

УДК 517.9

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХИРОТЫ-МИВЫ

И.Т. ХАБИБУЛЛИН, А.Р. ХАКИМОВА

**Аннотация.** Для нелинейных дискретных уравнений в размерности  $1 + 1$  имеются легко проверяемые симметричные критерии интегрируемости, которые лежат в основе классификационных алгоритмов. Актуальная проблема создания эффективных методов классификации интегрируемых дискретных уравнений с тремя и более независимыми переменными остается открытой, поскольку в многомерье симметричный подход теряет свою эффективность из-за трудностей, связанных с нелокальностями.

В наших недавних работах мы обнаружили характерное свойство дискретных уравнений в  $3D$ , которое, по-видимому, является эффективным критерием интегрируемости трехмерных уравнений. Выяснилось, что многие известные интегрируемые цепочки, включая уравнения типа двумеризованной цепочки Тоды, уравнения типа Тоды с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными, уравнения типа Хироты-Мивы, где все независимые переменные являются дискретными, характеризуются тем, что они допускают обрывы специального вида по одной из дискретных переменных, которые сводят цепочку к системе уравнений с двумя независимыми переменными, обладающей повышенной интегрируемостью, они имеют полные наборы интегралов по каждой из характеристик, т.е. являются интегрируемыми в смысле Дарбу. Другими словами характеристические алгебры полученных конечно-полевых систем имеют конечную размерность. В настоящей работе мы приводим примеры, подтверждающие гипотезу о том, что наличие иерархии интегрируемых в смысле Дарбу двумерных редукций присуще всем интегрируемым дискретным уравнениям типа Хироты-Мивы. А именно мы проверяем, что решеточное уравнение Тоды и ее модифицированный аналог также допускают упомянутые выше редукции.

**Ключевые слова:** интегрируемость, решеточное уравнение Тоды, характеристические интегралы, характеристическая алгебра.

**Mathematics Subject Classification:** 37K10, 37K30

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время полностью дискретные интегрируемые уравнения с тремя независимыми переменными активно изучаются многими авторами (см. [1]–[7]). Наиболее известными представителями этого класса являются такие модели как уравнение Хироты-Мивы,  $Y$ -система, решеточное уравнение Тоды, решеточное уравнение КП, решеточное уравнение Sine-Gordon и др. Широкий класс интегрируемых дискретных моделей в  $3D$  можно найти в работе Ферапонтова и др. [8]. Девять уравнений из списка, приведенного в [8] являются уравнениями типа октаэдра, все они точечными заменами приводятся к виду

$$w_{n+1,m+1}^j = f(w_{n+1,m}^{j-1}, w_{n+1,m}^j, w_{n,m}^j, w_{n,m+1}^j, w_{n,m+1}^{j+1}), \quad (1.1)$$

---

I.T. HABILULLIN, A.R. KHAKIMOVA, ALGEBRAIC REDUCTIONS OF DISCRETE EQUATIONS OF HIROTA-MIWA TYPE.

© ХАБИБУЛЛИН И.Т., ХАКИМОВА А.Р. 2022.

Исследование А.Р. Хакимовой выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Поступила 22 августа 2022 г.

где искомая функция  $u = u_{n,m}^j$  зависит от трех целочисленных аргументов  $j, n, m$ , функция  $f$  определена и является аналитической в некоторой области  $D \subset C^5$ .

Уравнение (1.1) связывает значения неизвестной функции, соответствующие вершинам октаэдра на трехмерной решетке.

В нашей работе [9] была высказана гипотеза, что все интегрируемые уравнения вида (1.1) допускают конечно-полевые редукции в виде систем дискретных уравнений «гиперболического» типа

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1}^1 &= f^1(u_{n+1,m}^1, u_{n,m}^1, u_{n,m+1}^1, u_{n,m+1}^2), \\ u_{n+1,m+1}^j &= f(u_{n+1,m}^{j-1}, u_{n+1,m}^j, u_{n,m}^j, u_{n,m+1}^j, u_{n,m+1}^{j+1}), \quad 2 \leq j \leq N-1, \\ u_{n+1,m+1}^N &= f^N(u_{n+1,m}^{N-1}, u_{n+1,m}^N, u_{n,m}^N, u_{n,m+1}^N), \end{aligned} \quad (1.2)$$

являющихся интегрируемыми в смысле Дарбу. В [9] гипотеза была подтверждена для трех моделей из упомянутого выше списка. Цель настоящей работы, показать, что гипотеза об интегрируемых по Дарбу редукциях справедлива и для двух других моделей из этого класса, а именно, для решеточного уравнения Тоды

$$u_{n+1,m+1}^j = \frac{(u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n+1,m}^j) u_{n,m+1}^j u_{n+1,m}^{j-1}}{u_{n,m}^j (u_{n,m+1}^j - u_{n+1,m}^{j-1})} \quad (1.3)$$

и модифицированного варианта решеточного уравнения Тоды

$$u_{n+1,m+1}^j = \frac{(u_{n+1,m}^j - u_{n+1,m}^{j-1}) (u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m}^j) u_{n,m+1}^j}{u_{n,m}^j (u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m+1}^j)} + u_{n+1,m}^{j-1}. \quad (1.4)$$

Наличие иерархии интегрируемых по Дарбу конечно-полевых редукций является важным свойством уравнения (1.1). Во-первых, поскольку Дарбу интегрируемые уравнения в принципе могут быть решены явно (см., например, работы [10]–[12], где найдены в замкнутом виде общие решения дифференциальных аналогов системы (1.2)), то редукции позволяют найти частные решения исходного трехмерного уравнения. Во-вторых, такие иерархии связаны с характеристическими алгебрами, условие конечномерности которых, можно использовать для вывода условий интегрируемости нелинейных цепочек в 3D (см. [13]–[17]). Отметим, что проблема классификации интегрируемых по Дарбу уравнений в частных производных гиперболического типа активно исследуется начиная с XIX века. Обзор результатов по этой тематике можно найти в работах [18]–[22]. Обобщение метода Дарбу на дифференциально-разностные и чисто дискретные уравнения обсуждается в работах [23]–[27], [6].

Кратко остановимся на содержании работы. В §2 мы поясняем смысл таких понятий, как полный набор интегралов и интегрируемость по Дарбу систем дискретных уравнений. Вводим понятие характеристической алгебры Ли-Райнхарта, формулируем алгебраический критерий интегрируемости по Дарбу. В §§3,4 исследуются системы дискретных уравнений порядков  $N = 2$  и  $N = 3$ , полученные путем наложения специальных условий обрыва из нелинейных цепочек (1.3), (1.4). Показано, что эти четыре системы уравнений являются интегрируемыми в смысле Дарбу. Для них описаны характеристические алгебры по каждому из направлений  $n$  и  $m$ , предъявлены полные наборы интегралов. Отметим, что в случае  $N = 1$  система (1.2) для обоих цепочек (1.3), (1.4) вырождается в одно и то же скалярное уравнение:

$$u_{n+1,m+1} = \frac{u_{n+1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m}},$$

которое также является интегрируемым по Дарбу, его интегралы имеют вид:

$$I = \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}, \quad J = \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}}.$$

Результаты работы подтверждают гипотезу о том, что наличие иерархии Дарбу интегрируемых редукций вида (1.2) является критерием интегрируемости трехмерных цепочек вида (1.1).

## 2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

В этом разделе мы обсудим понятие интегрируемости в смысле Дарбу системы дискретных уравнений гиперболического типа

$$u_{n+1,m+1} = f(n, m, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}), \quad (2.1)$$

где искомый объект  $u = u_{n,m}$  является векторно-значной функцией  $u = (u^1, u^2, \dots, u^N)^T$ , компоненты которой зависят от двух целочисленных переменных  $n$  и  $m$ . Правая часть уравнения имеет вид  $f = (f^1, f^2, \dots, f^N)^T$ . Поскольку все вершины прямоугольного графа, на котором задано уравнение (2.1) являются равноправными, то предполагается, что уравнение (2.1) однозначно разрешимо относительно каждой из переменных  $u_{n,m}$ ,  $u_{n+1,m}$ ,  $u_{n,m+1}$ , т.е. справедливы еще три соотношения

$$\begin{aligned} u_{n+1,m-1} &= f^{1,-1}(n, m, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m-1}), \\ u_{n-1,m+1} &= f^{-1,1}(n, m, u_{n,m}, u_{n-1,m}, u_{n,m+1}), \\ u_{n-1,m-1} &= f^{-1,-1}(n, m, u_{n,m}, u_{n-1,m}, u_{n,m-1}). \end{aligned}$$

В основе интегрируемости по Дарбу лежит понятие характеристического интеграла. Впервые это понятие было введено Дарбу в работе [28] при исследовании уравнения в частных производных гиперболического типа  $u_{x,y} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ .

**Определение 2.1.** *Функция вида*

$$I = I(n, m, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \dots, u_{n+s,m}), \quad k, s \geq 0, \quad (2.2)$$

зависящая от  $n, m$  и сдвигов по  $n$  динамической переменной  $u_{n,m}$ , называется  $m$ -интегралом системы (2.1) порядка  $k + s$ , если существует пара чисел  $k_1, k_2 = 1, \dots, N$ , что произведение

$$\frac{\partial I}{\partial u_{n+s,m}^{k_1}} \cdot \frac{\partial I}{\partial u_{n-k,m}^{k_2}}$$

отлично от тождественного нуля и для любого натурального  $r$  выполняется следующее равенство  $D_m^r I = I$  или, в более развернутом виде

$$D_m^r I(n, m, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \dots, u_{n+s,m}) = I(n, m + r, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \dots, u_{n+s,m}), \quad (2.3)$$

где все смешанные сдвиги переменной  $u_{n,m}$  исключены в силу системы (2.1).

Функция вида  $I = I(n)$  называется тривиальным  $m$ -интегралом.

Здесь  $D_m$  обозначает сдвиг аргумента  $m$ , например,  $D_m u(m) = u(m + 1)$ .

**Замечание 2.1.** Устоявшийся в литературе термин «интеграл» для функции  $I$ , введенный по аналогии с дифференциальной версией системы (2.1) (см., например, [23]), не совсем соответствует смыслу равенства (2.3). Возможно более подходящим был бы термин инвариант оператора сдвига  $D_m$ .

Поскольку операторы  $D_n$  и  $D_m$  коммутируют, то оператор  $D_n$  переводит  $m$ -интеграл снова в  $m$ -интеграл. Поэтому в формуле (2.2) можно положить  $k = 0$ .

**Определение 2.2.** Будем говорить, что система (1.2) допускает полный набор  $m$ -интегралов, если существует набор интегралов

$$I^j(n, m, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+s_j}), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

что выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial I^1}{\partial u_{n,m}^1} & \frac{\partial I^1}{\partial u_{n,m}^2} & \cdots & \frac{\partial I^1}{\partial u_{n,m}^N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial I^N}{\partial u_{n,m}^1} & \frac{\partial I^N}{\partial u_{n,m}^2} & \cdots & \frac{\partial I^N}{\partial u_{n,m}^N} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5)$$

Система уравнений (1.2) называется интегрируемой по Дарбу, если она допускает полные наборы интегралов по каждому из характеристических направлений  $n$  и  $m$ .

Эффективный критерий интегрируемости системы гиперболических уравнений в смысле Дарбу выражается в терминах характеристической алгебры. Важность понятия характеристической алгебры при исследовании систем гиперболических уравнений экспоненциального типа была осознана в работах [29], [10], где это понятие и было введено.

Назовем операторы

$$Y_{j,1} = D_m^{-1} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}^j} D_m, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

характеристическими операторами первого порядка в направлении  $m$ . В [9] доказано, что любой  $m$ -интеграл является решением системы уравнений

$$Y_{j,1}I = 0, \quad X_{j,1}I = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.7)$$

где

$$X_{j,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}^j}. \quad (2.8)$$

Кроме того  $m$ -интегралы лежат в ядре высших характеристических операторов по  $m$ , которые имеют вид

$$Y_{j,k} = D_m^{-k} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}^j} D_m^k - X_{j,k-1}, \quad \text{где} \quad X_{j,k} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-k}^j}, \quad (2.9)$$

где  $k \geq 2$ .

Заметим, что операторы  $Y_{j,k}$  можно представить в виде векторных полей. Например, для операторов первого порядка имеем

$$\begin{aligned} Y_{j,1} = & \frac{\partial}{\partial u_{n,m}^j} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} \left( \frac{\partial f^s}{\partial u_{n,m+1}^j} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}^s} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} \left( \frac{\partial f^{-1,1,s}}{\partial u_{n,m+1}^j} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}^s} \\ & + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} \left( \frac{\partial f_{10}^s}{\partial u_{n,m+1}^j} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n+2,m}^s} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} \left( \frac{\partial f_{-10}^{-1,1,s}}{\partial u_{n,m+1}^j} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n-2,m}^s} + \dots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $f^s$ ,  $f^{-1,1,s}$ ,  $f_{10}^s$ ,  $f_{-10}^{-1,1,s}$  компоненты векторов  $f$ ,  $f^{-1,1}$ ,  $f_{10}$ ,  $f_{-10}^{-1,1}$  с номером  $s$ ,  $f_{i0} = f(u_{n+i,m}, u_{n+i+1,m}, u_{n+i,m+1})$ ,  $i \neq 0$ .

Для построения векторных полей, соответствующих высшим характеристическим операторам, можно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} Y_{j,k+1} = & \sum_{s=1}^N D_m^{-1} (Y_{j,k}(f^s)) \frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}^s} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} (Y_{j,k}(f^{-1,1,s})) \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}^s} \\ & + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} (Y_{j,k}(f_{10}^s)) \frac{\partial}{\partial u_{n+2,m}^s} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1} (Y_{j,k}(f_{-10}^{-1,1,s})) \frac{\partial}{\partial u_{n-2,m}^s} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Напомним определение характеристической алгебры в направлении  $m$  (см. [9]). При этом нам понадобится некоторое обобщение понятия алгебры Ли, в котором допускается умножение операторов не только на константы, но и на некоторые функции.

**Определение 2.3** ([30], [31]). Пусть  $R$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и  $A$  — коммутативная  $R$ -алгебра. Пара  $(A, L)$  называется алгеброй Ли-Райнхарта, если

1)  $L$  является алгеброй Ли над  $R$ , которая действует на  $A$  левыми дифференцированиями, т.е.

$$X(ab) = X(a)b + aX(b) \quad \text{для всех } a, b \in A, X \in L;$$

2) алгебра Ли  $L$  является  $A$ -модулем.

Пара  $(A, L)$  должна удовлетворять следующим условиям совместности

$$[X, aY] = X(a)Y + a[X, Y] \quad \text{для всех } X, Y \in L, a \in A;$$

$$(aX)(b) = a(X(b)) \quad \text{для всех } a, b \in A, X \in L.$$

**Определение 2.4.** Предположим, что семейство характеристических операторов по направлению  $t$  системы (1.2) удовлетворяет следующим двум условиям:

1)  $\forall j$  существует число  $s(j)$ , что любой оператор  $Y_{j,k}$ , линейно выражается через операторы

$$Y_{j,1}, Y_{j,2}, Y_{j,3}, \dots, Y_{j,s(j)} \quad (2.12)$$

с коэффициентами, зависящими от динамических переменных:

$$Y_{j,k} = \lambda_1 Y_{j,1} + \lambda_2 Y_{j,2} + \lambda_3 Y_{j,3} + \dots + \lambda_{s(j)} Y_{j,s(j)}; \quad (2.13)$$

2) алгебра Ли-Райнхарта  $L_m$ , порожденная операторами  $\{X_{j,k}, Y_{j,k}\}_{j=1, k=1}^{N,K}$ , где  $K = \max s(j)$  над полем рациональных функций от динамических переменных из следующего класса:

$$S_k = \{u_{n,m-j}\}_{j=1}^K \cup \{u_{n+i,m}\}_{i=-\infty}^{+\infty}, \quad (2.14)$$

имеет конечную размерность.

Алгебру  $L_m$  будем называть характеристической алгеброй по направлению  $t$ . При выполнении условий 1) и 2) будем говорить, что система (1.2) допускает конечномерную характеристическую алгебру по направлению  $t$ .

**Замечание 2.2.** Примеры характеристических алгебр приведены в разделах 3 и 4. В алгебрах, рассмотренных в §3, для  $\forall j$   $s(j) = 1$ . В алгебрах  $L_m$  из §4 числа  $s(j)$  также равны единице, в то время как для алгебр  $L_n$   $s(j) = 2$ .

Связь интегралов и характеристической алгебры выражается в следующем критерии. Для систем дифференциальных уравнений такие критерии давно известны (см., например, [32]).

**Теорема 2.1** ([9]). Система (1.2) допускает полный набор  $t$ -интегралов тогда и только тогда, когда она допускает конечномерную характеристическую алгебру по направлению  $t$ .

Другими словами, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2** ([9]). Система (1.2) является интегрируемой в смысле Дарбу тогда и только тогда, когда она допускает конечномерную характеристическую алгебру по обоим направлениям  $t$  и  $n$ .

Отображение, переводящее оператор  $Z \in L_m$  в оператор  $D_n Z D_n^{-1}$ , является автоморфизмом алгебры  $L_m$ . Это следует из соотношений, задающих действие отображения на генераторах алгебры:

$$D_n X_{j,k} D_n^{-1} = \sum_{i=1}^N \sum_{s=k}^K \alpha_{j,k,i,s} X_{i,s}, \quad (2.15)$$

$$D_n Y_{j,k} D_n^{-1} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{s=1}^k \beta_{j,k,i,s} Y_{i,s} + \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{j,k,i,s} X_{i,s} \right) - D_n X_{j,k-1} D_n^{-1}, \quad (2.16)$$

где коэффициенты определяются согласно равенствам:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k,i,s} &= D_n (X_{j,k} D_m^{1-s} f^{-1,1,i}), \\ \beta_{j,k,i,s} &= D_m^{-k} \left( D_n \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}^j} D_m^{k-s} f^{-1,1,i} \right), \\ \gamma_{j,k,i,s} &= D_m^{-k} \left( D_n \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}^j} D_m^{k-s-1} f^{-1,1,i} \right), \end{aligned}$$

где  $f^{-1,1,i}$  совпадает с  $i$ -той компонентой вектора  $f^{-1,1}$ .

Ключевую роль при исследовании характеристической алгебры  $L_m$  имеет следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *Допустим, что векторное поле*

$$K = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha^j(k) \frac{\partial}{\partial u_{n+k,m}^j} + \alpha^j(-k) \frac{\partial}{\partial u_{n-k,m}^j} \right),$$

удовлетворяет условию

$$D_n K D_n^{-1} = hK, \quad (2.17)$$

с некоторым множителем  $h$ , тогда  $K = 0$ .

Аналог Леммы 2.1 применительно к случаю систем дифференциальных уравнений гиперболического типа использовал в своих работах А.Б. Шабат (см., например, [32]).

### 3. РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ТОДЫ

Накладывая на цепочку (1.3) формальные условия обрыва  $u_{n,m}^0 = \infty$ ,  $u_{n,m}^{N+1} = 0$ , получим систему дискретных уравнений вида (1.2):

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1}^1 &= -\frac{(u_{n,m+1}^2 - u_{n+1,m}^1) u_{n,m+1}^1}{u_{n,m}^1}, \\ u_{n+1,m+1}^j &= \frac{(u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n+1,m}^j) u_{n,m+1}^j u_{n+1,m}^{j-1}}{u_{n,m}^j (u_{n,m+1}^j - u_{n+1,m}^{j-1})}, \quad 2 \leq j \leq N-1, \\ u_{n+1,m+1}^N &= -\frac{u_{n+1,m}^N u_{n,m+1}^N u_{n+1,m}^{N-1}}{u_{n,m}^N (u_{n,m+1}^N - u_{n+1,m}^{N-1})}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ниже мы покажем, что при  $N = 2$  и  $N = 3$  система (3.1) является интегрируемой по Дарбу. Для этого в обоих случаях мы предъявим конечные базисы для характеристических алгебр и построим полные наборы  $m$ -интегралов и  $n$ -интегралов.

**3.1. Случай  $N = 2$ .** В этом случае (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1} &= -\frac{(w_{n,m+1} - u_{n+1,m}) u_{n,m+1}}{u_{n,m}}, \\ w_{n+1,m+1} &= -\frac{w_{n+1,m} w_{n,m+1} u_{n+1,m}}{w_{n,m} (w_{n,m+1} - u_{n+1,m})}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $u_{n,m} := u_{n,m}^1$ ,  $w_{n,m} := u_{n,m}^2$ .

Построим характеристические операторы системы (3.2). В силу формулы (2.8) находим, что операторы  $X_{1,1}$  и  $X_{2,1}$  имеют вид:  $X_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$ ,  $X_{2,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$ . Операторы  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$  находим по формуле (2.10), где

$$\begin{aligned} f^1 &= -\frac{(w_{n,m+1} - u_{n+1,m})u_{n,m+1}}{u_{n,m}}, \\ f^2 &= -\frac{w_{n+1,m}w_{n,m+1}u_{n+1,m}}{w_{n,m}(w_{n,m+1} - u_{n+1,m})}, \\ f^{-1,1,1} &= \frac{u_{n,m+1}u_{n-1,m}(u_{n,m}w_{n,m} + w_{n,m+1}w_{n-1,m})}{u_{n,m}^2w_{n,m}}, \\ f^{-1,1,2} &= \frac{w_{n,m+1}w_{n-1,m}u_{n,m}}{u_{n,m}w_{n,m} + w_{n,m+1}w_{n-1,m}}. \end{aligned}$$

Здесь  $u_{n+1,m+1} = f^1$ ,  $w_{n+1,m+1} = f^2$ ,  $u_{n-1,m+1} = f^{-1,1,1}$ ,  $w_{n-1,m+1} = f^{-1,1,2}$ . Приведем явно несколько коэффициентов векторных полей  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$ :

$$\begin{aligned} Y_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n,m}} + \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}} + \frac{u_{n-1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}} + \dots, \\ Y_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial w_{n,m}} - \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}} + \left( \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} + \frac{u_{n,m}w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}} \right) \frac{\partial}{\partial w_{n+1,m}} \\ &\quad + \frac{u_{n-1,m}w_{n-1,m}}{w_{n,m}u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}} + \frac{w_{n-1,m}(u_{n,m-1} - w_{n-1,m})}{w_{n,m}u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}} + \dots \end{aligned}$$

Найдем коммутаторы операторов  $X_{1,1}$ ,  $X_{2,1}$ ,  $Y_{1,1}$  и  $Y_{2,1}$ :

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= [X_{1,1}, Y_{1,1}] = 0, \\ R_{2,1} &= [X_{1,1}, Y_{2,1}] = \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}^2} \frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}} - \frac{u_{n,m}w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}^2} \frac{\partial}{\partial w_{n+1,m}} \\ &\quad - \frac{u_{n-1,m}w_{n-1,m}}{w_{n,m}u_{n,m-1}^2} \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}} + \frac{w_{n-1,m}^2}{w_{n,m}u_{n,m-1}^2} \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}} + \dots, \\ R_{3,1} &= [X_{2,1}, Y_{1,1}] = 0, \quad R_{4,1} = [X_{2,1}, Y_{2,1}] = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** *Набор операторов  $X_{1,1}$ ,  $X_{2,1}$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$ ,  $R_{2,1}$  составляет базис в характеристической алгебре  $L_m$  системы (3.2), т.е.  $\dim L_m = 5$ .*

*Доказательство.* Докажем сначала, что коммутаторы оператора  $R_{2,1}$  с операторами  $X_{1,1}$ ,  $X_{2,1}$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$  образуют линейно зависимые операторы. Для этого уточним действие автоморфизма  $Z \rightarrow D_n Z D_n^{-1}$  на перечисленные операторы. Пользуясь формулами (2.15), (2.16), найдем:

$$\begin{aligned} D_n X_{1,1} D_n^{-1} &= \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}} X_{1,1} - \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m} w_{n,m-1}}{u_{n+1,m} u_{n,m-1} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} X_{2,1}, \\ D_n X_{2,1} D_n^{-1} &= \frac{w_{n,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})}{u_{n+1,m} u_{n,m-1} w_{n+1,m}} X_{2,1}, \\ D_n Y_{1,1} D_n^{-1} &= \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}} Y_{1,1}, \\ D_n Y_{2,1} D_n^{-1} &= \frac{w_{n,m}}{w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} (u_{n,m}^2 Y_{1,1} + u_{n+1,m} u_{n,m-1} Y_{2,1}), \\ D_n R_{2,1} D_n^{-1} &= \frac{u_{n,m} w_{n,m}}{w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} \left( u_{n,m-1} R_{2,1} - \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}} X_{1,1} + \frac{u_{n,m} w_{n,m-1}}{u_{n+1,m} u_{n,m-1}} X_{2,1} \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$- \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})^2} (u_{n,m} Y_{1,1} - w_{n,m} Y_{2,1}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению действия автоморфизма на операторы  $P_{1,1} = [X_{1,1}, R_{2,1}]$ ,  $P_{2,1} = [X_{2,1}, R_{2,1}]$ ,  $Q_{1,1} = [Y_{1,1}, R_{2,1}]$ ,  $Q_{2,1} = [Y_{2,1}, R_{2,1}]$ . В данном случае имеем:

$$\begin{aligned} D_n P_{1,1} D_n^{-1} &= \frac{2u_{n,m}^3 w_{n,m}}{w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})^3} (u_{n,m} Y_{1,1} - w_{n,m} Y_{2,1}) \\ &\quad + \frac{2u_{n,m}^3 w_{n,m}}{u_{n+1,m} w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})^2} (w_{n,m} R_{2,1} + X_{1,1} \\ &\quad - \frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m-1}} X_{2,1} + \frac{u_{n,m-1} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})}{2u_{n,m}} P_{1,1}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$D_n P_{2,1} D_n^{-1} = \frac{u_{n,m} w_{n,m}^2}{u_{n+1,m} w_{n+1,m}^2} P_{2,1},$$

$$D_n Q_{1,1} D_n^{-1} = \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m} u_{n,m-1}}{u_{n+1,m} w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} Q_{1,1},$$

$$D_n Q_{2,1} D_n^{-1} = \frac{u_{n,m} w_{n,m}^2 u_{n,m-1}}{w_{n+1,m}^2 (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})^2} (u_{n,m}^2 Q_{1,1} + u_{n+1,m} u_{n,m-1} Q_{2,1}).$$

Пользуясь первым из соотношений (3.4), легко проверить, что имеет место равенство:

$$D_n \left( P_{1,1} - \frac{2}{u_{n,m-1}} R_{2,1} \right) D_n^{-1} = \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m} u_{n,m-1}}{u_{n+1,m} w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} \left( P_{1,1} - \frac{2}{u_{n,m-1}} R_{2,1} \right).$$

Отсюда, в силу Леммы 2.1, найдем равенство:  $P_{1,1} = \frac{2}{u_{n,m-1}} R_{2,1}$ . Из соотношений (3.4) и Леммы 2.1 вытекает, что  $P_{2,1} = Q_{1,1} = Q_{2,1} = 0$ .

Теперь покажем, что высшие операторы  $Y_{1,2}$ ,  $Y_{2,2}$  также линейно выражаются через  $R_{2,1}$ . Вычислим действие автоморфизма  $Z \rightarrow D_n Z D_n^{-1}$  на высшие операторы  $Y_{1,2}$  и  $Y_{2,2}$ . Воспользуемся формулами (2.16) и найдем:

$$\begin{aligned} D_n Y_{1,2} D_n^{-1} &= - \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{u_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})} \left( X_{1,1} - \frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m-1}} X_{2,1} - \frac{u_{n+1,m} u_{n,m-1}}{u_{n,m} w_{n,m}} Y_{1,2} \right) \\ &\quad - \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{(u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})^2} (u_{n,m} Y_{1,1} - w_{n,m} Y_{2,1}), \\ D_n Y_{2,2} D_n^{-1} &= \frac{u_{n,m} w_{n,m} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})}{w_{n+1,m} (u_{n,m} w_{n,m} u_{n,m-2} + u_{n+1,m} u_{n,m-1} u_{n,m-2} + u_{n,m} u_{n,m-1} w_{n,m-1})} \\ &\quad \cdot \left( \frac{u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}} X_{1,1} - \frac{w_{n,m-1}}{w_{n+1,m}} X_{2,1} + \frac{u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}} Y_{1,2} + \frac{u_{n,m-2} (u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1})}{u_{n+1,m} u_{n,m-1} u_{n,m}} Y_{2,2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{n,m} u_{n,m-1}}{u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1}} Y_{1,1} - \frac{w_{n,m} u_{n,m-1}}{u_{n,m} w_{n,m} + u_{n+1,m} u_{n,m-1}} Y_{2,1} \right). \end{aligned}$$

Из найденных соотношений с учетом аналогичной формулы (3.3) для оператора  $R_{2,1}$  и в силу Леммы 2.1 легко видеть, что  $Y_{1,2} = w_{n,m} R_{2,1}$ ,  $Y_{2,2} = -\frac{u_{n,m-1}^2}{u_{n,m-2}} R_{2,1}$ .  $\square$

Таким образом, мы доказали что алгебра  $L_m$  пятимерна, следовательно  $m$ -интеграл минимального порядка зависит от пяти переменных. Будем искать  $m$ -интеграл в виде



$I = I(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, w_{n+1,m}, w_{n-1,m})$ , удовлетворяющий системе уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \quad Y_{2,1}I = 0; \quad R_{2,1}I = 0,$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial u_{n,m}} + \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial w_{n,m}} - \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}} \frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} + \left( \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} + \frac{u_{n,m}w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}} \right) \frac{\partial I}{\partial w_{n+1,m}} \\ &+ \frac{w_{n-1,m}(u_{n,m-1} - w_{n-1,m})}{w_{n,m}u_{n,m-1}} \frac{\partial I}{\partial w_{n-1,m}} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}} \frac{\partial I}{\partial w_{n+1,m}} + \frac{w_{n-1,m}^2}{u_{n,m}w_{n,m}} \frac{\partial I}{\partial w_{n-1,m}} &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем полный набор  $m$ -интегралов:

$$I_1 = \frac{u_{n+1,m}w_{n+1,m}}{u_{n,m}w_{n,m}}, \quad I_2 = \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n-1,m}}.$$

Аналогично можно показать, что  $\dim L_n = 5$ , базис состоит из операторов:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}, \quad \tilde{X}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}, \\ \tilde{Y}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n,m}} + \left( \frac{u_{n,m+1}w_{n,m+1}w_{n-1,m}}{u_{n,m}^2w_{n,m}} + \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} - \frac{w_{n,m+1}^2w_{n-1,m}}{u_{n,m}^2w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\ &+ \frac{u_{n,m-1} - w_{n-1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{w_{n-1,m}w_{n,m-1}}{u_{n,m}u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots, \\ \tilde{Y}_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial w_{n,m}} + \frac{w_{n,m+1}}{w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m-1}}{w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots, \\ \tilde{R}_{3,1} &= [\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,1}] = \frac{u_{n,m+1}w_{n,m+1}}{u_{n,m}^2w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} - \frac{w_{n,m+1}^2}{u_{n,m}^2w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\ &- \frac{1}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m}u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Соответственно, искомые  $n$ -интегралы системы (3.2) удовлетворяют системе уравнений

$$\tilde{Y}_{1,1}J = 0; \quad \tilde{Y}_{2,1}J = 0; \quad \tilde{R}_{3,1}J = 0, \quad \text{где } J = J(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1})$$

и имеют вид:

$$J_1 = \frac{u_{n,m+1}w_{n,m+1}}{u_{n,m}w_{n,m}}, \quad J_2 = \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n,m+1}}.$$

**3.2. Случай  $N = 3$ .** В этом случае система (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1} &= -\frac{(v_{n,m+1} - u_{n+1,m})u_{n,m+1}}{u_{n,m}}, \\ v_{n+1,m+1} &= \frac{(w_{n,m+1} - v_{n+1,m})v_{n,m+1}u_{n+1,m}}{v_{n,m}(v_{n,m+1} - u_{n+1,m})}, \\ w_{n+1,m+1} &= -\frac{w_{n+1,m}w_{n,m+1}v_{n+1,m}}{w_{n,m}(w_{n,m+1} - v_{n+1,m})}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где  $u_{n,m} := u_{n,m}^1$ ,  $v_{n,m} := u_{n,m}^2$ ,  $w_{n,m} := u_{n,m}^3$ .

По аналогии с предыдущим примером, можно показать, что базис алгебры  $L_m$  системы (3.5), состоит из операторов  $X_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$ ,  $X_{2,1} = \frac{\partial}{\partial v_{n,m-1}}$ ,  $X_{3,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$ ,  $Y_{3,1}$ ,  $R = [X_{1,1}, Y_{3,1}]$ ,  $P = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$ ,  $Q = [X_{2,1}, Y_{3,1}]$ , т.е.  $\dim L_m = 9$ .

Решая систему линейных уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \quad Y_{2,1}I = 0; \quad Y_{3,1}I = 0; \quad RI = 0; \quad PI = 0; \quad QI = 0,$$

на неизвестную  $I = I(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, v_{n+1,m}, w_{n+1,m}, v_{n-1,m}, w_{n-1,m}, u_{n+2,m})$  найдем полный набор  $m$ -интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u_{n+1,m}v_{n+1,m}w_{n+1,m}}{u_{n,m}v_{n,m}w_{n,m}}, \\ I_2 &= \frac{v_{n,m}w_{n,m}}{v_{n-1,m}w_{n-1,m}} + \frac{w_{n,m}u_{n+1,m}}{w_{n-1,m}u_{n,m}} + \frac{u_{n+1,m}v_{n+1,m}}{u_{n,m}v_{n,m}}, \\ I_3 &= \frac{u_{n+2,m}}{u_{n+1,m}} + \frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n-1,m}}. \end{aligned}$$

Кратко остановимся на алгебре  $L_n$  для (3.5), ее базис состоит из операторов  $\tilde{X}_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{X}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial v_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{X}_{3,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{Y}_{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_{2,1}$ ,  $\tilde{Y}_{3,1}$ ,  $\tilde{R} = [\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,1}]$ ,  $\tilde{P} = [\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{1,1}]$ ,  $\tilde{Q} = [\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{2,1}]$ . Приведем полный набор независимых  $n$ -интегралов системы (3.5):

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{u_{n,m+1}v_{n,m+1}w_{n,m+1}}{u_{n,m}v_{n,m}w_{n,m}}, \\ J_2 &= \frac{u_{n,m-1}v_{n,m-1}}{u_{n,m}v_{n,m}} + \frac{u_{n,m-1}w_{n,m}}{u_{n,m}w_{n,m+1}} + \frac{v_{n,m}w_{n,m}}{v_{n,m+1}w_{n,m+1}}, \\ J_3 &= \frac{w_{n,m+1}}{w_{n,m+2}} + \frac{v_{n,m}}{v_{n,m+1}} + \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}}. \end{aligned}$$

#### 4. МОДИФИЦИРОВАННОЕ РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ТОДЫ

В этом разделе мы исследуем Дарбу интегрируемые редукции модифицированного решеточного уравнения Тоды (1.4), соответствующие случаям  $N = 2$  и  $N = 3$ .

Конечно-полевая система для (1.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1}^1 &= \frac{(u_{n,m+1}^2 - u_{n,m}^1) u_{n+1,m}^1 u_{n,m+1}^1}{u_{n,m}^1 (u_{n,m+1}^2 - u_{n,m+1}^1)}, \\ u_{n+1,m+1}^j &= \frac{(u_{n+1,m}^j - u_{n+1,m}^{j-1}) (u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m}^j) u_{n,m+1}^j}{u_{n,m}^j (u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m+1}^j)} + u_{n+1,m}^{j-1}, \\ u_{n+1,m+1}^N &= \frac{(u_{n+1,m}^N - u_{n+1,m}^{N-1}) u_{n,m+1}^N + u_{n,m}^N u_{n+1,m}^{N-1}}{u_{n,m}^N}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $2 \leq j \leq N - 1$ . Систему (4.1) можно получить наложением следующих формальных условий обрыва:

$$u_{n,m}^0 = 0, \quad u_{n,m}^{N+1} = \infty.$$

**4.1. Случай  $N = 2$ .** Здесь мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1} &= \frac{(w_{n,m+1} - u_{n,m}) u_{n+1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m} (w_{n,m+1} - u_{n,m+1})}, \\ w_{n+1,m+1} &= \frac{(w_{n+1,m} - u_{n+1,m}) w_{n,m+1}}{w_{n,m}} + u_{n+1,m}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $u_{n,m} := u_{n,m}^1$ ,  $w_{n,m} := u_{n,m}^2$ .

По аналогии с предыдущими примерами построим базис для  $L_m$ . Он состоит из пяти операторов  $X_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$ ,  $X_{2,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$ ,  $R = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$ , а искомые  $m$ -интегралы имеют вид:

$$I_1 = \frac{u_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}, \quad I_2 = \frac{u_{n,m}w_{n-1,m}}{u_{n+1,m}(u_{n,m} - w_{n,m})}.$$

Остановимся на характеристической алгебре  $L_n$  системы (4.2) более подробно, поскольку данный случай отличается от ранее исследованных примеров. А именно, для построения  $n$ -интегралов системы (4.2) необходимо воспользоваться также высшими операторами. Построим сначала характеристические операторы первого порядка  $\tilde{Y}_{1,1}$  и  $\tilde{Y}_{2,1}$ , пользуясь формулой (2.10). Выпишем несколько первых коэффициентов этих операторов:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n,m}} + \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m+1} - w_{n,m}}{u_{n,m} - w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\ &\quad + \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{u_{n,m-1}(w_{n,m} - w_{n,m-1})}{u_{n,m}(w_{n,m} - u_{n,m-1})} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \frac{u_{n,m+2}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+2}} + \dots, \\ \tilde{Y}_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial w_{n,m}} + \frac{w_{n,m+1} - u_{n,m}}{w_{n,m} - u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m-1} - u_{n,m-1}}{w_{n,m} - u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Легко проверить, что коммутаторы операторов  $\tilde{Y}_{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_{2,1}$  и  $\tilde{X}_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{X}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$  равны нулю. Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\tilde{X}_{1,1}J = 0, \quad \tilde{X}_{2,1}J = 0, \quad \tilde{Y}_{1,1}J = 0, \quad \tilde{Y}_{2,1}J = 0$$

имеет нетривиальное решение. Однако это решение не является интегралом системы (4.2). Другими словами, характеристическая алгебра имеет более высокую размерность и для ее построения нужно исследовать также и высшие характеристические операторы. Найдем сначала операторы второго порядка  $\tilde{Y}_{1,2}$ ,  $\tilde{Y}_{2,2}$ . Вычислим первые несколько коэффициентов этих операторов, пользуясь формулой (2.11):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{1,2} &= \frac{(w_{n,m} - u_{n,m})(u_{n,m+1} - u_{n,m})u_{n,m+1}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})(w_{n,m+1} - u_{n,m})u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m+1} - w_{n,m}}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\ &\quad + \frac{(u_{n,m} - u_{n,m-1})u_{n,m-1}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{(w_{n,m} - u_{n,m})(w_{n,m} - w_{n,m-1})u_{n,m-1}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})(w_{n,m} - u_{n,m-1})u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots, \\ \tilde{Y}_{2,2} &= \frac{(w_{n,m} - u_{n,m})(u_{n,m+1} - u_{n,m})u_{n,m+1}u_{n-1,m}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})(w_{n,m+1} - u_{n,m})u_{n,m}w_{n-1,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} \\ &\quad + \frac{(w_{n,m+1} - w_{n,m})u_{n-1,m}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})w_{n-1,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{(u_{n,m} - u_{n,m-1})u_{n,m-1}u_{n-1,m}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})u_{n,m}w_{n-1,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} \\ &\quad + \frac{(w_{n,m} - u_{n,m})(w_{n,m} - w_{n,m-1})u_{n,m-1}u_{n-1,m}}{(w_{n-1,m} - u_{n-1,m})(w_{n,m} - u_{n,m-1})u_{n,m}w_{n-1,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Можно показать, что  $\tilde{Y}_{2,2} = \frac{u_{n-1,m}}{w_{n-1,m}} \tilde{Y}_{1,2}$ , а коммутаторы оператора  $\tilde{Y}_{1,2}$  с  $\tilde{X}_{1,1}$  и  $\tilde{X}_{2,1}$  имеют

вид:  $[\tilde{X}_{1,1}, \tilde{Y}_{1,2}] = \frac{1}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}} \tilde{Y}_{1,2}$ ,  $[\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,2}] = -\frac{1}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}} \tilde{Y}_{1,2}$ . Следовательно,

можем предположить, что характеристическая алгебра  $L_n$  состоит из операторов  $\tilde{X}_{1,1}$ ,  $\tilde{X}_{2,1}$ ,  $\tilde{Y}_{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_{2,1}$ ,  $\tilde{Y}_{1,2}$ . Решая линейную систему уравнений

$$\tilde{Y}_{1,1}J = 0; \quad \tilde{Y}_{2,1}J = 0; \quad \tilde{Y}_{1,2}J = 0, \quad \text{где } J = J(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1}),$$

находим функции:

$$J_1 = \frac{w_{n,m} - u_{n,m}}{w_{n,m+1} - u_{n,m}} + \frac{u_{n,m}(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{u_{n,m+1}(w_{n,m+1} - u_{n,m})},$$

$$J_2 = \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}} - \frac{u_{n,m}(w_{n,m+1} - u_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})}{u_{n,m-1}(u_{n,m} - w_{n,m})(u_{n,m+1} - u_{n,m})}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные функции образуют полный набор  $n$ -интегралов. Следовательно, система (4.2) является интегрируемой в смысле Дарбу.

**4.2. Случай  $N = 3$ .** Формальные условия обрыва  $u_{n,m}^0 = 0$ ,  $u_{n,m}^4 = \infty$  приводят цепочку (1.4) к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1} &= \frac{(v_{n,m+1} - u_{n,m})u_{n+1,m}u_{n,m+1}}{u_{n,m}(v_{n,m+1} - u_{n,m+1})}, \\ v_{n+1,m+1} &= \frac{(v_{n+1,m} - u_{n+1,m})(w_{n,m+1} - v_{n,m})v_{n,m+1}}{v_{n,m}(w_{n,m+1} - v_{n,m+1})} + u_{n+1,m}, \\ w_{n+1,m+1} &= \frac{(w_{n+1,m} - v_{n+1,m})w_{n,m+1}}{w_{n,m}} + v_{n+1,m}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $u_{n,m} := u_{n,m}^1$ ,  $v_{n,m} := u_{n,m}^2$ ,  $w_{n,m} := u_{n,m}^3$ .

Здесь  $\dim L_m = 9$ , а базис алгебры состоит из операторов  $X_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$ ,  $X_{2,1} = \frac{\partial}{\partial v_{n,m-1}}$ ,  $X_{3,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$ ,  $Y_{1,1}$ ,  $Y_{2,1}$ ,  $Y_{3,1}$ ,  $R = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$ ,  $P = [X_{1,1}, Y_{3,1}]$ ,  $Q = [X_{2,1}, Y_{3,1}]$ . Искомый набор независимых  $m$ -интегралов находим путем решения линейной системы уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \quad Y_{2,1}I = 0; \quad Y_{3,1}I = 0; \quad RI = 0; \quad PI = 0; \quad QI = 0,$$

где  $I = I(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, v_{n+1,m}, w_{n+1,m}, v_{n-1,m}, w_{n-1,m}, u_{n+2,m})$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u_{n+1,m}}{v_{n,m}} + \frac{v_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} - \frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}, \\ I_2 &= \frac{u_{n+2,m}(u_{n+1,m} - v_{n+1,m})(v_{n,m} - w_{n,m})}{u_{n+1,m}v_{n,m}w_{n-1,m}}, \\ I_3 &= \frac{u_{n+1,m}(u_{n,m} - v_{n,m})}{u_{n,m}v_{n-1,m}} + \frac{u_{n+1,m}(v_{n,m} - w_{n,m})}{u_{n,m}w_{n-1,m}} - \frac{(u_{n+1,m} - v_{n+1,m})(v_{n,m} - w_{n,m})}{v_{n,m}w_{n-1,m}}. \end{aligned}$$

Характеристическая алгебра  $L_n$  системы (4.3) порождается операторами  $\tilde{X}_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{X}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial v_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{X}_{3,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$ ,  $\tilde{Y}_{1,1}$ ,  $\tilde{Y}_{2,1}$ ,  $\tilde{Y}_{3,1}$ ,  $\tilde{X}_{1,2} = \frac{\partial}{\partial u_{n-2,m}}$ ,  $\tilde{X}_{2,2} = \frac{\partial}{\partial v_{n-2,m}}$ ,  $\tilde{X}_{3,2} = \frac{\partial}{\partial w_{n-2,m}}$ ,  $\tilde{Y}_{1,2}$ ,  $\tilde{Y}_{3,2}$  и их кратными коммутаторами. Базис алгебры состоит из перечисленных выше операторов и оператора  $\tilde{R} = [\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{1,2}]$ . Далее мы ищем функции  $J = J(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, v_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1}, v_{n,m-1}, w_{n,m+2})$ , которые аннулируются всеми базисными операторами. В результате находим полный набор независимых  $n$ -интегралов:

$$J_1 = \frac{(v_{n,m+1} - v_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})(w_{n,m+2} - w_{n,m+1})}{u_{n,m-1}(u_{n,m} - v_{n,m})(v_{n,m+1} - w_{n,m+1})},$$

$$J_2 = \frac{(u_{n,m+1} - u_{n,m})(v_{n,m+1} - v_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{u_{n,m+1}(v_{n,m+1} - u_{n,m})(w_{n,m+1} - v_{n,m})},$$

$$J_3 = \frac{v_{n,m} - w_{n,m}}{w_{n,m+1} - w_{n,m}} - \frac{u_{n,m-1}(v_{n,m} - u_{n,m})(w_{n,m+1} - v_{n,m})}{(v_{n,m+1} - v_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})}$$

$$+ \frac{u_{n,m}(v_{n,m} - w_{n,m})(v_{n,m} - u_{n,m-1})}{(w_{n,m+1} - w_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})(v_{n,m} - v_{n,m-1})}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Hirota. *Discrete analogue of a generalized Toda equation* // J. Phys. Soc. Japan. **50**:11, 3785–3791 (1981).
2. T. Miwa. *On Hirota's difference equation* // Proc. Japan Acad. Ser. A. **58**:1, 9–12 (1982).
3. I. Krichever, P. Wiegmann. A. Zabrodin, *Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems* // Commun. Math. Phys. **193**:2, 373–396 (1998).
4. А.В. Забродин. *Разностные уравнения Хироты* // ТМФ. **113**:2, 179–230 (1997).
5. A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki. *T-systems and Y-systems in integrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor. **44**:10, 103001, 146 pp. (2011).
6. С.В. Смирнов. *Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды* // ТМФ. **182**:2, 231–255 (2015).
7. А.К. Погребков. *Высшие разностные уравнения Хироты и их редукции* // ТМФ. **197**:3, 444–463 (2018).
8. E.V. Ferapontov, V.S. Novikov, I. Roustemoglou. *On the classification of discrete Hirota-type equations in 3D* // Int. Math. Res. Not. IMRN **2015**:13, 4933–4974 (2015).
9. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова. *Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе* // ТМФ. **213**:2, 320–346 (2022).
10. А.Н. Лезнов, А.Б. Шабат. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 34–44 (1982).
11. Т.В. Чекмарев. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. **18**:9, 1614–1622 (1982).
12. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Уфимск. матем. журн. **3**:3, 67–79 (2011).
13. I. Habibullin, M. Poptsova. *Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings* // SIGMA. **13**, 26 pp. (2015).
14. И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова. *О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли–Райнхарта* // ТМФ. **203**:1, 161–173 (2020).
15. E.V. Ferapontov, I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, V.S. Novikov. *On a class of 2D integrable lattice equations* // J. Math. Phys. **61**:7, 073505 (2020).
16. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:29, 295202 (2021).
17. I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova. *An algebraic criterion of the Darboux integrability of differential-difference equations and systems* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:2021, 505201, 20 pp. (2021).
18. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse: Mathématiques, Serie 2. **1**:1, 31–78 (1899).
19. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse: Mathématiques, Serie 2. **1**:4, 439–463 (1899).
20. А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат. *Уравнения типа Лиувилля* // Докл. АН СССР. **249**:1, 26–29 (1979).
21. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа* // УМН. **56**:1(337), 63–106 (2001).
22. О.В. Капцов. *О проблеме классификации Гурса* // Программирование. **2**, 68–71 (2012).
23. В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. **121**:2, 271–284 (1999).

24. I. Habibullin. *Characteristic Algebras of Fully Discrete Hyperbolic Type Equations* // SIGMA. **1**, 23 pp. (2005).
25. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *Complete list of Darboux integrable chains of the form  $t_{1,x} = t_x + d(t, t_1)$*  // J. Math. Phys. **50**, 1–23 (2009).
26. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. **45**:34, 23 pp. (2012).
27. G. Gubbiotti, R. I. Yamilov. *Darboux integrability of trapezoidal  $H_4$  and  $H_4$  families of lattice equations I: first integrals* // J. Phys. A: Math. Theor. **50**:34, 345205, 26 pp. (2017).
28. G. Darboux. *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal*. Paris: Gauthier-Villars. 1896.
29. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана*. Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1981.
30. G. Rinehart. *Differential forms for general commutative algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 195–222 (1963).
31. Д.В. Миллионщиков, С.В. Смирнов. *Характеристические алгебры и интегрируемые системы экспоненциального типа* // Уфимск. матем. журн. **13**:2, 44–73 (2021).
32. А.В. Жибер, Р.Д. Мургазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012.

Исмагил Талгатович Хабибуллин,  
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450008, г. Уфа, Россия  
E-mail: [habibullinismagil@gmail.com](mailto:habibullinismagil@gmail.com)

Айгуль Ринатовна Хакимова,  
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450008, г. Уфа, Россия  
E-mail: [aigul.khakimova@mail.ru](mailto:aigul.khakimova@mail.ru)