

УДК 517.956

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ: СЛУЧАЙ СТРАННОГО ЧЛЕНА

Д.И. БОРИСОВ

Аннотация. Рассматривается эллиптический оператор в многомерном пространстве, периодически перфорированном близко расположенными малыми полостями. Коэффициенты дифференциального выражения переменные, комплекснозначные, бесконечно дифференцируемые и равномерно ограниченные вместе со всеми своими производными. Для коэффициентов при старших производных предполагается выполнение равномерного условия эллиптичности. На границах полостей задается краевое условие Дирихле. Размеры полостей и расстояния между ними характеризуются двумя малыми параметрами. Эти параметры выбираются так, чтобы гарантировать возникновение странного члена при усреднении — дополнительного потенциала в усредненном операторе. Основной результат работы — схема построения двухпараметрической асимптотики резольвенты рассматриваемого оператора и ее применение для определения первых членов асимптотик. Схема основана на комбинации метода многих масштабов и метода согласования асимптотических разложений. Первый используется для учета распределения полостей, второй — для учета геометрии отверстия и краевого условия Дирихле на границах полостей.

Ключевые слова: перфорированная область, эллиптический оператор, асимптотическое разложение, странный член.

Mathematics Subject Classification: 34B27, 35C20

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические задачи в перфорированных областях — одна из классических моделей в современной теории усреднения. Вопросы сходимости решений таких задач весьма активно исследовались, мы отметим лишь классические монографии [4], [8]. Классические результаты о сходимости формулируются в терминах сильной и слабой сходимости решений возмущенных задач к усредненным для заданных правых частей рассматриваемых уравнений. В последние годы интерес к этим задачам вновь усилился в связи с доказательством для них операторных оценок, в которых L_2 - или W_2^1 -норма разности решений возмущенной и усредненных задач оценивается через L_2 -норму правой части, умноженную на малую функцию, вид которой определяется геометрией и параметрами перфорации. Такого сорта оценки были установлены в серии недавних работ [2], [10]–[16], [22] для различных геометрий перфорации.

Помимо вопросов о сходимости, отдельное интересное направление исследований — это построение асимптотических разложений решений, включая случай полных асимптотических разложений. Для случая перфорации вдоль заданного многообразия полные асимптотические разложения были построены в совсем недавних работах [2], [3]. В книге [4,

D.I. BORISOV, ASYMPTOTIC EXPANSION OF DIRICHLET PROBLEM IN PERFORATED DOMAIN: STRANGE TERM CASE.

© Борисов Д.И. 2022.

Исследование частично поддержано Грантовым агентством Чешской Республики (проект 22-18739S).

Поступила 31 августа 2022 г.

Гл. III, §6.5], а также в статьях [17], [19]–[21] рассматривался случай строго периодической перфорации по всему пространству, причем размеры отверстий и расстояния между ними были пропорциональны одному и тому же малому параметру. Построение асимптотических разложений было основано на использовании метода многих масштабов.

В настоящей работе мы вновь рассматриваем задачу о построении асимптотического разложения для резольвенты эллиптического оператора второго порядка общего вида в периодически перфорированной области. Однако мы считаем, что размеры отверстий и расстояния между ними описываются двумя малыми положительными параметрами ε и η . Расстояния между отверстиями описываются параметром ε , а отверстия имеют размер $\varepsilon\eta$. Параметр η считается зависящим от ε и на него налагается условие $\varepsilon^{-2}\eta^{n-2}(\varepsilon) \rightarrow a$ с некоторой константой a . Это условие описывает критический размер отверстий, при которых гарантируется возникновение странного члена при усреднении — так называют дополнительный потенциал, возникающий в усредненном операторе. Условие на η не является жестким в том плане, что оно не фиксирует вид этой функции, а лишь ее поведение при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому фактически мы имеем дело с задачей, описываемой двумя малыми параметрами. Основной результат работы — это схема формального построения асимптотического разложения действия резольвенты рассматриваемого оператора на функцию из пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Разложение строится по двум малым параметрам, ε и η , и является двухпараметрической. Указанная схема применяется для определения первых нескольких членов асимптотики. Обсуждаются также вопросы, связанные с построением полного асимптотического разложения и возникающие на этом пути трудности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ — некоторые функции, заданные на \mathbb{R}^n и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} A_{ij}, A_j, A_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial^\alpha A_{ij}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\alpha A_j}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\alpha A_0}{\partial x^\alpha} \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \\ A_{ji} = A_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq c_0 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_i \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где c_0 — некоторая положительная константа, не зависящая от x и ξ_i . Функции A_{ij} — вещественные, а функции A_j, A_0 — комплекснозначные.

