M_0$, где M_0 некоторое положительное число большее 1.

Доказательство. Пусть $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$. Положим

$$r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, \dots, m\} \quad \text{и} \quad \gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Выберем числа $\gamma'_j > 0$ так, чтобы $\gamma'_j \leq \gamma_j$, $j = 1, \dots, m$ и введем обозначения

$$A = \{j : \frac{\gamma'_j}{\gamma_j} = 1, j = 1, \dots, m\}, \quad j_1 = \min\{j \in A\}.$$

Отметим, что $\gamma'_j = \gamma_j = 1$, для $j \in A$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ существует натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$, где $|A|$ — количество элементов множества A .

Тогда в силу определения величины $e_M(f)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}$ и теоремы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} e_M(f)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} &\leq E_n^{(\bar{\gamma}')}(f)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \\ &\ll 2^{-n \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в случае $\tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Так как функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ и $\frac{\log t}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} &= \frac{v_j^{(2)}(2^n)}{v_j^{(1)}(2^n)} = \frac{v_j^{(2)}(2^n)}{v_j^{(1)}(2^n)} (\log 2^{n+1})^\varepsilon (\log 2^{n+1})^{-\varepsilon} \\ &\ll \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} (\log(2^{n+1} n^{|A|-1}))^\varepsilon (\log 2^{n+1})^{-\varepsilon} \\ &= \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} (n + 1 + \log n^{|A|-1})^\varepsilon (n + 1)^{-\varepsilon} \ll \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} \\ &\ll \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \ll \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу того, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$ имеем $n \asymp \log M$ и

$$\begin{aligned} 2^{-n \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} &= 2^{-n \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) (|A|-1) \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \\ &\quad \times n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} \asymp M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \\ &\quad \times (\log M)^{\left(|A|-1 \right) \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

для $n > n_0$, где n_0 некоторое положительное число большее 1.

Теперь из неравенств (3.1)–(3.2) и соотношения (3.3) следует, что

$$e_M(f)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \ll M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}$$

для $M > M_0 > 1$, в случае $\tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Этим в первом пункте оценка сверху доказана.

Рассмотрим второй случай $1 \leq \theta_j = \theta < \tau_j^{(2)} = \tau < \infty$, $j = 1, \dots, m$ и вместо $S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{\tau}}$ и $\|f\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}^*$ будем писать $S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}}$ и $\|f\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau}^*$. Для функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}}$ построим приближающий полином $P(\Omega_M, \bar{x})$, который дает требуемую оценку приближения.

Пусть натуральное число n удовлетворяет соотношению

$$M \asymp 2^n n^{|A|-1}$$

и $n_0 = [n + (|A| - 1) \log n]$. Полином $P(\Omega_M, \bar{x})$ будем строить в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \tilde{R}(\bar{x}) + \tilde{Q}(\bar{x}),$$

где $\tilde{R}(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$, а $\tilde{Q}(\bar{x})$ будет построен в дальнейшем. Для натурального числа l положим

$$\tilde{S}_l = \left(\sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \theta} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

и обозначим

$$\tilde{m}_l = \left[2^n n^{|A|-1} 2^{-l} \tilde{S}_l^\theta \right] + 1,$$

где $[a]$ — целая часть числа a . Нетрудно убедиться, что количество гармоник K , которые образуют полином $P(\Omega_M, \bar{x})$, не превышает по порядку M . По свойству нормы

$$\begin{aligned} \|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau}^* &\leq \left\| f - \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n_0} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau}^* \\ &+ \|R^* - \tilde{Q}\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau} = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно теореме 2.1, неравенству Йенсена [9, лемма 3.3.3], лемме 2.1 при $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$ и учитывая $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j$, для $j = 1, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \left\{ \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) \tau^{(2)}} \left(\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right)^{\tau^{(2)}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^{\tau^{(2)}} \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\ll \left\{ \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j \tau^{(2)}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^{\tau^{(2)}} \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\quad \times \sup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \\ &\ll \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j \theta} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \times \sup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n_0} 2^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \end{aligned}$$

$$\leq C 2^{-n_0(r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})} \leq C 2^{-n(r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta} B$, в случае $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < \infty$.

Теперь учитывая определение числа n_0 и то, что функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} t^\varepsilon$ почти возрастают на $[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ отсюда получим

$$J_1 \ll (2^n n^{|A|-1})^{-(r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \quad (3.5)$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta} B$, в случае $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < \infty$.

Для оценки J_2 воспользуемся рассуждениями примененными в [19, с. 93]. Каждому натуральному числу l , $n \leq l < n_0$ сопоставим сумму

$$\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}). \quad (3.6)$$

Пусть $\alpha_i(f, l)$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{m}_l$, обозначают числа

$$\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^*$$

переставленные в убывающем порядке, для которых блоки $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$ входят в сумму (3.6). Сумму таким образом полученных «блоков» $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$ по всем $l \in [n, n_0)$ обозначим $\tilde{Q}(\bar{x})$. Через D_f обозначим множество тех векторов \bar{s} удовлетворяющих условию $n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n_0$ для которых «блоки» $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$ не попали $\tilde{Q}(\bar{x})$.

Так как функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}$ для $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям леммы 2.1, то учитывая, что $\gamma'_j = 1$ для $j \in A$ будем иметь

$$2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle (r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \gg 2^{l(r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})}$$

для \bar{s} , удовлетворяющих неравенству $\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq l$. Теперь пользуясь этим неравенством и учитывая, что $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}$ для $j = 1, \dots, m$ будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{S}_l &= \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \theta} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle (r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \theta \left(\prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \right)^\theta \right. \\ &\quad \times \left. \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq C 2^{l(r_{j_0 + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})} \\ &\quad \times \left(\sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

$$= C 2^{l(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})} \left[\sum_{k=1}^{\tilde{m}_l} \alpha_k^\theta(f, l) \right]^{\frac{1}{\theta}} \gg 2^{l(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})} j^{\frac{1}{\theta}} \alpha_i(f, l)$$

для $i = 1, 2, \dots, \tilde{m}_l$.

Таким образом

$$\alpha_i(f, l) \leq i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-l(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})} \tilde{S}_l$$

для $i = 1, 2, \dots, \tilde{m}_l$.

Далее пользуясь теоремой 2.1, предыдущим неравенством, определением чисел \tilde{S}_l , \tilde{m}_l получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \left\| \sum_{\bar{s} \in D_f} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau^{(2)}}^* \ll \left\{ \sum_{\bar{s} \in D_f} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau^{(2)}} \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &= C \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{j \geq \tilde{m}_l} \alpha_j^{\tau^{(2)}}(f, l) \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} 2^{-l(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})\tau^{(2)}} \left(\prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})} \right)^{\tau^{(2)}} \tilde{S}_l^{\tau^{(2)}} \sum_{j \geq \tilde{m}_l} j^{-\frac{\tau^{(2)}}{\theta}} \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\ll (2^n n^{|A|-1})^{\frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta}} \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} 2^{-l\tau^{(2)}(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}})} \left(\prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})} \right)^{\tau^{(2)}} \tilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$J_2 \ll (2^n n^{|A|-1})^{\frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta}} \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} 2^{-l\tau^{(2)}(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}})} \left(\prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})} \right)^{\tau^{(2)}} \tilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \quad (3.7)$$

в случае $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < \infty$.

Далее, рассмотрим два случая

- а) $r_{j_0} \geq \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$;
 б) $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$.

Введем обозначение

$$J_3 = \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} 2^{-l\tau^{(2)}(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}})} \left(\prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})} \right)^{\tau^{(2)}} \tilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}.$$

В случае а) по определению \tilde{S}_l и учитывая, что функции $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{-\varepsilon}$ почти убывают на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$, $j = 1, \dots, m$ имеем

$$J_3 \leq 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} \|f\|_{S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \tau^{(1)}, \theta}^{\tau^{(2)}}}^{\frac{\theta}{\tau^{(2)}}} B$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \tau^{(1)}, \theta}^{\tau^{(2)}} B$. Следовательно, из неравенства (3.7) получим

$$J_2 \ll 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}})} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} n^{(|A|-1)(\frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta})} \quad (3.8)$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$ в случае $r_{j_0} \geq \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$, $\theta < \tau^{(2)}$.

Рассмотрим случай б). По определению \tilde{S}_l и выбору чисел n_0 и в силу того, что $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}} < 0$, а функции $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^\varepsilon$ почти возрастают на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$, $j = 1, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} J_3 &\leq 2^{-n_0 \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})} \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \tilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\ll 2^{-n_0 \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})} \|f\|_{S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B}^{\frac{\theta}{\tau^{(2)}}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$.

Так как $n_0 = [n + (|A| - 1) \log n]$, то $2^{n_0} \leq 2^n n^{|A|-1} < 2^{n_0+1}$. Поэтому, из оценки (3.9) получим

$$J_3 \ll (2^n n^{|A|-1})^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$, в случае $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$, $\theta < \tau^{(2)}$.

Следовательно, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$ из (3.7) получим

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C (2^n n^{|A|-1})^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \\ &\asymp M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \end{aligned} \quad (3.10)$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$, в случае б), $\theta \leq \tau^{(2)}$.

Таким образом, из оценок (3.7), (3.8) и (3.10) заключаем, что

$$J_2 \leq C M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} (\log^{|A|-1} M)^{\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}} \right)_+} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \quad (3.11)$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$, в случае $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < \infty$ и $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0}$.

Теперь в силу оценок (3.5) и (3.11) из неравенства (3.4) получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \tau^{(2)}}^* \ll M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} (\log^{|A|-1} M)^{\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}} \right)_+} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

для любой функции $f \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{\tau}} B$, $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < \infty$, $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0}$. Напомним, что $y_+ = \max\{0, y\}$. Этим оценки сверху доказаны.

Теперь докажем оценки снизу. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и $2^n n^{m-1} \geq 4M$.

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \prod_{j=1}^m \frac{2^{-s_j \left(r_{j+1} - \frac{1}{p_j} \right)}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i \langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Пользуясь соотношением (см. [33])

$$\left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}}^* \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})} V_j^{(1)}(2^{-s_j}),$$

для $1 < p_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$ и леммой 2.2 получим

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} &= n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \\ &\times \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \prod_{j=1}^m \frac{2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\ll n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \|\{1\}_{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle = n}\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C_0. \end{aligned}$$

Таким образом, $f_0 \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B$.

Пусть Ω_M множество из M m -мерных векторов $\{\bar{k}^{(1)}, \dots, \bar{k}^{(M)}\}$ с целочисленными координатами. Для каждого вектора \bar{s} для которого $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$ рассмотрим множества $\Omega_M \cap \rho(\bar{s})$. Тогда в силу выбора числа n множество S векторов \bar{s} таких, что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$ и $|\Omega_M \cap \rho(\bar{s})| \leq \frac{1}{2}|\rho(\bar{s})|$, будет содержать по крайней мере половину всех \bar{s} таких, что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$ и следовательно $|S| \asymp n^{m-1}$.

Пусть $T(\bar{x})$ обозначает произвольный тригонометрический полином с номерами гармоник из Ω_M . Тогда по теореме 2.3 при $\beta_j = \lambda_j = 2$, $j = 1, \dots, m$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_0 - T\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}^* &\gg \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} V_j^{(2)}(2^{-s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f_0 - T)\|_2 \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}} \\ &\gg \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} V_j^{(2)}(2^{-s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f_0 - T)\|_2 \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}} \\ &\gg n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} V_j^{(2)}(2^{-s_j}) \prod_{j=1}^m \frac{2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \prod_{j=1}^m 2^{\frac{s_j}{2}} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}} \\ &\gg n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \left\| \left\{ 2^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}} \\ &= C n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Нетрудно убедиться, что если $v_j \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, то $1/v_j \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому согласно лемме 1 [36] имеем

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{1}{V_j(2^{-s_j})} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}} \ll \prod_{j=1}^m \frac{1}{V_j(2^{-n})} (n+1)^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}}, \tag{3.13}$$

где $\bar{\tau}' = (\tau'_1, \dots, \tau'_m)$, $\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j'} = 1$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$.

Применяя неравенство Гёльдера $\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} + \frac{1}{\tau_j^{(2)'}} = 1, j = 1, \dots, m\right)$ и в неравенстве (3.13) полагая $V_j(t) = \frac{V_j^{(2)}(t)}{V_j^{(1)}(t)}$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{\bar{s} \in S} 1 \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)'}} \\ &\leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \right\}_{\langle \bar{s}, \gamma \rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)'}} \\ &\ll n^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j^{(2)'}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}}. \end{aligned}$$

Так как $|S| \asymp n^{m-1}$, то отсюда получим

$$n^{m-1} \leq C(n+1)^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j^{(2)'}}} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(1)}(2^{-n})}{V_j^{(2)}(2^{-n})} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}}.$$

Следовательно

$$(n+1)^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j^{(2)'}}} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in S} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}}.$$

Поэтому из неравенства (3.12) получим

$$\|f_0 - T\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}(2)}^* \gg 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} (n+1)^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})}$$

для любого полинома $T(\bar{x})$ с номерами гармоник из Ω_M . Следовательно

$$\begin{aligned} e_M \left(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}(2)} &\gg 2^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} (n+1)^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})} \\ &\gg M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(m-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum_{j=2}^m \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Пусть $\tau_j^{(2)} < \theta_j$, $j = 1, \dots, m$. Так как $|A| \leq m$, $r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}} > 0$ и функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, то

$$\begin{aligned} \prod_{j \notin A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(m-|A|)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum_{j \notin A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)} \\ \gg \prod_{j \notin A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-1})}{V_j^{(1)}(2^{-1})} (\log 2)^{(m-|A|)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum_{j \notin A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

для натуральных чисел $M \geq 2$. Поэтому из неравенства (3.14) получим

$$e_M \left(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \gg M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \\ \times \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}$$

для натуральных чисел $M \geq 2$, в случае $\tau_j^{(2)} < \theta_j$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $r_{j_0} \geq \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$. Тогда учитывая, что функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$ и $|A| \leq m$ имеем (см. (3.13))

$$\prod_{j=1}^m \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(m-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum_{j=2}^m \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)} \\ \gg \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta}\right)}$$
(3.16)

для натуральных чисел $M \geq 2$.

Теперь из неравенств (3.14) и (3.16) следует, что

$$e_M \left(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \gg M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta}\right)}$$

для натуральных чисел $M \geq 2$, в случае $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $r_{j_0} \geq \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$.

Пусть $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m \frac{2^{-s_j^0(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s}^0)} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

где $\bar{s}^0 = (s_1^0, \dots, s_m^0)$, $s_j^0 = s_j$ если $j \in A$ и $s_j^0 = 0$ если $j \notin A$. Нетрудно убедиться, что функция $f_1 \in S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{r}} B$.

Пусть Ω_M множество из M m -мерных векторов $\{\bar{k}^{(1)}, \dots, \bar{k}^{(M)}\}$ с целочисленными координатами. Существует $\bar{s}^0 \in \mathbb{Z}_+^m$, такой, что $|\rho(\bar{s}^0)| \asymp M$ и $|\rho(\bar{s}^0)| \geq 2M$. Тогда $|\rho(\bar{s}^0) \cap \Omega| \leq \frac{|\rho(\bar{s}^0)|}{2}$.

Пусть $T(\bar{x})$ обозначает произвольный тригонометрический полином с номерами гармоник из Ω_M . Тогда по теореме 2.3 при $\beta_j = \lambda_j = 2$, $j = 1, \dots, m$ будем иметь

$$\|f_0 - T\|_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}}^* \gg \prod_{j=1}^m 2^{s_j^0(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})} V_j^{(2)}(2^{-s_j^0}) \|\delta_{\bar{s}^0}(f_0 - T)\|_2 \\ = C \prod_{j=1}^m 2^{s_j^0(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})} V_j^{(2)}(2^{-s_j^0}) \prod_{j=1}^m \frac{2^{-s_j^0(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})} (|\rho(\bar{s}^0)| - M)^{1/2} \\ \gg \prod_{j=1}^m 2^{-s_j^0(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j^0})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})} \gg M^{-\left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}.$$

□

Следствие 3.1. Пусть числа $q_j, p_j, \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}, r_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1 и функции

$$v_j^{(1)}(t) = (1 + \log t)^{a_j} (1 + \log(1 + \log t))^{b_j},$$

$$v_j^{(1)}(t) = (1 + \log t)^{a_j} (1 + \log(1 + \log t))^{c_j}, \quad a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}, \quad c_j > b_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

1. Если $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$e_M(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \asymp M^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \left(1 + \log(1 + \log M)\right)^{c_j - b_j} \\ \times (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})}.$$

2. Если $1 \leq \theta \leq \tau^{(2)} < +\infty$, то

$$e_M(S_{\bar{p}, \bar{V}^{(1)}, \bar{\tau}^{(1)}, \theta}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{V}^{(2)}, \bar{\tau}^{(2)}} \asymp M^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j \in A} \left(1 + \log(1 + \log M)\right)^{c_j - b_j} \\ \times (\log M)^{((|A|-1)(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}) + \frac{1}{\tau^{(2)}} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Доказательство. Известно (см., например, [6]), что функции

$$v_j^{(1)}(t) = (1 + \log t)^{a_j} (1 + \log(1 + \log t))^{b_j}, \quad v_j^{(1)}(t) = (1 + \log t)^{a_j} (1 + \log(1 + \log t))^{c_j},$$

принадлежат классу $SV[1, \infty)$ для $j = 1, \dots, m$ и их отношение

$$v_j^{(2)}(t)/v_j^{(1)}(t) = (1 + \log(1 + \log t))^{c_j - b_j}$$

возрастает, а $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$, $\varepsilon > 0$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому утверждения следствия верны согласно теореме 3.1. \square

Замечание 3.1. В случае $V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1$, $t \in (0, 1]$ и $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$ для $j = 1, \dots, m$ и $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ теорема 3.1 совпадает с ранее известными результатами В.Н. Темлякова [19, теорема 2.2, с. 92] и А.С. Романюка [22, теорема 3.1] для пространств Лебега и в общем случае распространяют их на анизотропные пространства Лоренца–Караматы. Для $V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$ и $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ теоремы 3.1 совпадают с результатами [28, теорема 3] и [34, теорема 5].

Автор благодарен Рецензентам за замечания способствовавшие лучшему изложению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. *Интерполяция линейных операторов*. М.: Наука. 1978.
2. А.Р. Blozinski. *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms* // Trans. Amer. Math. Soc. **263**, 146–167 (1981).
3. А.А. Яценко. *Итеративные перестановки функций и пространства Лоренца* // Изв. вузов. Матем. **5**, 73–77 (1998).
4. V.I. Kolyada. *On embedding theorems* // Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic. Publisher: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praha, 35–94 (2007).
5. Н.К. Бари, С.Б. Стечкин. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Труды Моск. матем. общества. **5**, 483–522 (1956).

6. D.E. Edmunds, W.D. Evans. *Hardy operators, function spaces and embedding*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2004.
7. Е. Сенет. *Правильно меняющиеся функции*. М.: Наука. 1985.
8. И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*. М.: Мир. 1974.
9. С.М. Никольский. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. М.: Наука. 1977.
10. П.И. Лизоркин, С.М. Никольский. *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Труды математического института АН СССР. **187**, 143–161 (1989).
11. Т.И. Аманов. *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*. Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.
12. Р.С. Исмагилов. *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // Усп. матем. наук. **29**:3, 161–178 (1974).
13. Э.С. Белинский. *Приближение периодических функций с «плавающей» системой экспонент и тригонометрические поперечники* // В сб. «Исследования по теории функций многих вещественных переменных», Ярославль, 10–24 (1984).
14. Э.С. Белинский. *Приближение «плавающей» системой экспонент на классах гладких периодических функций* // Матем. сб. **132**:1, 20–27 (1987).
15. Э.С. Белинский. *Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной* // В сб. «Исследования по теории функций многих вещественных переменных», Ярославль, 16–33 (1988).
16. Y. Makovoz. *On trigonometric n -widths and their generalization* // J. Approx. Theory. **41**:4, 361–366 (1984).
17. В.Е. Майоров. *Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q* // Мат. замет. **40**:2, 161–173 (1986).
18. R.A. DeVore. *Nonlinear approximation* // Acta Numerica. **7**, 51–150 (1998).
19. В.Н. Темляков. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Труды математического института АН СССР. **178**, 1–112 (1986).
20. В.Н. Темляков. *Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости* // Матем. сб. **206**:11, 131–1160 (2015).
21. V.N. Temlyakov. *Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness* // Constr. Approx. **45**:3, 467–495 (2017).
22. А.С. Романюк. *Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных* // Изв. РАН, сер. мат. **67**:2, 61–100 (2003).
23. M. Hansen, W. Sickel. *Best m -term approximation and Lizorkin–Triebel spaces* // J. Approx. Theory. **163**, 923–954 (2011).
24. S.A. Stasyuk. *Best m -term trigonometric approximation for the classes $B_{p,\theta}^r$ of functions of low smoothness* // Ukr. Math. Jour. **62**:1, 114–122 (2010).
25. D.B. Bazarkhanov, V.N. Temlyakov. *Nonlinear tensor product approximation of functions* // J. Complexity. **31**:6, 867–884 (2015).
26. Д.Б. Базарханов. *Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных* // Труды математического института РАН. **293**, 8–42 (2016).
27. Dũng Dinh, V.N. Temlyakov, T. Ullrich. *Hyperbolic Cross Approximation*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser/Springer, Basel/Berlin. 2018.
28. Г. Акишев. *О порядках M -членного приближения классов периодических функций* // Матем. жур. **6**:4, 5–14 (2006).
29. Г. Акишев. *О порядках M -членного приближения классов функций в пространстве Лебега со смешанной нормой* // Матем. жур. **7**:1, 5–14 (2007).
30. Г. Акишев. *О точности оценок наилучшего M -членного приближения класса Бесова* // Сиб. электрон. матем. изв. **7**, 255–274 (2010).
31. Г. Акишев. *О порядках M -членного приближения классов в пространстве Лоренца* // Матем. жур. **11**:1, 5–29 (2011).

32. Г. Акишев. *Тригонометрические поперечники классов Никольского–Бесова в пространстве Лебега со смешанной нормой* // Укр. мат. журн. **66**:6, 723–732 (2014).
33. G. Akishev. *On M -term approximations of the Nikol'skii-Besov class* // Hacet. J. Math. Stat. **45**:2, 297–310 (2016).
34. G. Akishev. *Estimations of the best M -term approximations of functions in the Lorentz space with constructive methods* // Bull. Karaganda Univer. Math. ser. **3**, 13–26 (2017).
35. G. Akishev. *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space* // Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
36. G. Akishev. *On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz-Zygmund space* // Preprint: arXiv: 2106.07188v2 (2021).
37. G. Akishev. *On estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz - Karamata space* // Preprint: arXiv: 2106.1276v2 (2021).

Габдолла Акишевич Акишев,
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова,
ул. Кажымукана, 11,
100008, г. Астана, Казахстан
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru