ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 60-72.

УДК 517.5

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости рядов экспоненциальных мономов, частными случаями которых являются ряды экспонент, ряды Дирихле и степенные ряды. Дается описание пространства коэффициентов рядов экспоненциальных мономов, сходящихся в заданной выпуклой области комплексной плоскости. При одном естественном ограничении на степени мономов приводится полный аналог теоремы Абеля для таких рядов, из которого, в частности, вытекают результаты о продолжении сходимости рядов экспоненциальных мономов. Получен также полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором приводится формула, позволяющая восстанавливать область сходимости указанных рядов по их коэффициентам. Полученные результаты включают в себя как частные случаи все известные ранее результаты, связанные с теоремами Абеля и Коши-Адамара для рядов экспонент, рядов Дирихле и степенных рядов.

Ключевые слова: экспоненциальный моном, выпуклая область, теорема Абеля, теорема Коши-Адамара.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

В работе изучается сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \tag{1.1}$$

Исследуется задача описания пространства коэффициентов сходящихся рядов (1.1), характер сходимости этих рядов, описывается область их сходимости и изучается вопрос о продолжении сходимости рядов (1.1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей $n_k \in \mathbb{N}$. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|}, \tag{1.2}$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями — рядами экспонент (т.е. рядами вида (1.1), где $n_k = 1$, $k \geqslant 1$), рядами Дирихле ($n_k = 1$ и $\lambda_k > 0$) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Е. Хилле, Г.Л. Лунца, А.Ф. Леонтьева и других математиков.

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, Convergence of series of exponential monomials.

Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».
Поступила 20 сентября 2022 г.

Для рядов (1.1), как и в теории рядов экспонент (в частности, степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя — при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля ([1], гл. 2, лемма 1.1), в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < \mathrm{Re} z_0\}$. Если $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([1], гл. 2, теорема 1.1) эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < \mathrm{Re} z_0 - \varepsilon\}$. Для рядов Дирихле имеется также полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ вычисляется абсцисса сходимости ([1], гл. 2, теорема 1.2).

В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат ([3], [1], гл. 2, теорема 2.1) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно ([1], гл. 2, теорема 2.2). Если выполнено условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([1], гл. 2, теорема 2.3) простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого для рядов экспонент известен также ([3]–[5] и [2], теорема 3.1.3) аналог теоремы Коши-Адамара. В случае общих рядов вида (1.1) можно отметить лишь результат из работы [6]. Здесь доказывается, что область абсолютной сходимости ряда (1.1) выпуклая, если $m(\Lambda) = 0$.

В работе [7] при условиях $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов (1.1) и в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1.1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1.1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все указанные выше подобные результаты.

Недостатком работы [7] является условие $m(\Lambda) = 0$, которое хорошо подходит лишь для случая ограниченной области сходимости ряда (1.1). В случае, когда эта область неограниченна, условие $m(\Lambda) = 0$ становится слишком жестким. Цель данной работы — получение результатов, аналогичных результатам работы [7] при более слабом (в случае неограниченной области) ограничении на кратности n_k точек λ_k.

2. Пространство коэффициентов сходящихся рядов

Символами $B(z, r)$ и $S(z, r)$ обозначим соответственно открытый круг и окружность с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и $\overline{M}$ — замыкание множества M. Положим

$$H(\varphi, M) = \sup_{z \in M} \mathrm{Re}(z e^{-i\varphi}), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

— опорная функция M и

$$J(M) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : h(\varphi, M) = +\infty\}.$$

Отметим, что опорная функция H_M всегда полунепрерывна снизу и является непрерывной внутри интервала, где она ограничена. В частности, если M — ограниченное множество ([8]), то $H(\varphi, M)$ — непрерывная функция. Если множество $\overline{J(M)} \setminus J(M)$ не пусто, то оно состоит из одной или двух точек.

Если D — ограниченная выпуклая область, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной выпуклой области возможны следующие ситуации:

1) $J(D) = S(0, 1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$,

2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$,

3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$,

4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $D \subset\in \mathbb{C}$ — выпуклая область. Опишем пространство последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$, при которых в области D сходится ряд (1.1). Через $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е.

$$K_p \subset \mathrm{int} K_{p+1}, \quad p \geqslant 1, \qquad D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p. \tag{2.1}$$

Здесь символ int означает внутренность множества. В силу вложения в (2.1) и определения опорной функции для каждого $p \geqslant 1$ найдется $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H(\varphi, K_p)(\varphi) + \alpha_p \leqslant H(\varphi, K_{p+1}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.2}$$

Положим

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| p^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) < \infty\}, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k},$$

$$Q_{p,0}(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_{p,0} = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) < \infty\},$$

$$Q(D, \Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda), \quad Q_0(D, \Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_{p,0}(\Lambda).$$

Очевидно, верны неравенства

$$||d||_{p,0} \leqslant ||d||_p, \quad p \geqslant 1, \quad \forall d = \{d_{k,n}\}. \tag{2.3}$$

В силу (2.2) для любых $d \in Q(D, \Lambda)$ и $d_0 \in Q_0(D, \Lambda)$ выполнены также неравенства

$$||d||_1 \leqslant ||d||_2 \leqslant \ldots \leqslant ||d||_p \leqslant \ldots, \quad ||d_0||_{1,0} \leqslant ||d_0||_{2,0} \leqslant \ldots \leqslant ||d_0||_{p,0} \leqslant \ldots. \tag{2.4}$$

Пусть $\overline{\lambda}$ — число комплексно сопряженное с λ. Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество пределов всех сходящихся последовательностей вида $\left\{\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\right\}_{j=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $S(0,1)$. Положим

$$m(\Lambda, \mu) = \sup \overline{\lim_{j \to \infty}} \frac{n_{k_j}}{\lambda_{k_j}},$$

где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k_j}\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k_j}}/|\lambda_{k_j}| \to \mu$. Если $\mu \notin \Theta(\Lambda)$, то, очевидно, верно равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — выпуклая область. Предположим, что*

$$J(D) \cap \Theta(\Lambda) = \overline{J(D)} \cap \Theta(\Lambda), \quad m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}. \tag{2.5}$$

Тогда верны утверждения:

1) для каждого $p \geqslant 1$ существуют $C > 0$ и $m \geqslant 1$ такие, что

$$p^{n_k} \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) \leqslant C \exp(r_k H(-\varphi_k, K_m)), \quad k \geqslant 1;$$

2) для каждого $p \geqslant 1$ существуют $C > 0$ и $m \geqslant 1$ такие, что

$$||d||_p \leqslant C||d||_{m,0}, \quad \forall d = \{d_{k,n}\};$$

3) топологические векторные пространства $Q(D, \Lambda)$ и $Q_0(D, \Lambda)$ совпадают.

Доказательство. Предположим, что утверждение 1 неверно. Тогда для некоторого номера $p \geqslant 1$ существует подпоследовательность $\{\lambda_{k(m)}\}$ такая, что

$$p^{n_{k(m)}} \exp(r_{k(m)} H(-\varphi_{k(m)}, K_p)) \geqslant m \exp(r_{k(m)} H(-\varphi_{k(m)}, K_m)), \quad m \geqslant 1. \tag{2.6}$$

Выберем подпоследовательность $\left\{\lambda_{k(m(j))}\right\}$ так, что $\overline{\lambda_{k(m(j))}}/|\lambda_{k(m(j))}|$ сходится к некоторой точке $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале $\mu \notin J(D)$. Тогда в силу первого равенства в (2.5) $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. В силу же второго равенства из (2.5) имеем: $m(\Lambda, \mu) = 0$. Поэтому найдется j_0 такое, что

$$p^{n_{k(m(j))}} = \exp(n_{k(m(j))} \ln p) \leqslant \exp(\alpha_p r_{k(m(j))}), \quad j \geqslant j_0.$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем:

$$p^{n_{k(m(j))}} \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_p)) \leqslant \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_{p+1})), \quad j \geqslant j_0.$$

Это противоречит (2.6).

Пусть теперь $\mu \in J(D)$. В силу неравенства из (2.5) для некоторого $b > 0$ имеем: $n_k \leqslant b r_k$, $k \geqslant 1$. Тогда

$$p^{n_{k(m(j))}} \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_p)) \leqslant \exp(b r_{k(m(j))} \ln p + b_p r_{k(m(j))}), \quad j \geqslant 1, \tag{2.7}$$

где

$$b_p = \max_{z \in K_p} |z|.$$

Поскольку функция $H(\varphi, D)$ полунепрерывна снизу, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$H(\varphi, D) > b \ln p + b_p, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta].$$

Тогда в силу равенства в (2.1) для некоторого номера l имеем:

$$H(\varphi, K_l) \geqslant b \ln p + b_p, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta].$$

Отсюда получаем:

$$H(-\varphi_{k(m(j))}, K_l) \geqslant b \ln p + b_p, \quad j \geqslant j_1.$$

Это вместе с (2.7) противоречит (2.6).

Таким образом, утверждение 1 верно. Из него следует утверждение 2. Последнее с учетом (2.3) дает нам утверждение 3. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. *Предположим, что первое равенство в (2.5) неверно и $m(\Lambda, \mu) > 0$, где μ — точка множества $\overline{J(D)} \cap (\Lambda)$, которая не принадлежит множеству $J(D) \cap \Theta(\Lambda)$. Тогда все три утверждения из леммы 2.1 неверны. Рассмотрим для примера область $D = \{z : Rez < 0\}$ и последовательность $\Lambda = \{2^k, 2^k\}$. Имеем: $J(D) = S(0,1) \setminus \{1\}$, $\Theta(\Lambda) = \{1\}$, $m(\Lambda) = m(\Lambda, 1) = 1$. Кроме того, $0 > H(0, K_p) \to 0$, $p \to \infty$. Отсюда следует, что утверждение 1 из леммы 2.1 не выполняется. Пусть $d = \{1, 1, \ldots\}$. Тогда $d \in Q_0(D, \Lambda)$ и для достаточно больших номеров p имеет место равенство $||d||_p = +\infty$, т.е. $d \in Q(D, \Lambda)$.*

Замечание 2.2. *Первое равенство в (2.5) используется при доказательстве утверждения 1 только для того, чтобы установить равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \notin J(D)$. Если наложить условие $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus J(D)$, то, все три утверждения леммы 2.1 верны вне зависимости от первого условия в (2.5). Таким образом, мы получаем:*

Лемма 2.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — выпуклая область. Предположим, что*

$$m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}.$$

Тогда верны утверждения:

1) для каждого $p \geqslant 1$ существуют $C > 0$ и $m \geqslant 1$ такие, что

$$p^{n_k} \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) \leqslant C \exp(r_k H(-\varphi_k, K_m)), \quad k \geqslant 1;$$

2) для каждого $p \geqslant 1$ существуют $C > 0$ и $m \geqslant 1$ такие, что

$$||d||_p \leqslant C||d||_{m,0}, \quad \forall d = \{d_{k,n}\};$$

3) топологические векторные пространства $Q(D,\Lambda)$ и $Q_0(D,\Lambda)$ совпадают.

Покажем, что пространство $Q(D,\Lambda)$ совпадает с пространством коэффициентов сходящихся в области D рядов вида (1.1).

Прежде всего, сформулируем два вспомогательных утверждения, которые доказаны в работе [7].

Лемма 2.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k e^{-\varepsilon|\lambda_k|}$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\Lambda) = 0$.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество единичной окружности $S(0,1)$. Θ — выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, E), e^{i\varphi} \in \Theta\}.$$

Отметим, что $\mathrm{int}E \subset E(\Theta)$. В самом деле, пусть $z \in \mathrm{int}E$. Тогда из определения опорной функции следуют неравенства $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_E(\varphi)$, $e^{i\varphi} \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$. Если $\Theta = S(0,1)$, то Θ-выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки) и, таким образом, является выпуклой областью. Последнее имеет место и в общем случае.

Лемма 2.4. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $S(0,1)$. Тогда $E(\Theta)$ — выпуклая область.*

Лемма 2.5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что*

1) общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E, т.е.

$$|d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}| \leqslant A(z) < +\infty, \quad k \geqslant 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad z \in E;$$

2) $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda,\mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$;

3) если $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(E)} \setminus J(E)\right)$ и $m(\Lambda,\mu) > 0$, то существует $b(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ такое, что множество $B(\varphi_0) = \{z \in E : Re(ze^{i\varphi_0}) \geqslant b(\varphi_0)\}$ неограниченное;

4) если 0 — изолированная точка множества E, то последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ ограничена.

Тогда $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.

Доказательство. Предположим, что $d \notin Q(D,\Lambda)$. Тогда $d \notin Q_p$ для некоторого $p \geqslant 1$, т.е. найдется подпоследовательность $\{d_{k(j),n(j)}\}$ такая, что

$$|d_{k(j),n(j)}|p^{n(j)} \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_p)) \to +\infty, \quad j \to \infty. \tag{2.8}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\left\{\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}|\right\}$ сходится к $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n(j)}{|\lambda_{k(j)}|} = 0. \tag{2.9}$$

В силу определения величины $m(\Lambda,\mu)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется j_0 такое, что

$$n_{k(j)} \leqslant \varepsilon r_{k(j)}, \quad j \geqslant j_0. \tag{2.10}$$

Отсюда с учетом (2.2) и (2.8) получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1})) \to +\infty, \quad j \to \infty. \tag{2.11}$$

Поскольку K_{p+2} — компакт в области $D = E(\Theta(\Lambda))$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка: $\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > H(-\varphi_0, K_{p+2})$. Тогда с учетом (2.2) и непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\mathrm{Re}(ze^{i\varphi}) > H(-\phi, K_{p+2}) \geqslant H(-\varphi, K_{p+1}) + \alpha_{p+1}, \quad z \in B(z_0, \delta), \quad e^{i\varphi} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta). \tag{2.12}$$

Выберем номер $j_1 \geqslant j_0$ так, что

$$\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| = e^{i\varphi_{k(j)}} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta), \quad j \geqslant j_1. \tag{2.13}$$

Возможны два случая.

1. Множество $B(z_0, \delta) \cap E$ содержит точку $z_1 \neq 0$.
2. $z_0 = 0$ — изолированная точка множества E.

Рассмотрим первый случай. В силу (2.10)

$$|z_1|^{n(j)} \geqslant \exp(-\alpha_{p+1} r_{k(j)}), \quad j \geqslant j_2 \geqslant j_1.$$

Отсюда с учетом (2.12), (2.13) и (2.11) получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}(z_1)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_1}| \geqslant |d_{k(j),n(j)}| \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1})) \to +\infty, \quad j \to \infty.$$

Это противоречит условию 1).

Если $z_0 = 0$ — изолированная точка E, то с учетом (2.11)–(2.13) имеем:

$$|d_{k(j),n(j)}| = |d_{k(j),n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \geqslant |d_{k(j),n(j)}| \exp H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}) \to +\infty, \quad j \to \infty.$$

Это противоречит условию 4).

Пусть теперь (2.9) неверно. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n(j)}{|\lambda_{k(j)}|} > 0. \tag{2.14}$$

Согласно условию 2) возможны два случая.

1. $\mu \in J(E)$.
2. $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(E)} \setminus J(E)\right)$.

В силу (2.7) и (2.8) получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \exp(br_{k(j)} \ln p + b_p r_{k(j)}) \to +\infty, \quad j \to \infty. \tag{2.15}$$

Рассмотрим первый случай. Так как $\mu \in J(E)$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка:

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b \ln p + b_p.$$

Можно считать, что $|z_0| \geqslant 1$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > b \ln p + b_p, \quad e^{i\varphi} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta).$$

Тогда с учетом (2.15) имеем:

$$|d_{k(j),n(j)}(z_0)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \geqslant |d_{k(j),n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \to +\infty, \quad j \to \infty.$$

Это противоречит условию 1).

Пусть, наконец, $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(E)} \setminus J(E)\right)$. В силу условия 3) леммы множество $B(\varphi_0)$ неограниченно. Следовательно, с учетом (2.14) найдется $z_0 \in E$ такое, что

$$|(z_0)^{n(j)}| \geqslant \exp((b \ln p + b_p - b(\varphi_0)) r_{k(j)}), \quad j \geqslant j_3.$$

Отсюда и (2.15) получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}(z_0)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \to +\infty, \quad j \to \infty.$$

Это противоречит условию 1). Таким образом, $d \in Q(D, \Lambda)$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.3. *Условие 4) леммы 2.5 является существенным. В качестве примера рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} z e^{kz}.$$

Здесь $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. Пусть $E = \{-2, 0\}$. Тогда $E(\Theta(\Lambda))$ совпадает с полуплоскостью $Rez < 0$, а общий член ряда ограничен на E. Однако ряд не сходится в этой полуплоскости (он расходится на окружности $S(0,1)$). Он сходится в полуплоскости $Rez < -2$, которая совпадает с множеством $E'(\Theta(\Lambda))$, где $E' = \{-2\}$. В этом случае нарушено условие 4) леммы 2.1 (остальные выполнены), и ее утверждение становится неверным.

Лемма 2.6. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_p ||d||_{m(p)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda). \tag{2.16}$$

Доказательство. Фиксируем $p \geqslant 1$. Выберем номер $m(p) > p$ такой, что

$$m(p) \geqslant b_p = \max_{z\in K_p} |z|.$$

Тогда с учетом (2.2) и определения опорной функции получаем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}|(m(p))^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p))$$

$$\leqslant ||d||_{m(p)} \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \exp(r_k(H(-\varphi_k, K_p) - H(-\varphi_k, K_m(p))))$$

$$\leqslant ||d||_{m(p)} \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \exp(-r_k \alpha_p).$$

Отсюда и леммы 2.3 следует (2.16). Лемма доказана. □

Теорема 2.1. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda,\mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Тогда эквивалентны утверждения:*

1) Ряд (1.1) сходится в области D.

2) Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda)$.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Положим $E = D$. В силу сходимости ряда (1.1) в области D выполнено условие 1) леммы 2.5. Согласно условию теоремы выполнено также условие 2) леммы 2.5. Поскольку $E = D$ — выпуклое множество, то оно не имеет изолированных точек. Поэтому условие 4) леммы 2.5 выполнено тривиально. Докажем, что выполнено также и условие 3) леммы 2.5.

Пусть $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \overline{J(D)} \setminus J(D)$ и $b(\varphi_0) < H(-\varphi_0, D)$. Согласно определению опорной функции найдем точку $z_0 \in D$ такую, что

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b(\varphi_0).$$

Поскольку $\mu \in \overline{J(D)} \setminus J(D)$, то μ является граничной точкой открытой дуги $\gamma \subset S(0,1)$ раствора π, которая целиком лежит на множестве $J(D)$. Пусть для определенности

$$\gamma = \{e^{-i\varphi} : \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi)\}.$$

Рассмотрим луч $z_t = z_0 + te^{-i(\varphi_0+\pi/2)}$, $t > 0$. Имеем:

$$\mathrm{Re}(z_t e^{i\varphi_0}) = \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) + \mathrm{Re}(te^{-i\pi/2}) = \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b(\varphi_0). \tag{2.17}$$

Так как $\gamma \subset J(D)$, то

$$\mathrm{Re}(z_t e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D) = +\infty, \quad \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi).$$

Кроме того, поскольку $z_0 \in D$, то

$$\mathrm{Re}(z_t e^{i\varphi}) = \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi}) + t\mathrm{Re}(e^{-i(\varphi_0+\pi/2-\varphi)}) \leqslant \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D), \quad \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0].$$

Из последних неравенств следует, что

$$\mathrm{Re}(z_t e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D), \quad t > 0, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi],$$

т.е. $z_t \in D$, $t > 0$. Вместе с (2.17) это означает, что множество $B(\varphi_0)$ неограниченно.

Таким образом, все условия леммы 2.5 выполнены. Тогда согласно этой лемме $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda)$. Поскольку D — выпуклая область, то

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, D), \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Поэтому $D \subset D(\Theta(\Lambda))$. Тогда из определения $Q(D, \Lambda)$ легко получаем вложение

$$Q(D(\Theta(\Lambda))) \subset Q(D, \Lambda).$$

Следовательно, $d \in Q(D, \Lambda)$.

Пусть теперь выполнено 2). Тогда по лемме 2.6 ряд (1.1) сходится на любом компакте области D, а значит и в самой области D. Теорема доказана. □

Замечание 2.4. *Согласно теореме 2.7 и лемме 2.6 при выполнении условий этой теоремы поточечная сходимость ряда (1.1) в области D эквивалентна его абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области.*

3. Аналог теорем Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что*
1) общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E, т.е.

$$|d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}| \leqslant A(z) < +\infty, \quad k \geqslant 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad z \in E;$$

2) $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$;

3) если $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(E)} \setminus J(E)\right)$ и $m(\Lambda, \mu) > 0$, то существует $b(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ такое, что множество $B(\varphi_0) = \{z \in E : Re(ze^{i\varphi_0}) \geqslant b(\varphi_0)\}$ неограниченно;

4) если 0 — изолированная точка множества E, то последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ ограничена.
Тогда для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_p ||d||_{m(p)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda),$$

где $D = E(\Theta(\Lambda))$, $\{K_p\} = \mathcal{K}(D)$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.5 $d \in Q(D, \Lambda)$. Следовательно, по лемме 2.6 верно (2.16). В частности, это означает, что ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *Пусть E — область сходимости ряда (1.1) . Из теоремы 3.1 следует, что в ее условиях внутренность множества E всегда является выпуклой и даже $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью, т.е. областью вида*

$$\{z \in \mathbb{C} : Re(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\},$$

где $H(\varphi)$ — полунепрерывная снизу функция.

Замечание 3.2. *Если из теоремы 3.1 изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ее утверждение становится неверным. В подтверждение этого рассмотрим ряд из книги* [1]*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{\lambda_k z}, \quad \lambda_k = \ln\ln k, \quad k \geqslant 1. \tag{3.1}$$

Он сходится как знакочередующийся ряд для всех $z = x < 0$ и расходится в точке $z = 0$. Все условия теоремы 3.1, за исключением условия $\sigma(\Lambda) = 0$, выполнены. В нашем случае $\sigma(\Lambda) = +\infty$. Если бы утверждение теоремы 3.1 было верным, то ряд (3.1) абсолютно сходился бы в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\}$. Однако для любого $x > 0$ и всех достаточно больших номеров k имеем:

$$|e^{\lambda_k x}| = \frac{1}{(\ln k)^x} > \frac{1}{k},$$

т.е. ряд (3.1) абсолютно расходится на отрицательной вещественной полуоси.

Замечание 3.3. *Условие $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$ также существенно. Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} z^{2k-1} e^{kz}.$$

Нетрудно показать, что этот ряд сходится в некоторой области, лежащей в полуплоскости $Rez < -a$, где $a > 1$ выбрано из условия $a > 2(2\ln a + 1)$, и в круге $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$ такое, что $-2^{-1}2\ln r > 3$. В то же время он, очевидно, расходится на окружности $S(0, 1)$. Таким образом, внутренность множества сходимости данного ряда не является выпуклой областью и даже просто областью (она несвязна).

Теорема 3.1 является аналогом теоремы Абеля для степенных рядов, которые являются частными случаями рядов экспонент. Однако, если переформулировать теорему 3.1 для этого частного случая, то в результате получится более слабое утверждение, чем теорема Абеля. Это объясняется тем, что круги, на которых должен абсолютно и равномерно сходиться степенной ряд, при указанном преобразовании переходят в неограниченные множества. В теореме же 3.1 равномерная сходимость гарантируется лишь на компактных подмножествах. Существенно усложнив доказательство этой теоремы, можно показать, что ряд (1.1) все-таки будет равномерно сходиться в некоторых случаях и на неограниченных множествах. Однако эти множества не всегда будут содержать образы кругов при преобразовании переменной, переводящем степенной ряд в ряд экспонент. Рассмотрим ряд

$$\sum (e^{kz} + ze^{kz}). \tag{3.2}$$

Пусть $E = \{0\}$. Имеем: $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. По теореме 3.1 ряд (3.2) сходится в области $E(\Theta(\Lambda)) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z < 0\}$ и равномерно на ее компактах. Можно показать, что ряд (3.2) сходится равномерно и на некоторых неограниченных множествах (например, на углах раствора строго меньше π с вершинами, принадлежащими отрицательной вещественной полуоси). Но он не сходится равномерно ни в какой полуплоскости вида $\Pi(a) = \{z : \mathrm{Re}z < -a\}$, $a > 0$. Рассмотрим теперь ряд

$$\sum e^{kz}. \tag{3.3}$$

Он получается из степенного ряда $\sum w^k$ при помощи преобразования $w = e^z$. Последний сходится в круге $B(0,1)$, а по теореме Абеля он сходится равномерно в любом круге меньшего радиуса. Эти круги при указанном преобразовании переходят в полуплоскости $\Pi(a)$. Следовательно, ряд (3.2) сходится равномерно в каждой из этих полуплоскостей. Такое отличие в множествах равномерной сходимости у рядов (3.2) и (3.3) связано с наличием множителей z в ряде (3.2). Сохраняя подобные множители, нельзя доказать теорему типа теоремы 3.1 так, чтобы ее частным случаем была теорема Абеля для степенных рядов. Однако эту ситуацию можно исправить, отказавшись от сомножителей z^n в ряде (1.1), т.е. рассматривая лишь «чистые» ряды экспонент, что и подтверждается следующим результатом из работы [7].

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество $S(0,1)$. Положим

$$E(\Theta,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, E), e^{i\varphi} \in \Theta\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Отметим, что в случае, когда Θ лежит в некотором угле с вершиной в нуле раствора не больше π множество $E(\Theta,\varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon \geqslant 0$ является неограниченным.

Теорема 3.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$, $\sigma(\Lambda) = 0$, $E \subset \mathbb{C}$ и Θ — замкнутое подмножество $S(0,1)$ такое, что*

$$\overline{\lambda_k}/|\lambda_k| \in \Theta, \quad k \geqslant k_0.$$

Предположим, что общий член ряда (1.1) равномерно ограничен на множестве E, т.е.

$$|d_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A, \quad k \geqslant 1, \quad z \in E. \tag{3.4}$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon,\Lambda) > 0$ такое, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k e^{\lambda_k z}| \leqslant Ac(\varepsilon,\Lambda), \quad z \in E(\Theta,\varepsilon).$$

В частности ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве $E(\Theta,\varepsilon)$.

Замечание 3.4. *Рассмотрим ряд экспонент*

$$\sum d_k e^{kz}, \tag{3.5}$$

в который переходит степенной ряд $\sum d_k w^k$ при преобразовании $w = e^z$. В этом случае $\sigma(\Lambda) = 0$ и для каждого $k \geqslant 1$ верно включение $\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta = \{1\}$. Пусть $E = \{z_0\}$ и верно (3.4). Тогда по теореме 3.2 ряд (3.5) сходится абсолютно и равномерно на множестве $E(\Theta,\varepsilon) = \{z : Rez < Rez_0 - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Это дает нам теорему Абеля для степенного ряда.

В теореме Коши-Адамара приводится формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Аналогом круга для рядов экспонент является полуплоскость (в нее переходит круг при преобразовании $w = e^z$). Аналог радиуса круга — расстояние от начала координат до полуплоскости. Если $\Theta(\Lambda)$ состоит из двух точек, то соответствующая $\Theta(\Lambda)$-выпуклая область сходимости ряда (1.1) является пересечением двух полуплоскостей. У этой области уже два «радиуса сходимости» — расстояния от начала координат до двух прямых, являющихся границами этих полуплоскостей. Если же $\Theta(\Lambda)$ — бесконечное множество, то и соответствующих «радиусов сходимости» ряда (1.1) будет бесконечно много. Следует отметить, что некоторые расстояния нужно брать со знаком минус. Такая ситуация возникает в случае, когда область сходимости не содержит начало координат. Рассмотрим ряд

$$\sum 2^k e^{kz}.$$

Применяя к соответствующему ему степенному ряду теорему Абеля, легко установить, что областью его сходимости является полуплоскость $\{z : \mathrm{Re}z < \ln(1/2)\}$. Чтобы не возникало путаницы, «радиусом сходимости» здесь следует считать величину $-\ln 2$, равную расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость, взятому со знаком минус, а не само расстояние. Поясним сказанное. Рассмотрим еще ряд

$$\sum 2^{-k} e^{kz}.$$

Областью сходимости этого ряда является полуплоскость $\{z : \mathrm{Re} z < \ln 2\}$. Здесь уже «радиус сходимости» равен $\ln 2$, т.е. расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость.

Пусть $e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов d ряда (1.1) положим

$$h_0(d,\varphi) = \inf_{\lambda_{k(j)}} \varliminf_{j\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant n_{k(j)}-1} \frac{-\ln|d_{k(j),n}|}{r_{k(j)}},$$

$$h(d,\varphi) = \inf_{\{\lambda_{k(j)}\}} \inf_{p\in\mathbb{N}} \varliminf_{j\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant n_{k(j)}-1} \frac{-(\ln|d_{k(j),n}| + n\ln p)}{r_{k(j)}},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{i\varphi}$, $j \to \infty$. Из определения функции $h(d,\varphi)$ следует, что она является полунепрерывной снизу. Тогда, как и в лемме 2.4, доказанной в работе [7], показывается, что множество

$$D(d,\Lambda) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < h_0(d,\varphi), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\}$$

является $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью. Из определения величин $h_0(d,\varphi)$ и $h(d,\varphi)$ следует, что в случаях, когда $m(\Lambda, e^{i\varphi}) = 0$ или $m(\Lambda, e^{i\varphi}) < \infty$ и $h_0(d,\varphi) = +\infty$ верно равенство $h_0(d,\varphi) = h(d,\varphi)$.

Теорема 3.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $D(d,\Lambda) \neq \emptyset$,*

$$\sigma(\Lambda) = 0, \quad m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda,\mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D(d,\Lambda))}, \tag{3.6}$$

$$h(d,\varphi) > -\infty, \quad e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(D(d,\Lambda))} \setminus J(D(d,\Lambda))\right). \tag{3.7}$$

Тогда ряд (1.1) сходится в каждой точке области $D(d,\Lambda)$ и расходится в каждой точке ее внешности $\mathbb{C} \setminus \overline{D(d,\Lambda)}$ за исключением начала координат, если ряд $\sum d_{k,0}$ сходится.

Доказательство. Пусть $\{K_p\} = \mathcal{K}(D)$, где $D = D(d,\Lambda)$. Покажем, что $d \in Q(D,\Lambda)$. Предположим, что это неверно. Тогда для некоторого $p \geqslant 1$, т.е. найдется подпоследовательность $\{d_{k(j),n(j)}\}$ такая, что выполнено (2.8) и $\{\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}|\}$ сходится к $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале верно (2.9). Тогда имеет место соотношение (2.11).

Поскольку K_{p+1} — компакт в области D, то из ее определения следует, что

$$H(-\varphi_0, K_{p+1}) \leqslant h_0(d, -\varphi_0) - 2\varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда согласно определению величины $h_0(d,-\varphi_0)$ найдется номер $j_1 \geqslant j_0$ такой, что

$$\frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geqslant H(-\varphi_0, K_{p+1}) + \varepsilon, \quad j \geqslant j_1.$$

В силу непрерывности опорной функции компакта можно считать, что

$$H(-\varphi_0, K_{p+1}) + \varepsilon \geqslant H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}), \quad j \geqslant j_1.$$

Тогда

$$\frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geqslant H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}), \quad j \geqslant j_1.$$

Отсюда получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \leqslant \exp(-r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}), \quad j \geqslant j_1.$$

Это противоречит (2.11).

Пусть теперь (2.9) неверно. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что верно (2.14). Согласно (3.6) возможны два случая.

1. $\mu \in J(D)$.

2. $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap \Big(\overline{J(D)} \setminus J(D)\Big)$.

Как и в лемме 2.5 верно (2.15). Рассмотрим первый случай. Так как $\mu \in J(D)$, то $h_0(d, -\varphi_0) = +\infty$. Поэтому найдется номер j_2 такой, что

$$\frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geqslant b\ln p + b_p, \quad j \geqslant j_2.$$

Отсюда получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \leqslant \exp(-br_{k(j)}\ln p - b_p r_{k(j)}), \quad j \geqslant j_2.$$

Это противоречит (2.15).

Пусть, наконец, $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap \Big(\overline{J(D)} \setminus J(D)\Big)$. Из (3.7) и (2.14) следует, что

$$\frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \to +\infty, \quad j \to \infty.$$

Это противоречит (2.15).

Таким образом $d \in Q(D, \Lambda)$. Тогда по теореме 2.7 ряд (1.1) сходится в области D.

Пусть теперь $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Если $z = 0$ и ряд $\sum d_{k,0}$ сходится, то ряд (1.1) сходится в точке $z = 0$. Пусть $z \neq 0$. По определению области D найдется $e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)$ такое, что

$$\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) > h_0(d, \varphi). \tag{3.8}$$

Согласно определению величины $h_0(d, \varphi)$ существует подпоследовательность

$$\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi},$$

для которой

$$h_0(d, -\varphi) = \lim_{j\to\infty} \frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}}. \tag{3.9}$$

Предположим, что ряд (1.1) сходится в точке z. Тогда ряд (1.1) сходится в каждой точке множества $E = \{z\} \cup D$. Поэтому общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E. Это дает нам условие 1) леммы 2.5. По построению

$$H(\psi, E) = \max\{H(\psi, D), \mathrm{Re}(ze^{-i\psi})\}, \quad \psi \in [0, 2\pi].$$

Следовательно, $J(D) = J(E)$. Тогда из (3.6) получаем условие 2) леммы 2.5. Условие 3) леммы 2.5 выполнено по тем же соображениям, что и в теореме 2.7. Наконец, условие 4) выполнено тривиально, т.к. множество E имеет единственную изолированную точку $z \neq 0$. Тогда согласно лемме 2.5 $d \in Q(D_0, \Lambda)$, где $D_0 = E(\Theta(\Lambda))$.

В силу (3.8) в области D_0 найдется точка z_0 такая, что

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > h_0(d, -\varphi). \tag{3.10}$$

Выберем номер p, для которого компакт $K_{0,p} \in \mathcal{K}(D_0)$ содержит z_0. Так как $d \in Q(D_0, \Lambda)$, то

$$|d_{k,n}| \leqslant Bp^{-n}\exp(-r_k H(-\varphi_k, K_{0,p})) \leqslant B\exp(-r_k H(-\varphi_k, K_{0,p})), \quad k \geqslant 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1},$$

где $B > 0$. Поскольку $z_0 \in K_{0,p}$, то

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_k}) \leqslant H(-\varphi_k, K_{0,p}), \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом предыдущего получаем:

$$|d_{k,n}| \leqslant B\exp(-r_k \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_k})), \quad k \geqslant 1.$$

Тогда в силу (3.10) имеем:

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{-\ln B + r_{k(j)}\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_k})}{r_{k(j)}} = \mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > h_0(d,-\varphi).$$

Это противоречит (3.9). Теорема доказана. □

Замечание 3.5. *В частном случае для ряда (3.5) имеем формулу*

$$h_0(d,0) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|d_k|}{k} = \varliminf_{k\to\infty} (-\ln \sqrt[k]{|d_k|}).$$

Делая преобразование $w = e^z$, переводящее ряд (3.5) в степенной ряд, получаем следующую формулу для радиуса сходимости последнего

$$R = \exp h_0(d,0) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}.$$

Таким образом, мы получили формулу Коши-Адамара для степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
2. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
3. E. Hille. *Note on Dirichlet's series with complex exponents* // Ann. of Math. **25**, 261–278 (1924).
4. Г.Л. Лунц. *О некоторых обобщениях рядов Дирихле* // Матем. сб. **10(52)**:1–2, 35–50 (1942).
5. Г.Л. Лунц. *Об одном классе обобщенных рядов Дирихле* // УМН. **12**:3(75), 173–179 (1957).
6. А.В. Братищев. *Базисы Кете, целые функции и их приложения.* Дисс. докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.
7. О.А. Кривошеева. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимск. матем. журн. **3**:2, 43–56 (2011).
8. К. Лейхтвейс. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru