

УДК 517.547.2

ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ РОДА НУЛЬ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОРНЯМИ ЧЕРЕЗ СТЕПЕНЬ МАКСИМУМА МОДУЛЯ В ЧАСТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

А.Ю. ПОПОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Рассматриваются целые функции нулевого рода, корни которых расположены на одном луче. Выводятся близкие к оптимальным на классе всех таких функций оценки снизу минимума модуля на последовательности окружностей через отрицательную степень максимума модуля на тех же окружностях при ограничении на отношение $a > 1$ радиусов соседних окружностей. Введено понятие оптимального показателя $d(a)$ как экстремальной степени максимума модуля в этой задаче. Для оптимального показателя доказаны двусторонние оценки при «тестовом» значении $a = 9/4$ и при $a \in (1, 9/8]$. Найдена асимптотика $d(a)$ при $a \rightarrow 1$. Полученные результаты принципиально отличаются от классической $\cos(\pi\rho)$ -теоремы, не содержащей ограничений на частоту радиусов окружностей, на которых минимум модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ оценивается через степень ее максимума модуля.

Ключевые слова: целая функция, минимум модуля, максимум модуля.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D20

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним классическую $\cos(\pi\rho)$ -теорему об оценке снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ на некоторой стремящейся к бесконечности последовательности окружностей. Как обычно, обозначим

$$M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|,$$

где f — целая функция.

Пусть f — отличная от тождественной константы целая функция порядка $\rho \in [0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел $r_n \rightarrow +\infty$, что выполняется неравенство

$$m(f; r_n) > (M(f; r_n))^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon}. \quad (1.1)$$

Для значений $\rho \in [0, 1)$ этот результат получен независимо Валироном [1] и Виманом [2], а в случае $\rho = 1$ доказан Картрайт в [3] (см. также фундаментальную работу Хеймана [4]).

A.Yu. Popov, V.B. Sherstyukov, LOWER BOUND FOR MINIMUM MODULUS OF ENTIRE FUNCTION OF GENUS ZERO WITH POSITIVE ROOTS IN TERMS OF DEGREE OF MAXIMUM MODULUS AT FREQUENT SEQUENCE OF POINTS.

© Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. 2022.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Поступила 27 мая 2022 г.

Добавим, что в [3], [4] рассмотрен вопрос об обширности множества $E \subset \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ такого, что

$$m(f; r) > (M(f; r))^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon}, \quad r \in E.$$

Доказано существование у E положительной логарифмической плотности, но это не исключает наличия у этого множества обширных лагун, т.е. существования последовательности $R_n \rightarrow +\infty$ и числа $p > 1$ таких, что отрезки $[R_n, R_n^p]$ лежат в $\mathbb{R}_+ \setminus E$.

Упомянутые результаты называют теоремами типа Валирона-Вимана (за дополнительными подробностями отсылаем к монографиям [5, гл. 3], [6, гл. V, §3], [7, гл. 6] и обзорам [8], [9]).

Поставим задачу о возможности степенной оценки

$$m(f; r_n) > M^{-d}(f; r_n) \tag{1.2}$$

с каким-либо показателем $d > 0$ на некоторой последовательности $r_n \rightarrow +\infty$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} < +\infty. \tag{1.3}$$

Разумеется, речь идет только о целых функциях f конечного порядка. В [4] имеется пример целой функции F бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(F; r)}{\ln M(F; r)} = -\infty.$$

Однако для произвольных непостоянных целых функций f даже нулевого порядка ответ на вопрос о наличии такой последовательности $\{r_n\}$, чтобы выполнялись соотношения (1.2) и (1.3) (хотя бы при каком-нибудь значении d), нам не известен. Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая: функция f является каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на одном луче (для определенности положительными). А именно, рассмотрим всевозможные функции вида

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \tag{1.4}$$

где $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{1.5}$$

Как известно [5, гл. 2], любая целая функция порядка, меньшего 1, отличная от многочлена, получается умножением бесконечного произведения вида (1.4) с произвольными комплексными корнями, ряд из обратных величин модулей которых сходится, на az^m , где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Условие же принадлежности всех корней одному лучу (у нас \mathbb{R}_+) является весьма сильным ограничением. Для всех функций (1.4), корни которых удовлетворяют условию (1.5), справедливы тождества

$$m(f; r) = |f(r)|, \quad M(f; r) = f(-r), \quad r > 0. \tag{1.6}$$

Но даже для такого узкого подкласса целых функций нам известны только два результата по сформулированной выше задаче. Первый из них был получен А.М. Гайсиным [10] для четных канонических произведений

$$L(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\mu_n^2}\right) \tag{1.7}$$

с действительными корнями $\{\pm\mu_n\}$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-2}$. Гайсин доказал, что для любой функции вида (1.7) существует возрастающая последовательность $R_n \rightarrow +\infty$, удовлетворяющая условию $R_{n+1} \leq 4R_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), и такая, что верна оценка $m(L; R_n) > M^{-20}(L; R_n)$.

Эта теорема была усилена в [11] (см. также [12]): доказано, что для любой функции (1.4) с корнями, удовлетворяющими условию (1.5), существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что выполняются ограничение $r_{n+1} \leq 3r_n + 1$ и оценка $m(f; r_n) > M^{-9}(f; r_n)$. Нетрудно убедиться в том, что если взять произвольную функцию L вида (1.7), положить $\lambda_n = \mu_n^2$, то после применения сформулированного результата из [11] к функции

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

учитывая очевидное тождество $f(w^2) = L(w)$, получим существование последовательности $R_n = \sqrt{r_n} \uparrow +\infty$ такой, что верны ограничение $R_{n+1} \leq \sqrt{3}R_n + 1$ и оценка $m(L; R_n) > M^{-9}(L; R_n)$.

В то же время, цитированный результат работы [11] был выведен из доказанной там же теоремы об оценке снизу $\max_{qr \leq x \leq r} m(f; x)$ через отрицательную степень $M(f; Ar)$ (число $A > 1$ зависит от значения параметра $q \in (0, 1)$ и показателя степени максимума модуля), справедливой для произвольной непостоянной целой функции f . Специфика произведений (1.4) с положительными корнями использовалась только при выводе асимптотической оценки $M(f; Ar) = o(M^A(f; r))$, $r \rightarrow +\infty$, $A > 1$, позволяющей максимум модуля функции f на большей окружности оценить через степень максимума модуля на меньшей окружности. Поэтому естественно ожидать, что для произведений нулевого рода с корнями на одном луче можно получить более сильный результат. Нами доказана (см. §3) следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть f — произвольная функция вида (1.4), корни которой подчинены условию (1.5). Тогда для любого $R > 0$ найдется точка $r \in (R, 9R/4)$, в которой выполняется неравенство

$$m(f; r) > M^{-3}(f; r). \quad (1.8)$$

Более того, произведение

$$\Pi(t) \equiv m(f; t)M^3(f; t)$$

превосходит 1 «в среднем» на каждом отрезке $[R, 9R/4]$ в том смысле, что

$$\int_R^{9R/4} t^{-3} \ln \Pi(t) dt > 0 \quad \forall R > 0. \quad (1.9)$$

Следствие 1.1. Пусть L — произвольная функция вида (1.7) с действительными корнями $\{\pm\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда для любого $R > 0$ существует точка $r \in (R, 3R/2)$, в которой выполняется неравенство

$$|L(r)| = m(L; r) > M^{-3}(L; r) = L^{-3}(ir).$$

Невозможность значительного усиления неравенства (1.8), а именно, замены показателя степени максимума модуля в (1.8) на -2 , показывает такой результат (доказанный в §2).

Теорема 1.2. Для любого значения $\rho \in (0, 1)$ и произвольной «быстро» стремящейся к $+\infty$ последовательности положительных чисел $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (т.е. такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n/R_{n+1}) = 0$) существует целая функция F порядка ρ , являющаяся каноническим

произведением нулевого рода с положительными корнями, для которой справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ m(F; r) M^2(F; r) \mid R_n \leq r \leq 9R_n/4 \right\} = 0.$$

Теоремы 1.1 и 1.2 демонстрируют существенное различие между задачами получения оценки снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ через степень максимума ее модуля на уходящей в бесконечность последовательности окружностей без ограничения на частоту их радиусов (или со слабым условием ограниченности отношения логарифмов соседних радиусов) и при требовании наличия соответствующей оценки на любом отрезке с постоянным отношением его концов. В первом случае, как видно из $\cos(\pi\rho)$ -теоремы, именно порядок функции определяет наилучший показатель степени максимума модуля в оценке (1.1). Во втором случае, когда требуется получить степенную оценку $m(f; r)$ через $M(f; r)$ в некоторой подходящей точке отрезка $R \leq r \leq aR$ (в теоремах 1.1, 1.2 рассматривается значение $a = 9/4$), порядок функции f , возможно, играет какую-то роль (нам ее не удалось выявить), но не определяющую: наилучший показатель d в оценке (1.2), как мы установили, лежит между числами 2 и 3.

Дадим строгое определение оптимального показателя в степенной оценке (1.2) на классе произведений (1.4) с условиями на корни (1.5), когда отношение r_{n+1}/r_n ограничено сверху заданным числом. Предварительно необходимо сформулировать один результат.

В §2 будет доказана следующая теорема. Для произвольного $a > 1$ обозначим

$$s(a) = \frac{\ln \frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)}. \quad (1.10)$$

Заметим, что $s(a) > 1$ при всех $a > 1$.

Теорема 1.3. Для любого $\rho \in (0, 1)$ и любой числовой последовательности $R_n \rightarrow +\infty$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n/R_{n+1}) = 0$ существует целая функция f порядка ρ , являющаяся каноническим произведением (1.4) с условием на корни (1.5), для которой справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq aR_n} (m(f; r) M^{s(a)}(f; r)) = 0$$

при показателе $s(a)$, заданном формулой (1.10).

Определение 1.1. Оптимальным показателем $d(a)$ назовем точную верхнюю грань таких значений s , для которых верно утверждение, аналогичное теореме 1.3, а именно, существуют каноническое произведение f вида (1.4), (1.5) и последовательность $R_n \rightarrow +\infty$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq aR_n} (m(f; r) M^s(f; r)) = 0.$$

Из данного определения следует, что если взять произвольный показатель степени $d > d(a)$, то для любого канонического произведения f вида (1.4), (1.5) величина

$$\max_{R \leq r \leq aR} (m(f; r) M^d(f; r)) \quad (1.11)$$

при всех достаточно больших R отделена от нуля. За счет произвольности $d > d(a)$ в этом утверждении автоматически получается, что максимум в (1.11) стремится к $+\infty$ при $R \rightarrow +\infty$, если f отлична от тождественной константы.

Теоремы 1.1, 1.2 показывают, что справедливо двойное неравенство

$$2 \leq d \left(\frac{9}{4} \right) \leq 3 \quad (1.12)$$

(как выяснится позже, со строгими знаками), а из теоремы 1.3 следует оценка снизу

$$d(a) \geq s(a) = \frac{\ln \frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)} > 1 \quad (1.13)$$

при любом $a \in (1, +\infty)$.

Мы нашли асимптотику

$$d(a) = \frac{\ln \frac{1}{a-1}}{\ln 2} + O(1) = \log_2 \frac{1}{a-1} + O(1), \quad a \rightarrow 1+. \quad (1.14)$$

Более детальный результат дает следующая теорема (см. §3).

Теорема 1.4. При любом $a \in (1, 9/8]$ справедливо двойное неравенство

$$\log_2 \frac{1}{a-1} < d(a) < \log_2 \frac{1}{a-1} + \frac{7}{2}, \quad (1.15)$$

влекущее асимптотику (1.14).

2. ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СНИЗУ

Займемся построением канонических произведений нулевого рода, для которых существует такая уходящая в бесконечность последовательность отрезков действительной оси с постоянным отношением концов, что на каждой окружности в комплексной плоскости радиуса, принадлежащего упомянутой системе отрезков, минимум модуля произведений меньше некоторой фиксированной отрицательной степени максимума модуля.

Используем одно простое утверждение. Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, столь быстро стремящаяся к $+\infty$, что выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n/A_{n+1}) = 0$. Тогда справедливы следующие асимптотические оценки

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_j = o(A_n), \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j^{-1} = o(A_n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Пусть P — многочлен, $\deg P = p$, все корни которого x_1, \dots, x_p действительны и положительны, но не обязательно различны. Предположив, что $P(0) = 1$, запишем многочлен P в виде произведения

$$P(z) = \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{z}{x_k}\right). \quad (2.2)$$

Лемма 2.1. Пусть $a > 1$, $d > 0$ и выполняется неравенство

$$\mu \equiv \max_{1 \leq x \leq a} (|P(x)| P^d(-x)) < 1, \quad (2.3)$$

а $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая и столь быстро стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{R_{n+1}} = 0. \quad (2.4)$$

Тогда для любого $\rho \in (0, 1)$ существует целая функция F нормального типа при порядке ρ , являющаяся каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{m(F; r) M^d(F; r) \mid R_n \leq r \leq a R_n\} = 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Возьмем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел ν_n , для которой верно порядковое соотношение

$$\nu_n \asymp R_n^\rho, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Из (2.4), (2.6) видно, что $\{\nu_n\}$, как и $\{R_n\}$, очень быстро стремится к бесконечности и сильно лакунарна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} = 0. \quad (2.7)$$

Нетрудно проверить, что по теореме Линделефа (см., например, [5, гл. 2, §2.9]) в силу (2.6) бесконечное произведение

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} P^{\nu_n} \left(\frac{z}{R_n} \right) \quad (2.8)$$

является целой функцией нормального типа при порядке ρ и все ее корни лежат на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, причем $F(0) = 1$. Другими словами, функция F является каноническим произведением нулевого рода:

$$F(z) = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - \xi_l z), \quad \xi_l > 0, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l < +\infty. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следуют равенства

$$m(F; r) = |F(r)|, \quad M(F; r) = F(-r), \quad r > 0, \quad (2.10)$$

и аналогичные равенства

$$m(P; r) = |P(r)|, \quad M(P; r) = P(-r), \quad r > 0, \quad (2.11)$$

верны для многочлена (2.2). Формулы (2.8), (2.10), (2.11) показывают, что максимизируемая в (2.5) функция $m(F; r)M^d(F; r)$ разлагается в следующее произведение

$$m(F; r)M^d(F; r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left| P^{\nu_n} \left(\frac{r}{R_n} \right) \right| P^{d\nu_n} \left(-\frac{r}{R_n} \right), \quad r > 0.$$

Отсюда заключаем, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_n &\equiv \max_{R_n \leq r \leq aR_n} (m(F; r)M^d(F; r)) \\ &= \max_{1 \leq x \leq a} \prod_{j=1}^{\infty} \left| P^{\nu_j} \left(\frac{xR_n}{R_j} \right) \right| P^{d\nu_j} \left(-\frac{xR_n}{R_j} \right) \leq \gamma_{n,1} \gamma_{n,2} \gamma_{n,3}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\gamma_{1,1} \equiv 1$,

$$\gamma_{n,1} \equiv \max_{1 \leq x \leq a} \prod_{j=1}^{n-1} \left| P^{\nu_j} \left(\frac{xR_n}{R_j} \right) \right| P^{d\nu_j} \left(-\frac{xR_n}{R_j} \right) \leq \tilde{\gamma}_{n,1} \equiv \prod_{j=1}^{n-1} P^{(1+d)\nu_j} \left(-\frac{aR_n}{R_j} \right), \quad n \geq 2, \quad (2.13)$$

$$\gamma_{n,2} \equiv \max_{1 \leq x \leq a} |P^{\nu_n}(x)| P^{d\nu_n}(-x) = \max_{1 \leq x \leq a} (|P(x)| P^d(-x))^{\nu_n}, \quad (2.14)$$

$$\gamma_{n,3} \equiv \max_{1 \leq x \leq a} \prod_{j=n+1}^{\infty} \left| P^{\nu_j} \left(\frac{xR_n}{R_j} \right) \right| P^{d\nu_j} \left(-\frac{xR_n}{R_j} \right) \leq \tilde{\gamma}_{n,3} \equiv \prod_{j=n+1}^{\infty} P^{(1+d)\nu_j} \left(-\frac{aR_n}{R_j} \right). \quad (2.15)$$

Ввиду (2.13), (2.14) верно равенство

$$\gamma_{n,2} = \mu^{\nu_n}. \quad (2.16)$$

Требуется доказать стремление к нулю последовательности γ_n . Из (2.12)–(2.16) видно, что для этого достаточно вывести асимптотические оценки

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,1} = o(\nu_n), \quad \ln \tilde{\gamma}_{n,3} = o(\nu_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

В (2.17) требуют доказательства лишь оценки сверху, поскольку величины $\ln \tilde{\gamma}_{n,1}$, $\ln \tilde{\gamma}_{n,3}$ положительны: неравенства $\tilde{\gamma}_{n,1} > 1$, $\tilde{\gamma}_{n,3} > 1$ сразу же следуют из того, что $P(-t) > 1$ при любом $t > 0$ согласно (2.2).

Неравенство $\ln(1+u) < u$ для $u > 0$ позволяет вывести из (2.2) оценку

$$\ln P(-t) < ct, \quad t > 0, \quad \text{где } c = \sum_{k=1}^p x_k^{-1}. \quad (2.18)$$

Из (2.18), (2.15), (2.6) находим

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,3} \leq O\left(R_n \sum_{j=n+1}^{\infty} \nu_j R_j^{-1}\right) = O\left(R_n \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j^{\rho-1}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Последовательность $A_n \equiv R_n^{1-\rho}$ ввиду ограничения (2.4) является сильно лакунарной, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n/A_{n+1}) = 0$. Поэтому согласно (2.1) имеем

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} R_j^{\rho-1} = o(R_n^{\rho-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Из (2.19), (2.20), (2.6) выводим требуемую оценку сверху:

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,3} \leq o(R_n \cdot R_n^{\rho-1}) = o(R_n^{\rho}) = o(\nu_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Считая корни многочлена P расположенными в порядке неубывания, помимо оценки (2.18), которая хороша при «малых» значениях t , имеем другую оценку

$$P(-t) \leq \left(\frac{2t}{x_1}\right)^p, \quad t \geq x_1,$$

пригодную при «больших» t . Следовательно,

$$\ln P(-t) < 2p \ln t, \quad t > x_1 + \frac{2}{x_1}.$$

Отсюда и из (2.13) при всех достаточно больших n находим

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,1} \leq O\left(\sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \ln\left(\frac{aR_n}{R_j}\right)\right).$$

В силу порядкового соотношения (2.6) имеем

$$\ln\left(\frac{R_n}{R_j}\right) = \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right) + O(1) = O\left(\ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right)\right), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Тем самым,

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,1} \leq O\left(\sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right)\right).$$

Отсюда видно, что для вывода первой асимптотической оценки (2.17) осталось доказать стремление к нулю суммы

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\nu_j}{\nu_n} \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right) < \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_j}{\nu_n}\right)^{1/2}.$$

Требуемое сразу же следует из (2.1), поскольку последовательность $A_n \equiv \nu_n^{1/2}$ ввиду (2.4) и (2.6) удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n/A_{n+1}) = 0$. Асимптотические оценки (2.17) получены, и доказательство леммы завершено. \square

Лемма 2.1 показывает, что для доказательства теоремы 1.3 достаточно для любого $a > 1$ предъявить такой многочлен P_a с положительными корнями и значением $P_a(0) = 1$, что

$$\max_{1 \leq x \leq a} \left(|P_a(x)| (P_a(-x))^{s(a)} \right) < 1. \quad (2.21)$$

Если взять $P_a(z) = 1 - z/a$, то окажется, что максимум в левой части (2.21) в точности равен 1. Покажем, что соотношение (2.21) будет выполнено для многочленов $P_a(z) = 1 - z/c$ при выборе

$$c = c(a) = a \left(1 + 2^{-s(a)-1/2} \right)^{-1}, \quad a > 1. \quad (2.22)$$

Предварительно дадим общее представление о поведении величины $s(a)$ из (1.10).

Лемма 2.2. *Функция $s(a)$ убывает на луче $1 < a < +\infty$. Кроме того,*

$$\lim_{a \rightarrow 1^+} s(a) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} s(a) = 1, \quad (2.23)$$

$$\max \left\{ 1, \log_2 \frac{1}{a-1} \right\} < s(a) < \frac{a+1}{a-1}, \quad a > 1. \quad (2.24)$$

Доказательство. Прямой подсчет, основанный на формуле

$$s(a) = \frac{\ln a - \ln(a-1)}{\ln(a+1) - \ln a}, \quad a > 1,$$

приводит к следующим соотношениям

$$s'(a)a(a^2-1)\ln^2(1+1/a) = \psi(a) - \psi(a+1), \quad (2.25)$$

$$s'(a)a(a^2-1)\ln(1+1/a) = s(a)(a-1) - (a+1). \quad (2.26)$$

Здесь

$$\psi(a) \equiv a \ln a - (a-1) \ln(a-1), \quad a > 1. \quad (2.27)$$

Так как вспомогательная функция (2.27) возрастает при $a > 1$, то для всех таких a в силу (2.25) имеем $s'(a) < 0$. Поэтому функция $s(a)$ убывает на луче $1 < a < +\infty$. Обращаясь затем к тождеству (2.26) и учитывая, что его левая часть отрицательна при $a > 1$, получим правую часть (2.24). Выведем левую часть неравенства (2.24). Простейшая оценка $s(a) > 1$ отмечена в §1. В дополнение к ней из определения (1.10) сразу следует, что

$$s(a) \equiv \frac{\ln \frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)} > \frac{\ln \frac{1}{a-1}}{\ln 2} = \log_2 \frac{1}{a-1}, \quad a > 1.$$

Это завершает доказательство двусторонней оценки (2.24). Наконец, оба предельных соотношения (2.23) легко извлекаются как из исходной формулы (1.10), так и из (2.24). Все утверждения леммы обоснованы. \square

Перейдем к доказательству теоремы 1.3. Для произвольного $a > 1$ определим величину $c = c(a)$ по правилу (2.22) и построим двучлен $P_a(z) = 1 - z/c$. Сначала проверим, что

$$1 < c \equiv a \left(1 + 2^{-s(a)-1/2} \right)^{-1} < a. \quad (2.28)$$

Неравенство $c < a$ очевидно. Неравенство $c > 1$ перепишем в эквивалентном виде

$$2^{-s(a)-1/2} < a-1 \Leftrightarrow s(a) > -\frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{a-1},$$

что верно ввиду (2.24).

Убедимся в том, что функция

$$h(x) \equiv |P_a(x)| (P_a(-x))^{s(a)} = \left| 1 - \frac{x}{c} \right| \left(1 + \frac{x}{c} \right)^{s(a)}$$

убывает на отрезке $1 \leq x \leq c$ и возрастает на отрезке $c \leq x \leq a$. Действительно, для $x \in [1, c)$ имеем

$$\ln h(x) = \ln \left(1 - \frac{x}{c}\right) + s(a) \ln \left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

откуда

$$h'(x) = h(x) \left(\frac{s(a)}{c+x} - \frac{1}{c-x} \right) = \frac{h(x)}{c^2 - x^2} (c(s(a) - 1) - (s(a) + 1)x).$$

Поскольку

$$c(s(a) - 1) - (s(a) + 1)x < a(s(a) - 1) - (s(a) + 1) = (a - 1)s(a) - (a + 1) < 0$$

ввиду (2.28), (2.24), то $h'(x) < 0$ при $1 \leq x < c$, и функция $h(x)$ убывает на отрезке $1 \leq x \leq c$. Возрастание функции $h(x)$ на отрезке $c \leq x \leq a$ очевидно, поскольку здесь она принимает вид

$$h(x) = \left(\frac{x}{c} - 1\right) \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{s(a)},$$

являясь произведением двух положительных и возрастающих при $x \in (c, a]$ функций.

Как видим,

$$\max_{1 \leq x \leq a} h(x) = \max \{h(1), h(a)\}. \quad (2.29)$$

Осталось показать, что максимум (2.29) меньше, чем 1. Во-первых,

$$h(1) = \left(1 - \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{s(a)} < 1.$$

В самом деле, неравенство $h(1) < 1$ равносильно такому:

$$\ln \left(1 - \frac{1}{c}\right) + s(a) \ln \left(1 + \frac{1}{c}\right) < 0,$$

или, что то же самое,

$$s(a) < \frac{\ln \frac{1}{1-1/c}}{\ln(1+1/c)} \equiv s(c).$$

Но неравенство $s(a) < s(c)$ справедливо, ибо $a > c > 1$, и по лемме 2.2 функция (1.10) убывает на луче $(1, +\infty)$. Во-вторых, с учетом (2.22), запишем

$$h(a) = \left(\frac{a}{c} - 1\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)^{s(a)} = 2^{-s(a)-1/2} (2 + 2^{-s(a)-1/2})^{s(a)} = 2^{-1/2} (1 + 2^{-s(a)-3/2})^{s(a)}.$$

Последовательно воспользуемся элементарными оценками:

$$1 + u < e^u \quad \text{при} \quad u = 2^{-s(a)-3/2} > 0 \quad \text{и} \quad v2^{-v} \leq 1/(e \ln 2) \quad \text{при} \quad v = s(a) > 1.$$

В результате получим, что

$$h(a) < 2^{-1/2} \exp(s(a)2^{-s(a)-3/2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{8e \ln 2}}\right) < 0.86.$$

Таким образом, из (2.29) при любом $a > 1$ для двучлена $P_a(z) = 1 - z/c(a)$ имеем

$$\max_{1 \leq x \leq a} \left(|P_a(x)| (P_a(-x))^{s(a)} \right) = \max_{1 \leq x \leq a} h(x) = \max \{h(1), h(a)\} < 1,$$

если выбрать коэффициент $c(a)$ по правилу (2.22), а показатель $s(a)$ — по правилу (1.10). Другими словами, справедливо соотношение (2.21). Применяя лемму 2.1, завершим доказательство теоремы 1.3.

Приступим к доказательству теоремы 1.2. Покажем, что если взять

$$P(z) = \left(1 - \frac{8}{11}z\right) \left(1 - \frac{7}{15}z\right),$$

то выполняется неравенство

$$\max_{1 \leq x \leq 9/4} \{|P(x)| (P(-x))^{2.04}\} < 0.996. \quad (2.30)$$

Согласно лемме 2.1 это влечет за собой справедливость теоремы 1.2 в усиленном варианте. А именно, нижняя оценка в (1.12) уточняется: $2.04 < d(9/4)$. Попутно отметим, что вытекающая из теоремы 1.3 оценка (1.13) при $a = 9/4$ дает

$$d(9/4) \geq s(9/4) = \frac{\ln(9/5)}{\ln(13/9)} = 1.59\dots,$$

но этого недостаточно для нашей ближайшей цели.

Оценим сверху максимумы функции

$$H(x) \equiv |P(x)|P^2(-x) = \left|1 - \frac{8}{11}x\right| \left|1 - \frac{7}{15}x\right| \left(1 + \frac{8}{11}x\right)^2 \left(1 + \frac{7}{15}x\right)^2$$

на отрезках $[1, 11/8]$ и $[11/8, 9/4]$. Сначала докажем убывание функции H на отрезке $[1, 11/8]$. Это вместе с соотношениями

$$H(1) = \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{15} \left(\frac{19}{11} \cdot \frac{22}{15}\right)^2 = \frac{8}{55} \left(\frac{38}{15}\right)^2 < 0.94$$

даст оценку

$$\max \left\{ H(x) \mid 1 \leq x \leq \frac{11}{8} \right\} = H(1) < 0.94. \quad (2.31)$$

При $x \in [1, 11/8]$ имеем

$$l(x) \equiv \ln H(x) = \ln \left(1 - \frac{8x}{11}\right) + \ln \left(1 - \frac{7x}{15}\right) + 2 \ln \left(1 + \frac{8x}{11}\right) + 2 \ln \left(1 + \frac{7x}{15}\right),$$

$$l'(x) = \frac{14}{15 + 7x} + \frac{16}{11 + 8x} - \frac{8}{11 - 8x} - \frac{7}{15 - 7x}.$$

Отсюда сразу же видно убывание производной l' на полуинтервале $[1, 11/8]$. Это влечет за собой оценку

$$l'(x) \leq l'(1) = \frac{7}{11} + \frac{16}{19} - \frac{8}{3} - \frac{7}{8} < 0,$$

которая доказывает убывание функции l на полуинтервале $[1, 11/8]$, а значит, и убывание функции H на отрезке $[1, 11/8]$.

Возрастание функции

$$H(x) = \left(\frac{8x}{11} - 1\right) \left(\frac{7x}{15} - 1\right) \left(1 + \frac{8x}{11}\right)^2 \left(1 + \frac{7x}{15}\right)^2, \quad x \geq \frac{15}{7},$$

на луче $[15/7, +\infty)$ очевидна, и поэтому

$$\max_{15/7 \leq x \leq 9/4} H(x) = H\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{18}{11} - 1\right) \left(\frac{21}{20} - 1\right) \left(1 + \frac{18}{11}\right)^2 \left(1 + \frac{21}{20}\right)^2 < 0.93. \quad (2.32)$$

Оценим сверху максимум функции H на отрезке $[11/8, 15/7]$. Имеем

$$H\left(\frac{11}{8}\right) = H\left(\frac{15}{7}\right) = 0, \quad H(x) = \left(\frac{8x}{11} - 1\right) \left(1 - \frac{7x}{15}\right) \left(1 + \frac{8x}{11}\right)^2 \left(1 + \frac{7x}{15}\right)^2,$$

$$l(x) = \ln H(x) = \ln \left(\frac{8x}{11} - 1\right) + \ln \left(1 - \frac{7x}{15}\right) + 2 \ln \left(1 + \frac{8x}{11}\right) + 2 \ln \left(1 + \frac{7x}{15}\right),$$

$$l'(x) = \frac{14}{15 + 7x} + \frac{16}{11 + 8x} + \frac{8}{8x - 11} - \frac{7}{15 - 7x}, \quad x \in \left(\frac{11}{8}, \frac{15}{7}\right).$$

Из элементарных соображений видно убывание l' на интервале $(11/8, 15/7)$. А так как

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{8}+} l'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{15}{7}-} l'(x) = -\infty,$$

то в силу непрерывности l' существует такая точка $x_0 \in (11/8, 15/7)$, что

$$l'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\frac{11}{8}, x_0\right), \quad l'(x_0) = 0, \quad l'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(x_0, \frac{15}{7}\right).$$

Поэтому функция H возрастает на отрезке $[11/8, x_0]$ и убывает на отрезке $[x_0, 15/7]$. В точке x_0 функция H достигает максимума на отрезке $[11/8, 15/7]$, и мы сейчас докажем, что

$$H(x_0) = \max \left\{ H(x) \mid \frac{11}{8} \leq x \leq \frac{15}{7} \right\} < 0.91. \quad (2.33)$$

Непосредственным вычислением проверяется справедливость неравенств

$$l' \left(\frac{24}{13} \right) < 0 < l' \left(\frac{11}{6} \right) < \frac{1}{11},$$

из которых находим

$$\frac{11}{6} < x_0 < \frac{24}{13}, \quad 0 < l'(x) < \frac{1}{11} \quad \forall x \in \left(\frac{11}{6}, x_0 \right). \quad (2.34)$$

Имеем также

$$H \left(\frac{11}{6} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{90} \cdot \left(\frac{7 \cdot 167}{3 \cdot 90} \right)^2 < 0.903.$$

Поэтому

$$l \left(\frac{11}{6} \right) < \ln 0.903 < -0.1. \quad (2.35)$$

Из (2.34), (2.35) следуют неравенства

$$l(x_0) - l \left(\frac{11}{6} \right) = \int_{11/6}^{x_0} l'(x) dx < \frac{1}{11} \left(x_0 - \frac{11}{6} \right) < \frac{1}{11} \left(\frac{24}{13} - \frac{11}{6} \right) = \frac{1}{858},$$

$$l(x_0) < l \left(\frac{11}{6} \right) + \frac{1}{858} < -0.098 \implies H(x_0) < \exp(-0.098) < 0.91.$$

Соотношение (2.33) доказано. Из (2.32), (2.33) выводим следующую оценку максимума функции H на отрезке $[11/8, 9/4]$:

$$\max \left\{ H(x) \mid \frac{11}{8} \leq x \leq \frac{9}{4} \right\} < 0.93. \quad (2.36)$$

Теперь из неравенств (2.31), (2.36) выведем неравенство (2.30). Ввиду возрастания квадратного трехчлена

$$P(-x) = \left(1 + \frac{8x}{11} \right) \left(1 + \frac{7x}{15} \right)$$

на луче $(0, +\infty)$ имеем

$$\max \left\{ P(-x) \mid 1 \leq x \leq \frac{11}{8} \right\} = P \left(-\frac{11}{8} \right) = 2 \left(1 + \frac{77}{120} \right) = \frac{197}{60} < \exp(1.2), \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ P(-x) \mid \frac{11}{8} \leq x \leq \frac{9}{4} \right\} &= P \left(-\frac{9}{4} \right) = \left(1 + \frac{18}{11} \right) \left(1 + \frac{21}{20} \right) \\ &= \frac{1189}{220} < \exp(1.69). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Из (2.31), (2.37) следует оценка

$$\max_{1 \leq x \leq 11/8} \{|P(x)|(P(-x))^{2.04}\} < 0.94 \exp(0.048) < 0.987,$$

а из (2.36), (2.38) находим

$$\max_{11/8 \leq x \leq 9/4} \{|P(x)|(P(-x))^{2.04}\} < 0.93 \exp(1.69 \cdot 0.04) < 0.996.$$

Таким образом, предъявлен многочлен P второй степени, удовлетворяющий условию (2.30). Для такого многочлена соотношение (2.3) заведомо выполнено со значениями $a = 9/4$ и $d = 2.04$. Применив лемму 2.1, завершим доказательство теоремы 1.2.

3. ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СВЕРХУ

Метод оценки сверху величины $d(a)$ основывается на следующей лемме.

Лемма 3.1. *Если числа $a > 1$, $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ таковы, что функция*

$$\Phi(x; a, b, \alpha) \equiv \int_x^{ax} t^\alpha (\ln|1-t| + b \ln(1+t)) dt$$

положительна всюду на луче $0 < x < +\infty$, то при любом $R > 0$ для произвольного канонического произведения (1.4) с условием на корни (1.5) справедливо неравенство

$$\int_R^{aR} t^\alpha \ln(m(f;t)M^b(f;t)) dt > 0. \quad (3.1)$$

В частности, для любого $R > 0$ существует такая точка $r \in (R, aR)$, для которой

$$m(f;r) > M^{-b}(f;r).$$

Доказательство. Согласно (1.4), (1.6) на луче $t > 0$ вне корней функции f имеем

$$\ln(m(f;t)M^b(f;t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{t}{\lambda_n} \right| + b \ln \left(1 + \frac{t}{\lambda_n} \right) \right). \quad (3.2)$$

Для фиксированного $R > 0$ при $t \in [R, aR]$ все члены ряда в (3.2) интегрируемы в несобственном смысле. Более того, за возможным исключением конечного числа (зависящего от $R > 0$ и $a > 1$) слагаемых, этот ряд состоит из непрерывных на отрезке $[R, aR]$ функций

$$u_n(t) \equiv \ln \left| 1 - \frac{t}{\lambda_n} \right| + b \ln \left(1 + \frac{t}{\lambda_n} \right) \leq \frac{(1+b)aR}{\lambda_n}, \quad n \geq n_0, \quad t \in [R, aR],$$

причем ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(t)$ равномерно сходится на таком отрезке благодаря (1.5). Умножим обе части тождества (3.2) на t^α и проинтегрируем это произведение по отрезку $[R, aR]$. Поскольку корректен переход к почленному интегрированию ряда в (3.2), то

$$\begin{aligned} \int_R^{aR} t^\alpha \ln(m(f;t)M^b(f;t)) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_R^{aR} t^\alpha \left(\ln \left| 1 - \frac{t}{\lambda_n} \right| + b \ln \left(1 + \frac{t}{\lambda_n} \right) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha+1} \int_{R/\lambda_n}^{aR/\lambda_n} u^\alpha (\ln(1-u) + b \ln(1+u)) du = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha+1} \Phi \left(\frac{R}{\lambda_n}; a, b, \alpha \right). \end{aligned}$$

Получили представление интеграла в (3.1) в виде суммы сходящегося числового ряда

$$\int_R^{aR} t^\alpha \ln(m(f;t)M^b(f;t)) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha+1} \Phi\left(\frac{R}{\lambda_n}; a, b, \alpha\right). \quad (3.3)$$

Отметим, что из определения функции Φ несложно выводится асимптотическая оценка

$$\Phi(x; a, b, \alpha) = O(x^{\alpha+2}), \quad x \rightarrow 0+,$$

которая вместе с (1.5) подтверждает сходимость ряда в (3.3).

По условию леммы функция Φ положительна. Поэтому положительна сумма ряда в (3.3), а вместе с ней и интеграл в (3.1). Лемма доказана. \square

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Как показывает лемма 3.1, достаточно проверить положительность функции $\Phi(x; 9/4, 3, -3)$ при любом $x > 0$. Нужный факт вынесем в отдельное утверждение.

Лемма 3.2. *Функция*

$$\Phi(x) = \Phi\left(x; \frac{9}{4}, 3, -3\right) \equiv \int_x^{9x/4} t^{-3} (\ln|1-t| + 3\ln(1+t)) dt \quad (3.4)$$

положительна всюду на луче $x > 0$.

Доказательство. Из определения (3.4) видно, что $\Phi(x)$ непрерывна при $x > 0$. Обозначим

$$\varphi(x) \equiv \ln|1-x| + 3\ln(1+x), \quad x > 0, \quad x \neq 1, \quad (3.5)$$

и проинтегрируем в (3.4) по частям. После элементарных вычислений приходим к представлению

$$\begin{aligned} 2\Phi(x) &\equiv 2 \int_x^{9x/4} t^{-3} \varphi(t) dt \\ &= \left(1 - \frac{16}{81x^2}\right) \varphi\left(\frac{9x}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \varphi(x) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поясним, что несмотря на равенство $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -\infty$, выражение (3.6) в точках $x = 4/9$ и $x = 1$ разрывов не имеет, принимая конечные значения

$$2\Phi(4/9) = \frac{65}{16} \varphi\left(\frac{4}{9}\right) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1.35\dots, \quad 2\Phi(1) = \frac{65}{81} \varphi\left(\frac{9}{4}\right) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9} = 0.88\dots$$

Проверим справедливость предельных соотношений

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \Phi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0. \quad (3.7)$$

С одной стороны, при $x \in (0, 4/9)$ согласно (3.5), (3.6) функция $2\Phi(x)$ совпадает с величиной

$$\left(1 - \frac{16}{81x^2}\right) \left(\ln\left(1 - \frac{9x}{4}\right) + 3\ln\left(1 + \frac{9x}{4}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) (\ln(1-x) + 3\ln(1+x)) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x}.$$

Поэтому, взяв асимптотики логарифмов

$$\ln\left(1 \pm \frac{9x}{4}\right) = \pm \frac{9x}{4} + O(x^2), \quad \ln(1 \pm x) = \pm x + O(x^2), \quad x \rightarrow 0+,$$

приходим к соотношению

$$2\Phi(x) = \left(1 - \frac{16}{81x^2}\right) \left(\frac{9x}{2} + O(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) (2x + O(x^2)) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x} = \frac{20}{9x} + O(1),$$

где $x \rightarrow 0+$.

С другой стороны, при $x \in (1, +\infty)$ получим для функции $2\Phi(x)$ выражение

$$\left(1 - \frac{16}{81x^2}\right) \left(\ln\left(\frac{9x}{4} - 1\right) + 3 \ln\left(\frac{9x}{4} + 1\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) (\ln(x-1) + 3 \ln(x+1)) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x}.$$

Поэтому, взяв асимптотики логарифмов

$$\ln\left(\frac{9x}{4} \pm 1\right) = \ln \frac{9x}{4} + o(1), \quad \ln(x \pm 1) = \ln x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

приходим к соотношению

$$2\Phi(x) = 4 \ln \frac{9x}{4} - 4 \ln x - 8 \ln \frac{3}{2} + o(1) = o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тем самым, равенства (3.7) обоснованы.

Продифференцировав (3.4), получим, что

$$x^3 \Phi'(x) = \frac{16}{81} \varphi\left(\frac{9x}{4}\right) - \varphi(x), \quad x > 0, \quad (3.8)$$

с уточнением $\Phi'(4/9) = -\infty$, $\Phi'(1) = +\infty$. В остальных точках полуоси $0 < x < +\infty$ производная Φ' конечна, а ее знак, согласно (3.8), совпадает со знаком функции

$$\psi(x) \equiv \frac{16}{81} \varphi\left(\frac{9x}{4}\right) - \varphi(x), \quad x > 0, \quad x \neq \frac{4}{9}, \quad x \neq 1. \quad (3.9)$$

Для определения последнего примем во внимание соотношения

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4/9} \psi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = -\infty, \quad (3.10)$$

без труда извлекаемые из определений (3.5), (3.9). Прямой подсчет, также основанный на формулах (3.5), (3.9), показывает, что

$$\psi'(x) = -\frac{10(234x^3 - 133x^2 + 16)}{9(81x^2 - 16)(x^2 - 1)} \quad (3.11)$$

при всех $x \in (0, 4/9) \cup (4/9, 1) \cup (1, +\infty)$. Поскольку $234x^3 - 133x^2 + 16 > 0$ при $x > 0$, то, как видно из (3.10), (3.11), функция ψ на интервале $(0, 4/9)$ убывает от 0 до $-\infty$, затем, на интервале $(4/9, 1)$, возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, и, наконец, на луче $(1, +\infty)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, существуют такие точки $x_1 \in (4/9, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, что $\psi(x) < 0$ при $x \in (0, 4/9) \cup (4/9, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ и $\psi(x) > 0$ при $x \in (x_1, 1) \cup (1, x_2)$.

Сочетая (3.7)–(3.9), делаем следующий вывод о поведении интеграла (3.4) на положительной полуоси: на интервале $(0, x_1)$ функция Φ убывает от $+\infty$ до значения $\Phi(x_1)$; на отрезке $[x_1, x_2]$ функция Φ возрастает от $\Phi(x_1)$ до $\Phi(x_2)$; на луче $(x_2, +\infty)$ функция Φ убывает от $\Phi(x_2)$ до 0. (В качестве дополнительной информации укажем, что график функции Φ имеет четыре точки перегиба и вертикальные касательные в двух из таких точек — с абсциссами $4/9$ и 1 .)

Таким образом, для доказательства неравенства $\Phi(x) > 0$ при $x > 0$ достаточно проверить положительность функции Φ только в точке минимума $x_1 \in (4/9, 1)$. Поскольку $\Phi'(x_1) = 0$, то (см. (3.8)) выполнено равенство

$$\varphi\left(\frac{9x_1}{4}\right) = \frac{81}{16} \varphi(x_1).$$

Используя его в (3.6), получим, что

$$2\Phi(x_1) = \left(1 - \frac{16}{81x_1^2}\right) \frac{81}{16} \varphi(x_1) - \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right) \varphi(x_1) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x_1} = \frac{65}{16} \varphi(x_1) - 8 \ln \frac{3}{2} + \frac{10}{9x_1}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\chi(x) \equiv \frac{65}{16} \varphi(x) + \frac{10}{9x} = \frac{65}{16} (\ln(1-x) + 3 \ln(1+x)) + \frac{10}{9x}, \quad x \in (4/9, 1),$$

чтобы записать последний результат в компактной форме

$$2\Phi(x_1) = \chi(x_1) - 8 \ln \frac{3}{2}. \quad (3.12)$$

Осталось оценить снизу величину (3.12). Для этого проверим, что $x_1 < 0.68 = 17/25$. Действительно, так как

$$\frac{16}{81} \psi\left(\frac{153}{100}\right) - \psi\left(\frac{17}{25}\right) = \frac{16}{81} \left(\ln \frac{53}{100} + 3 \ln \frac{253}{100}\right) - \left(\ln \frac{8}{25} + 3 \ln \frac{42}{25}\right) > 0.0077,$$

то $\Phi'(17/25) > 0$ ввиду (3.8). Но $17/25 \in (4/9, 1)$, откуда и получаем уточненную локализацию точки минимума: $x_1 \in (4/9, 17/25)$. Убывание функции χ на всем интервале $(4/9, 1)$ влечет неравенство $\chi(x_1) > \chi(17/25)$. Применяв это неравенство в (3.12), запишем

$$2\Phi(x_1) > \chi(17/25) - 8 \ln \frac{3}{2} = \frac{65}{16} \left(\ln \frac{8}{25} + 3 \ln \frac{42}{25}\right) + \frac{250}{153} - 8 \ln \frac{3}{2} > 0.0841.$$

Итак, при всех $x > 0$ имеем $\Phi(x) \geq \Phi(x_1) > 0$. Лемма доказана. \square

Согласно леммам 3.1, 3.2 выбор параметров $a = 9/4$, $b = 3$, $\alpha = -3$ обеспечивает выполнение неравенства (3.1). Другими словами, имеет место (1.9) с очевидным следствием (1.8). Доказательство теоремы 1.1 завершено. Вытекающая из этой теоремы верхняя оценка в (1.12) допускает небольшое усиление: $d(9/4) < 2.95$. Как показывает компьютерный расчет, функция $\Phi(x; 9/4, b, -3)$ с параметром $b \in (2.91, 2.95)$ положительна при всех $x > 0$, а функция $\Phi(x; 9/4, 2.9, -3)$ этим свойством уже не обладает.

Наконец, для доказательства теоремы 1.4 потребуется следующий вспомогательный факт.

Лемма 3.3. *Функция*

$$\Phi(x) = \Phi(x; a, s(a) + 3, 0) \equiv \int_x^{ax} (\ln|1-t| + (s(a) + 3) \ln(1+t)) dt \quad (3.13)$$

положительна всюду на луче $0 < x < +\infty$ при любом значении параметра $a \in (1, 9/8]$.

Доказательство. Рассуждения проводим при фиксированном $a \in (1, 9/8]$. Положительность интеграла (3.13) на интервале $0 < x < a^{-2}$ следует из положительности подынтегральной функции на отрезках $[x, ax] \subset (0, a^{-1})$. Действительно, функция

$$\mathcal{L}(t) \equiv \ln(1-t) + s(a) \ln(1+t)$$

непрерывна и вогнута на полуинтервале $[0, 1)$. Верны также равенства $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(a^{-1}) = 0$. Отсюда сразу же следует положительность $\mathcal{L}(t)$ при $t \in (0, a^{-1})$. Тем самым, подынтегральная функция в (3.13) на всех отрезках $[x, ax]$ при $0 < x < a^{-2}$ превосходит величину $3 \ln(1+t) > 0$.

Имеем далее

$$\int_{1/a}^1 \ln(1-t) dt = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left(1 - \frac{1}{a}\right), \quad \int_{1/a}^1 \ln(1+t) dt > \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Отсюда и из (3.13) находим

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{1}{a}\right) &> \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left(1 - \frac{1}{a}\right) + (s(a) + 3) \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left[\ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) - 1 + \ln\frac{1}{1 - 1/a} + 3 \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(3 \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) - 1\right) \geq \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(3 \ln\frac{17}{9} - 1\right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) > 0.9 \left(1 - \frac{1}{a}\right). \quad (3.14)$$

Поскольку функция Φ , будучи непрерывной на \mathbb{R} , дифференцируема на интервале $(-1/a, 1/a)$ и ее производная абсолютно интегрируема на этом интервале, то

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) - \Phi(x) = \int_x^{1/a} \Phi'(y) dy, \quad x \in \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right).$$

И если вывести оценку сверху

$$\Phi'(y) \leq C \quad \forall y \in (a^{-2}, a^{-1}) \quad (3.15)$$

(заметим, что снизу на интервале (a^{-2}, a^{-1}) производная не ограничена), то при любом значении $x \in [a^{-2}, a^{-1})$ мы получим неравенство

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{1}{a}\right) - \int_x^{1/a} \Phi'(y) dy \geq \Phi\left(\frac{1}{a}\right) - C \left(\frac{1}{a} - x\right) \geq \Phi\left(\frac{1}{a}\right) - C \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right). \quad (3.16)$$

Из (3.14), (3.16) при всех $x \in [a^{-2}, a^{-1})$ имеем

$$\Phi(x) \geq 0.9 \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{C}{a} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(0.9 - \frac{C}{a}\right) > \left(1 - \frac{1}{a}\right) (0.9 - C). \quad (3.17)$$

Покажем, что оценка (3.15) верна, если взять $C = 0.7$. Тогда согласно (3.14), (3.17) положительность $\Phi(x)$ при $a^{-2} \leq x \leq a^{-1}$ будет доказана. При $x \in (a^{-2}, a^{-1})$ запишем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= a (\ln(1 - ax) + (s(a) + 3) \ln(1 + ax)) - (\ln(1 - x) + (s(a) + 3) \ln(1 + x)) \\ &= (a - 1) (\ln(1 - ax) + (s(a) + 3) \ln(1 + ax)) + \ln\frac{1 - ax}{1 - x} + (s(a) + 3) \ln\frac{1 + ax}{1 + x}.\end{aligned}$$

Ввиду равенств

$$\begin{aligned}\max \left\{ \frac{1 - ax}{1 - x} \mid \frac{1}{a^2} \leq x \leq \frac{1}{a} \right\} &= \frac{1 - 1/a}{1 - 1/a^2} = \frac{a}{a + 1}, \\ \max \left\{ \frac{1 + ax}{1 + x} \mid \frac{1}{a^2} \leq x \leq \frac{1}{a} \right\} &= \frac{2}{1 + 1/a} = \frac{2a}{a + 1}\end{aligned}$$

и отрицательности функции \mathcal{L} на интервале $(a^{-1}, 1)$ верна оценка

$$\Phi'(x) < \frac{a - 1}{2} (s(a) + 3 + 6 \ln 2) + \ln\frac{a}{a + 1}, \quad x \in (a^{-2}, a^{-1}). \quad (3.18)$$

Действительно, при таких x имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &< (a-1)(\ln(1-ax) + (s(a)+3)\ln(1+ax)) + \ln \frac{a}{a+1} + (s(a)+3)\ln \frac{2a}{a+1} \\ &= (a-1)\mathcal{L}(ax) + 3(a-1)\ln(1+ax) + \ln \frac{a}{a+1} + (s(a)+3)\ln \left(1 + \frac{a-1}{a+1}\right) \\ &< 3(a-1)\ln 2 + \ln \frac{a}{a+1} + \frac{a-1}{a+1}(s(a)+3) < \frac{a-1}{2}(s(a)+3+6\ln 2) + \ln \frac{a}{a+1}.\end{aligned}$$

Обозначим $\delta = a-1$ и оценим сверху функцию

$$\Phi_1(a) \equiv (a-1)s(a) = \frac{\delta(\ln(1+\delta) - \ln \delta)}{\ln(1+1/a)} \leq \frac{\delta(\ln(1+\delta) - \ln \delta)}{\ln(17/9)} < \frac{\delta(\delta - \ln \delta)}{\ln(17/9)} < 1.6\delta(\delta - \ln \delta).$$

Легко проверить, что функция $\Phi_2(\delta) \equiv \delta(\delta - \ln \delta)$ возрастает на луче $0 < \delta < +\infty$. Поэтому при $a \in (1, 9/8]$ верна оценка

$$\Phi_1(a) < 1.6\Phi_2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1.6}{8}\left(\frac{1}{8} + \ln 8\right) < \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (3.18) выводим оценку производной

$$\Phi'(x) < \frac{1}{4} + \frac{(a-1)(3+6\ln 2)}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{3+6\ln 2}{16} < \frac{1}{4} + \frac{7.2}{16} = 0.7, \quad x \in (a^{-2}, a^{-1}),$$

которую и требовалось доказать. Положительность функции Φ на полуинтервале $(0, a^{-1}]$ обоснована.

По аналогии с выводом (3.14) имеем

$$\Phi(1) > (a-1)(\ln(a-1) - 1 + 3\ln 2 + s(a)\ln 2), \quad (3.19)$$

поскольку

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= \int_1^a (\ln(t-1) + (s(a)+3)\ln(t+1)) dt \\ &= (a-1)\ln(a-1) - (a-1) + (s(a)+3)\int_1^a \ln(t+1) dt \\ &> (a-1)\ln(a-1) - (a-1) + (a-1)(s(a)+3)\ln 2 \\ &= (a-1)(\ln(a-1) - 1 + 3\ln 2 + s(a)\ln 2).\end{aligned}$$

Из определения величины $s(a)$ сразу же следует оценка снизу

$$s(a)\ln 2 > \ln \frac{1}{a-1} \quad \forall a > 1,$$

которая вместе с (3.19) дает неравенство

$$\Phi(1) > (a-1)(3\ln 2 - 1) > a-1 > 0.$$

Отсюда видно, что для доказательства положительности функции Φ на луче $[1, +\infty)$ достаточно доказать положительность ее производной на $(1, +\infty)$. Согласно (3.13) при $x > 1$ имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= a(\ln(ax-1) + (s(a)+3)\ln(ax+1)) - (\ln(x-1) + (s(a)+3)\ln(x+1)) \\ &= (a-1)(\ln(ax-1) + (s(a)+3)\ln(ax+1)) + \ln \frac{ax-1}{x-1} + (s(a)+3)\ln \frac{ax+1}{x+1} \\ &> (a-1)(\ln(ax-1) + (s(a)+3)\ln(ax+1)) > (a-1)(\ln(a-1) + (s(a)+3)\ln(a+1)).\end{aligned}$$

(Мы воспользовались возрастанием функций $\ln(t-1)$ и $\ln(t+1)$ на луче $(1, +\infty)$.) Непосредственно проверяется положительность величины $\ln(a-1) + s(a)\ln(a+1)$ при любом $a > 1$. Это сразу же при всех $x > 1$ и $a > 1$ дает неравенство $\Phi'(x) > 3(a-1)\ln(a+1)$, которое доказывает требуемое.

Осталось доказать положительность $\Phi(x)$ на интервале $a^{-1} < x < 1$. При этих значениях переменной x справедливо равенство

$$J(x; a) \equiv \int_x^{ax} \ln|1-t|dt = (ax-1)\ln(ax-1) + (1-x)\ln(1-x) - (ax-x).$$

Обозначив $u = ax - 1$, $v = 1 - x$, получим

$$J(x; a) = u \ln u + v \ln v - (u + v), \quad u + v = x(a-1) < a-1.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция двух переменных $H(u, v) \equiv u \ln u + v \ln v$ в треугольнике

$$T_h \equiv \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0, u + v \leq h\},$$

хотя и не замкнутом, принимает свое наименьшее значение в точке $u = v = h/2$, каково бы ни было число $h \in (0, 1/e)$. Поэтому верна оценка снизу

$$J(x; a) \geq (a-1) \ln \frac{a-1}{2} - (a-1) \quad \forall x \in (a^{-1}, 1) \quad \forall a \in (1, 1+1/e). \quad (3.20)$$

Оценим снизу интеграл

$$I(x; a) \equiv \int_x^{ax} \ln(1+t)dt.$$

Ввиду вогнутости функции $\ln(1+t)$ на луче $0 < t < +\infty$ интеграл от нее по любому отрезку, лежащему на $(0, +\infty)$, больше длины этого отрезка, умноженной на полусумму значений $\ln(1+t)$ на его концах. Следовательно, при любом $x > a^{-1}$ выполняется неравенство

$$I(x; a) > \int_{a^{-1}}^1 \ln(1+t)dt > \left(1 - \frac{1}{a}\right) \frac{1}{2} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \ln 2\right), \quad (3.21)$$

из которого находим

$$s(a)I(x; a) > \frac{a-1}{a} \ln\left(\frac{a}{a-1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}\right) \quad \forall x \in (a^{-1}, 1). \quad (3.22)$$

А так как согласно (3.13) справедливо представление

$$\Phi(x) = \Phi(x; a, s(a) + 3, 0) = J(x; a) + (s(a) + 3)I(x; a),$$

то из (3.20)–(3.22) выводим для $x \in (a^{-1}, 1)$ оценку

$$\begin{aligned} \Phi(x) &> (a-1) \ln \frac{a-1}{2} - (a-1) + \\ &+ \frac{a-1}{a} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} \right) (\ln a - \ln(a-1)) + \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \frac{3}{2} \ln 2 \right) \\ &= \frac{a-1}{a} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - a \right) \ln \frac{1}{a-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} \right) \ln a \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{3}{2} - a \right) \ln 2 - a \right) \\ &> \frac{a-1}{a} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - a \right) \ln \frac{1}{a-1} + \ln a + \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{3}{2} - a \right) \ln 2 - a \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для завершения доказательства положительности $\Phi(x)$ на луче $x > 0$ при любом значении $a \in (1, 9/8]$ требуется проверить положительность функции

$$\xi(a) = \xi_1(a) + \xi_2(a)$$

на полуинтервале $(1, 9/8]$, где

$$\xi_1(a) \equiv \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - a \right) \ln \frac{1}{a-1}, \quad \xi_2(a) \equiv \ln a + \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{3}{2} - a \right) \ln 2 - a.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\xi_2(a)$ убывает на луче $[1, +\infty)$ и выполняется неравенство

$$\xi_2\left(\frac{9}{8}\right) = \ln \frac{9}{8} + \frac{3}{2} \ln \frac{17}{9} + \frac{3}{8} \ln 2 - \frac{9}{8} > 0.2.$$

Следовательно,

$$\xi_2(a) > 0.2 \quad \forall a \in (1, 9/8]. \quad (3.23)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \xi_1(a) &= \left(1 - a + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - 1 \right) \right) \ln \frac{1}{a-1} \\ &= \left(1 - a + \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{2a}{a+1}}{\ln(1+1/a)} \right) \ln \frac{1}{a-1} > \left(1 - a + \frac{\ln \frac{2a}{a+1}}{2 \ln 2} \right) \ln \frac{1}{a-1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись хорошо известной оценкой логарифма $\ln t > (t-1)/t$ ($\forall t > 1$), взяв $t = 2a/(a+1) > 1$ при том же $a \in (1, 9/8]$, а затем — убыванием функции $t \ln t$ на интервале $0 < t < 1/e$, запишем

$$\begin{aligned} \xi_1(a) &> \left(1 - a + \frac{a-1}{4a \ln 2} - 1 \right) \ln \frac{1}{a-1} = (a-1) \left(1 - \frac{1}{4a \ln 2} \right) \ln(a-1) \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{9 \ln 2} \right) (a-1) \ln(a-1) \geq \left(1 - \frac{2}{9 \ln 2} \right) \frac{1}{8} \ln \frac{1}{8} = -\frac{3}{8} \left(\ln 2 - \frac{2}{9} \right). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\xi_1(a) > -0.18 \quad \forall a \in (1, 9/8]. \quad (3.24)$$

Из (3.23), (3.24) при любом $a \in (1, 9/8]$ находим

$$\xi(a) = \xi_1(a) + \xi_2(a) > 0.02,$$

что завершает проверку положительности функции Φ на интервале $(a^{-1}, 1)$.

Итак, интеграл (3.13) положителен при всех $x > 0$, каково бы ни было значение параметра $a \in (1, 9/8]$. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 1.4, заключающееся в выводе двойного неравенства (1.15), будет несложным. С одной стороны, сочетая оценки (1.13) и (2.24), получим при любом $a > 1$, что

$$d(a) \geq s(a) > \log_2 \frac{1}{a-1}.$$

С другой стороны, в силу лемм 3.1 и 3.3 при всех $a \in (1, 9/8]$ верна оценка

$$d(a) \leq s(a) + 3,$$

и нужно лишь проверить выполнение неравенства

$$s(a) < \log_2 \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2} \quad \forall a \in (1, 9/8].$$

Для таких a имеем

$$\begin{aligned} s(a) - \log_2 \frac{1}{a-1} &= \frac{1}{\ln(1+1/a)} \left(\ln a + \ln \frac{2a}{a+1} \cdot \log_2 \frac{1}{a-1} \right) < \frac{1}{\ln \frac{17}{9}} \left(\ln \frac{9}{8} + \frac{a-1}{a+1} \log_2 \frac{1}{a-1} \right) \\ &< \frac{1}{\ln \frac{17}{9}} \left(\ln \frac{9}{8} - \frac{1}{2 \ln 2} (a-1) \ln(a-1) \right) < \frac{\ln \frac{9}{8} + \frac{3}{16}}{\ln \frac{17}{9}} < 0.49, \end{aligned}$$

что и требовалось. Неравенство (1.15) получено. Его очевидным следствием является асимптотика (1.14). Теорема 1.4 доказана.

В заключение отметим, что задача исследования поведения оптимального показателя $d(a)$ при больших значениях a еще ждет своего решения. Оно должно включать оценку $d(a)$ сверху и возможное уточнение неравенства (1.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Valiron. *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulier* // Ann. Fac. Sci. Toulouse. **5**, 117–257 (1913).
2. A. Wiman. *Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null* // Math. Ann. **76**, 197–211 (1915).
3. M.L. Cartwright. *On the minimum modulus of integral functions* // Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 412–420 (1934).
4. W.K. Hayman. *The minimum modulus of large integral functions* // Proc. London Math. Soc. **2:3**, 469–512 (1952).
5. R.P. Boas. *Entire Functions*. New York: Academic Press Inc. 1954.
6. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Распределение значений мероморфных функций*. М.: Наука. 1970.
7. W.K. Hayman. *Subharmonic Functions. V. 2*. London, New York: Academic Press. 1989.
8. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Новые исследования о росте и распределении значений целых и мероморфных функций рода нуль* // УМН. **16:4(100)**, 51–62 (1961).
9. W.K. Hayman, E.F. Lingham. *Research Problems in Function Theory* (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics. Springer. 2019.
10. А.М. Гайсин. *Решение проблемы Поля* // Матем. сб. **193:6**, 39–60 (2002).
11. А.Ю. Попов. *Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности* // Труды МИАН. **319** (2022).
12. А.Ю. Попов. *Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции* // Челяб. физ.-матем. журн. **4:2**, 155–164 (2019).

Антон Юрьевич Попов,

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,

Ленинские горы, 1,

119991, г. Москва, Россия

E-mail: ayropov.msu@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,

Ленинские горы, 1,

119991, г. Москва, Россия

E-mail: shervb73@gmail.com