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей. В пространстве \mathbb{R}^n устроим мелкую периодическую перфорацию следующим образом:

$$\Omega^\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\theta}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} (\varepsilon z + \varepsilon \eta \omega).$$

Здесь ε — малый положительный параметр, а $\eta = \eta(\varepsilon)$ — положительная функция, такая что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-2} \eta^{n-2}(\varepsilon) = a, \quad (2.2)$$

где $a \geq 0$ — некоторая фиксированная константа.

В перфорированной области Ω^ε определим оператор \mathcal{H}^ε с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}} := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0$$

и краевым условием Дирихле на $\partial\theta^\varepsilon$. Строго его определим как m -секториальный оператор в пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$, в силу первой теоремы о представлении [7, Гл. VI, §2.1],

соответствующий замкнутой секториальной полуторалинейной форме

$$\mathfrak{h}^\varepsilon(u, v) := \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

в пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon) := \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$, где $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$ — подпространство пространства Соболева $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, состоящее из функций с нулевым следом на границе. С помощью стандартных теорем о повышении гладкости эллиптических краевых задач несложно проверить, что область определения оператора \mathcal{H}^ε имеет вид $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) := W_2^2(\Omega^\varepsilon) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

Основная цель настоящей работы — построить асимптотическое разложение резольвенты оператора \mathcal{H}^ε при малых ε в случае, когда она действует на достаточно гладкие функции.

Сходимость резольвент операторов типа \mathcal{H}^ε исследовалась в недавней работе [11] и применение основных теорем [11] к нашему случаю дает следующий результат. Пусть \mathcal{H}^0 — еще один m -секториальный оператор, но уже в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с дифференциальным выражением $\hat{\mathcal{H}}$. Его также определим через соответствующую секториальную форму с помощью первой теоремы о представлении; областью определения этого оператора является пространство $W_2^2(\mathbb{R}^n)$.

Введем матрицу

$$A(x) := \begin{pmatrix} A_{11}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Через $X = X(\zeta, x)$ обозначим решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\zeta A(x) \nabla_\zeta X &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad X = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \\ X(\zeta, x) &= 1 + K(x) |A^{-\frac{1}{2}}(x) \zeta|^{-n+2} + O(|\zeta|^{-n+1}), \quad \zeta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $K = K(x)$ — некоторая функция. В статье [11] было показано, что эта функция является равномерно ограниченной и неположительной. Обозначим:

$$V_0(x) := (2 - n) \operatorname{mes}_{n-1} \mathbb{S}^{n-1} \sqrt{\det A(x)} K(x),$$

где \mathbb{S}^{n-1} — единичная сфера в пространстве \mathbb{R}^n , а mes_{n-1} — мера на поверхностях в \mathbb{R}^n коразмерности один. Далее в работе мы покажем, что функция V_0 бесконечно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^d$ и вместе со всеми своими производными принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Согласно основным результатам статьи [11], существует фиксированное число λ_0 , не зависящее от $\varepsilon > 0$, такое что полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0$ попадает в резольвентные множества операторов \mathcal{H}^ε и \mathcal{H}^0 и для всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ верна оценка

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f - (\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.4)$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε , η и f .

Наш основной результат звучит следующим образом.

Теорема 2.1. Пусть $f \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда первые члены асимптотического разложения действия резольвенты $u_\varepsilon = (\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1}f$ имеют вид:

$$u_\varepsilon(x) = U_{ex} \left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu \right) (1 - \chi_\varepsilon(x)) + U_{in} \left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu \right) \chi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}) \quad (2.5)$$

в норме $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$u_\varepsilon(x) = U_{ex} \left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu \right) (1 - \chi_\varepsilon(x)) + U_{in} \left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu \right) \chi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}) \quad (2.6)$$

в норме $L_2(\mathbb{R}^n)$, где обозначено

$$\begin{aligned} U_{ex}(x, \xi, \eta, \mu) &:= u_0(x, \mu) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j u_{1,j}(x, \mu) + \varepsilon^2 u_{2,0}(\xi, x, \mu) + \varepsilon^2 \eta u_{2,1}(\xi, x, \mu), \\ U_{in}(\zeta, x, \varepsilon, \eta, \mu) &:= v_{0,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j v_{1,j}(\zeta^{(z)}, x, \mu) \\ &\quad + \varepsilon^2 v_{2,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon^2 \eta v_{2,1}(\zeta^{(z)}, x, \mu), \\ \chi_\varepsilon(x) &:= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \chi(|x\varepsilon^{-1} - z|\eta^{-\frac{2}{n}}), \quad \mu := \varepsilon^{-2}\eta^{n-2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

а $\chi = \chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 2$. Функция $u_0(x, \mu) := (\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda)^{-1}f$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ и голоморфна по μ в норме этого пространства. Функция v_0 имеет вид $v_0(\zeta, \mu) := u_0(x, \mu)X(\zeta, x)$. Остальные функции в (2.7) определены в параграфе 3.2.

Обсудим кратко основные результаты статьи. Рассматриваемая модель — это эллиптический оператор в периодически перфорированной области, причем полости имеют критический размер. А именно, соотношение между расстоянием между отверстием и их линейным размером, описываемое равенством (2.2), приводит к возникновению странного члена — это название используется для потенциала aV_0 , возникающего в усредненном операторе, см. (2.4). Для этого важного случая строится асимптотическое разложение резольвенты, а именно, первые члены такого разложения. Для возможности построения асимптотики приходится предполагать, что правая часть f , на которую действует резольвента, достаточно гладкая, а именно, является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Фактически наш основной результат — это формальная схема построения асимптотического разложения, представленная в разделе 3.2. Эта схема основана на комбинации метода многих масштабов [1] и метода согласования асимптотических разложений [6]. При этом метод многих масштабов используется для учета периодической структуры распределения отверстий и он применяется для построения внешнего разложения U_{ex} , а метод согласования дает внутреннее разложение U_{in} и используется для учета геометрии полостей и краевого условия на их границах.

В настоящей работе эта схема использована для определения первых членов асимптотики, которые представлены в теореме 2.1. Она же может быть применена и для построения полного асимптотического разложения в предположениях теоремы 2.1. Вместе с тем, вопрос об определении структуры этого разложения оказался неожиданно сложным. А именно, первая проблема связана с наличием двух малых параметров ε и η , пусть и связанных условием (2.2). Ясно, что асимптотика будет включать в себя степенные члены по ε и η и по всей видимости она будет состоять из членов вида $\varepsilon^p\eta^q$ с $q = 0, \dots, n-1$. Другой момент связан с тем, что в процессе согласования внешнего и внутреннего разложения приходится использовать как фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^n , см. (3.3), так

и решения цепочки уравнений (3.4). Эта цепочка фактически означает, что фундаментальное решение используется как правая часть в уравнении Пуассона, затем решение такого уравнения вновь подставляется в правую часть нового уравнения Пуассона и т.д. Как показывают формулы (3.5), на таком в нечетных размерностях возникают только степенные функции, а вот в четных возникают и логарифмы. Именно эти логарифмы в процессе согласования при формальном построении асимптотик порождают необходимость введения в формальные асимптотики дополнительных членов вида $\varepsilon^p \eta^q \ln^k \eta$. И выяснение зависимости асимптотики от $\ln \eta$ в четных размерностях — отдельная нетривиальная задача. Один из возможных ответов — это простая полиномиальная зависимость от $\ln \eta$, то есть, когда для заданных p и q степень логарифма меняется от нулевой до некоторой конечной, зависящей от p и q . Другой вариант, по аналогии с асимптотическими конструкциями для размерности два, это асимптотики с членами вида $\varepsilon^p \eta^q u_{p,q}$, где коэффициенты $u_{p,q}$ мероморфно зависят от $\ln^{-1} \eta$. Третий аспект связан с наличием дополнительного параметра μ . Как оказалось, уже первый член внешнего разложения u_0 нетривиально зависит от μ , а именно — голоморфен по этому параметру. Поэтому в процессе построения полного разложения необходимо еще отслеживать зависимость от этого параметра μ и по всей видимости, факт голоморфной зависимости от параметра μ будет оставаться справедливым и для остальных членов полного асимптотического разложения. Ввиду сказанного выше, задача о построении полного асимптотического разложения должна отдельно рассматриваться для четных и нечетных размерностей, причем вполне может оказаться, что случай размерности $n = 2$ является выделенным и требует отдельного исследования. Отдельная трудность, в первую очередь технического характера — это отследить структуру асимптотик в нуле для функций внешнего разложения и асимптотик на бесконечности для функций внутреннего разложения. Исследование этих вопросов о полном асимптотическом разложении мы оставляем на будущие работы, а в настоящей статье, как уже было сказано выше, демонстрируем саму схему формального построения.

3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Для заданной функции $f \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ действие на нее резольвенты оператора \mathcal{H}^ε дает функцию $u_\varepsilon(x) := (\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f$, которая является решением краевой задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\theta^\varepsilon. \quad (3.1)$$

В данном параграфе мы строим формальное асимптотическое разложение для решения этой задачи в условиях теоремы 2.1. При этом выбор числа λ гарантирует однозначную разрешимость этой задачи согласно результатам работы [11].

Схема построения асимптотики основана на применении комбинации метода согласования асимптотических разложений [6] и метода многих масштабов [1]. Предварительно мы докажем две важные вспомогательные леммы, которые будут использоваться в формальном построении асимптотик.

3.1. Вспомогательные леммы. Приводимые здесь вспомогательные леммы будут использоваться для исследования задач на коэффициенты формальных асимптотических разложений, которые строятся в следующих разделах. Фактически мы рассматриваем две модельные вспомогательные задачи. Первая из них ставится в ячейке $\square := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$:

$$-\operatorname{div}_\xi A(x) \nabla_\xi u = h \quad \text{в } \square \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

с периодическими краевыми условиями на $\partial\square$. В точке $\xi = 0$ функция h имеет особенность, которая будет описана ниже, что порождает особенность у решения задачи данной задачи.

Обозначим:

$$E_0(t) := \frac{1}{(2-n)t^{n-2} \operatorname{mes}_{n-1} \mathbb{S}^{n-1}}. \quad (3.3)$$

Через $E_j = E_j(t)$, $t \geq 1$, обозначим последовательность решений рекуррентной системы уравнений

$$\frac{1}{t^{n-1}} \frac{d}{dt} t^{n-1} \frac{dE_j}{dt} = E_{j-1}. \quad (3.4)$$

Эту последовательность можно отыскать явно:

$$E_j(t) = c_j t^{-n+2+2j}$$

для нечетных n и

$$\begin{aligned} E_j(t) &= c_j t^{-n+2+2j}, \quad j < \frac{n}{2} - 1, & E_{\frac{n}{2}-1}(t) &= c_{\frac{n}{2}-1} \ln t, \\ E_j(t) &= t^{-n+2+2j} c_j (\ln t), \quad j \geq \frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

для четных n . Здесь c_j — некоторые ненулевые константы для всех j при нечетных n и $j \leq \frac{n}{2} - 1$ при четных n . Для $j \geq \frac{n}{2}$ при четных n символы c_j обозначают некоторые полиномы первой степени.

Опишем теперь гладкость функции h . Мы предполагаем, что это бесконечно дифференцируемая в $\square \setminus \{0\}$ функция, удовлетворяющая периодическим краевым условиям вместе со всеми своими производными и имеющая в нуле асимптотическое разложение

$$h(\xi, x) = F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) + F_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) + O(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^{-n+M+3}), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

$$F_0(\varsigma, x) = \sum_{j=0}^m \mathcal{L}_p(x) E_j(|\varsigma|), \quad \mathcal{L}_p(x) := \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\gamma| \leq M_j}} \alpha_{j,\gamma}(x) \frac{\partial^\gamma}{\partial \varsigma^\gamma}, \quad (3.7)$$

$$M := \min\{2j - M_j, j = 0, \dots, m\},$$

где M_j — порядки дифференциальных выражений $\mathcal{L}_p(x)$, коэффициенты $\alpha_{j,\gamma}(x)$ которых принадлежат пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, а m — некоторое заданное натуральное число; дополнительно считаем, что $M \geq n - 2$. Функция $F_1 = F_1(\varsigma, x)$ является полиномом по ς степени не выше $2M - n + 2$ с коэффициентами, зависящими от x и принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Асимптотику (3.6) мы считаем бесконечно дифференцируемой по ξ и x .

Функцию $h(\xi, x) - F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x)$ мы рассматриваем как отображение пространства \mathbb{R}^n в $W_2^{M-n+3}(\square)$, действующее по правилу

$$x \mapsto h(\xi, x) - F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x), \quad (3.8)$$

и предполагаем, что оно попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $W_2^{M-n+3}(\square)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n .

Лемма 3.1. *Задача (3.2) имеет единственное решение, бесконечно дифференцируемое по $\xi \in (\square \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ с асимптотикой*

$$\begin{aligned} u(\xi, x) &= U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) + U_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) \\ &\quad + b(x)G(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|) + O(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^{M-n+5}), \quad \xi \rightarrow 0, \\ U_0(\varsigma, x) &:= \sum_{j=1}^{m+1} \mathcal{L}_p(x) E_j(|\varsigma|), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $U_1 = U_1(\varsigma, x)$ — полином по ς степени не выше $M - n + 4$ с коэффициентами, зависящими от x и принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, и удовлетворяющий условиям

$$-\Delta_\varsigma U_1 = F_1. \quad (3.10)$$

Функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\det A(x)}} \int_{\square \setminus \{\xi: |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi| < r\}} f(\xi, x) d\xi + \int_{\{\varsigma: |\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial |\varsigma|}(\varsigma, x) ds \right), \quad (3.11)$$

где предел существует и верна принадлежность $b \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Функция

$$u(\xi, x) - U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) - b(x)E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|),$$

рассматриваемая как отображение пространства \mathbb{R}^n в $W_2^{M-2}(\square)$, действующее по правилу

$$x \mapsto u(\xi, x) - U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) - b(x)E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|) \quad (3.12)$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $W_2^{M-n+5}(\square)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n . Общее решение задачи (3.2) отличается от описанного на произвольную функцию, зависящую только от x .

Доказательство. Так как F_1 — полином по переменной ς , то полином U_1 , удовлетворяющий условиям (3.10) строится элементарно. Пусть $\chi_1 = \chi_1(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|\xi| < \frac{1}{5}$ и нулю при $|\xi| > \frac{2}{5}$. Решение задачи (3.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(\xi, x) &= (\tilde{U}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) + b(x)E_0(|\xi|))\chi_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi) + \tilde{u}(\xi, x), \\ \tilde{U}(\varsigma, x) &:= U_0(\varsigma, x) + U_1(\varsigma, x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $b(x)$ — некоторая функция. Так как по построению функция $U(x, \varsigma)$ бесконечно дифференцируемая по $(\xi, x) \in (\overline{\square} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, то для функции \tilde{u} возникает краевая задача

$$-\operatorname{div}_\xi A \nabla_\xi \tilde{u} = \tilde{h} \quad \text{в} \quad \square, \quad \tilde{h} := h - \chi_1 F + 2 \nabla_\xi \chi_1 \cdot A \nabla_\xi \tilde{U} + \tilde{U} \operatorname{div}_\xi A \nabla_\xi \chi_1, \quad (3.14)$$

с периодическими краевыми условиями и правой частью, попадающей по меньшей в пространство $W_2^{M-n+3}(\square)$ в силу асимптотики (3.6). Условие разрешимости такой задачи выглядит стандартным образом:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\square} \tilde{h} d\xi = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\square \setminus \{\xi: |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi| < r\}} (h + \operatorname{div}_{\xi} A \nabla_{\xi} \chi_1 \tilde{U} + b(x) \operatorname{div}_{\xi} A \nabla_{\xi} E_0 \chi_1) d\xi \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\square \setminus \{\xi: |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi| < r\}} h d\xi + \sqrt{\det A} \int_{\{\varsigma: r < |\varsigma| < \frac{2}{5}\}} \Delta_{\varsigma} (\tilde{U}(x, \varsigma) + b(x) E_0(|\varsigma|)) d\varsigma \right) \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\square \setminus \{\xi: |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi| < r\}} h d\xi - \sqrt{\det A} \int_{\{\varsigma: |\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial |\varsigma|}(x, \varsigma) d\varsigma \right) \\
&\quad - b(x) \sqrt{\det A(x)} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\{\varsigma: |\varsigma|=r\}} \frac{\partial G}{\partial |\varsigma|}(\varsigma) d\varsigma \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\square \setminus \{\xi: |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi| < r\}} h d\xi + \sqrt{\det A} \int_{\{\varsigma: |\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial |\varsigma|}(x, \varsigma) d\varsigma \right) - b(x) \sqrt{\det A(x)},
\end{aligned}$$

откуда следует формула (3.11). Аналогично выводится еще одна формула для b :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\square} \tilde{h} d\xi \\
&= \int_{\square} (h - \chi_1 F + 2 \nabla_{\xi} \chi_1 \cdot A \nabla_{\xi} \tilde{U} + \tilde{U} \operatorname{div}_{\xi} A \nabla_{\xi} \chi_1) d\xi + b(x) \sqrt{\det A} \int_{\{\varsigma: r < |\varsigma| < \frac{2}{5}\}} \Delta_{\varsigma} E_0(|\varsigma|) d\varsigma \\
&= \int_{\square} (h - \chi_1 F + 2 \nabla_{\xi} \chi_1 \cdot A \nabla_{\xi} \tilde{U} + \tilde{U} \operatorname{div}_{\xi} A \nabla_{\xi} \chi_1) d\xi - b(x) \sqrt{\det A(x)},
\end{aligned}$$

откуда следует

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{\det A(x)}} \int_{\square} (h - \chi_1 F + 2 \nabla_{\xi} \chi_1 \cdot A \nabla_{\xi} \tilde{U} + \tilde{U} \operatorname{div}_{\xi} A \nabla_{\xi} \chi_1) d\xi.$$

Из этой формулы, явного вида функции F_1 и предполагаемой гладкости функции h как отображения (3.8) сразу следует, что функция b попадает в пространство $W_2^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Для функций $u \in W_2^1(\square)$ с нулевым средним по \square верна очевидная оценка

$$\frac{(A(x) \nabla_{\xi} u, \nabla_{\xi} u)_{L_2(\square)}}{\|u\|_{L_2(\square)}^2} \geq c_0 \frac{\|\nabla_{\xi} u\|_{L_2(\square)}^2}{\|u\|_{L_2(\square)}^2} \geq c_1,$$

где c_1 — некоторая константа, не зависящая от x и u . Эта оценка гарантирует однозначную разрешимость задачи (3.14) для всех $\tilde{f} \in L_2(\square)$ с нулевым средним в подпространстве функций из $W_2^2(\square)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям и имеющим нулевое среднее. При этом оператор, отображающий \tilde{f} в указанное решение, ограничен равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$. Стандартные теоремы о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач затем сразу гарантируют, что данный оператор ограничен равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ и как действующий в пространство $W_2^{M-n+5}(\square)$. Этот факт позволяет нам дифференцировать задачу (3.14) по x , получая тем самым аналогичные задачи для производных

решения по x и оценивая их затем в нормах пространства $W_2^{M-n+5}(\square)$. Возвращаясь затем к функции u , немедленно получаем требуемую ее гладкость как отображения (3.12). Так как общее решение однородной задачи (3.2) (с $f = 0$) постоянно по переменной ξ , то утверждение об общем решении неоднородной задачи очевидно. Лемма доказана. \square

Вторая модельная вспомогательная задача является внешней в области $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$:

$$-\operatorname{div}_\zeta A(x) \nabla_\zeta u = g \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\omega. \quad (3.15)$$

Здесь $g = g(\zeta, x)$ — бесконечно дифференцируемая по $(\zeta, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$ функция со следующей асимптотикой на бесконечности:

$$g(\zeta, x) = F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + F_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + O(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|^{M-n+1}),$$

где функции F_0, F_1 и число M — те же, что и в (3.7), а число M здесь считаем удовлетворяющим неравенству $M \leq -2$. Данная асимптотика предполагается бесконечно дифференцируемой по $(\zeta, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$.

Для заданных чисел $k \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathfrak{C}^{p,k}$ обозначим подпространства функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, для которых конечны следующие нормы:

$$\|u\|_{\mathfrak{C}^{p,k}} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq p}} \sup_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} (|\zeta| + 1)^{k+p} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial \zeta^\alpha}(\zeta) \right|.$$

Пусть $\chi_2 = \chi_2(\zeta)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю на некотором фиксированном шаре, содержащем область ω и начало координат, и единице вне некоторого большего шара. Относительно функции g дополнительно предполагаем, что отображение пространства \mathbb{R}^n в $\mathfrak{C}^{p,n-M-1+p}$, действующее по правилу

$$x \mapsto g(\zeta, x) - \left(F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + F_1(A^{-\frac{1}{2}}\zeta, x) \right) \chi_2(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n-M-1+p}$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n , для всех $p \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 3.2. *Задача (3.15) имеет единственное решение, бесконечно дифференцируемое по $(\zeta, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$ с асимптотикой*

$$\begin{aligned} u(\zeta, x) = & U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) \\ & + U_2(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) + O(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|^{M-n+3}), \quad \xi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где U_0, U_1 — те же, что и в (3.9), а функция $U_2(\zeta, x)$ имеет вид

$$U_2(\zeta, x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq |M|-1}} b_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|\zeta|), \quad (3.16)$$

где b_α — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Функция

$$u(\zeta, x) - \left(U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_2(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) \right) \chi_1(\zeta),$$

рассматриваемая как отображение пространства \mathbb{R}^n в $\mathfrak{C}^{p,n-M-3+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$x \mapsto u(\zeta, x) - \left(U_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_1(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_2(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) \right) \chi_1(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n-M-3+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n , для всех $p \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Решение задачи (3.15) будем искать в виде

$$u(\zeta, x) = \tilde{u}(\zeta, x) + \tilde{U}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)\chi_2(\zeta),$$

где \tilde{U} – из (3.13). Тогда для функции \tilde{u} получим задачу

$$-\operatorname{div}_\zeta A(x)\nabla_\zeta \tilde{u} = \tilde{g} \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}, \quad \hat{u} = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (3.17)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta, x) := & g - \left(F_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + F_1(A^{-\frac{1}{2}}\zeta, x) \right) \chi_2(\zeta) \\ & + 2\nabla_\zeta \chi_2(\zeta) \cdot A(x)\nabla_\zeta \tilde{U}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta) + \tilde{U}(A^{-\frac{1}{2}}\zeta, x) \operatorname{div}_\xi A \nabla_\xi \chi_1(\zeta). \end{aligned}$$

Основой дальнейшего доказательства является использование преобразования Кельвина. А именно, пусть ζ_0 – некоторая внутренняя точка множества ω . Преобразование Кельвина введем следующим образом:

$$\hat{u}(\hat{\zeta}) := |\hat{\zeta}|^{-n+2} \tilde{u}(\zeta_0 + \hat{\zeta}|\hat{\zeta}|^{-2}), \quad \hat{\zeta} := |A^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta - \zeta_0)|^{-2} A^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta - \zeta_0).$$

При такой замене область ω переходит в некоторую неограниченную область $\hat{\omega}$, зависящую от x и содержащую окрестность бесконечности, а задача (3.15) переходит в краевую задачу в ограниченной области $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega}$:

$$-\Delta_\zeta \hat{u} = \hat{g} \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\hat{\omega}}, \quad \hat{u} = 0 \quad \text{на } \partial\hat{\omega}, \quad \hat{g}(\hat{\zeta}) := |\hat{\zeta}|^{-n-2} \tilde{g}(\zeta_0 + \hat{\zeta}|\hat{\zeta}|^{-2}). \quad (3.18)$$

Из указанных выше условий на функцию g сразу следует, что функция g бесконечно дифференцируема всюду $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$ за исключением начала координат, а в начале координат она имеет гладкость как минимум $C^{|M|-2+\vartheta}$ с произвольным $\vartheta > 0$.

Хотя область $\hat{\omega}$ зависит от переменной x , данная зависимость гладкая и регулярная. А именно, эта область по сути получается в результате замены переменной $\zeta \mapsto |\zeta|^{-2}\zeta$ из области, полученной из ω линейной заменой $\zeta \rightarrow A^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta - \zeta_0)$. Условия (2.1) гарантируют гладкость, равномерную положительность и ограниченность матрицы A . Поэтому кривизны границы области $\hat{\omega}$ равномерно ограничены и зависимость данной границы от x также гладкая. В результате этой дает возможность воспроизвести доказательство стандартных оценок Шаудера для задачи (3.18), отслеживая зависимость от параметра x . В результате мы получаем равномерные оценки следующего вида:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{C^{|M|}(\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega})} &\leq C \|\hat{g}\|_{C^{|M|-2+\vartheta}(\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega})} \leq C \|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{|M|-1, n+|M|+1}}, \\ \|\hat{u}\|_{C^k(\Omega)} &\leq C (\|\hat{g}\|_{C^{k+2+\vartheta}(\hat{\Omega})} + \|\hat{g}\|_{C^\vartheta(\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega})}) \leq C \left(\|\tilde{g}\|_{C^{k+3}(\bar{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{1, n+3}} \right), \end{aligned}$$

где C – некоторые константы, не зависящие от x , \hat{g} и \tilde{g} , а $\Omega \subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega}$ – некоторые подобласти в $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega}$, замыкания которых могут содержать границу множества $\hat{\omega}$, но при этом должны быть отделены от нуля на положительное расстояние. Символ $\tilde{\Omega}$ обозначает образ области $\hat{\Omega}$ при указанном выше преобразовании Кельвина; область $\tilde{\Omega}$ ограничена.

Так как \hat{u} принадлежит по меньшей мере пространству $C^{|M|}(\mathbb{R}^n \setminus \hat{\omega})$, ее асимптотика в нуле дается формулой Тейлора с остатком порядка $O(|\hat{\zeta}|^{|M|})$. При возвращении к функции \tilde{u} данная асимптотика переходит в функцию U_2 , заданную формулой (3.16). Учитывая этот факт и возвращаясь теперь к функции \tilde{u} , сразу видим, что она бесконечно дифференцируема по ξ на каждом компакте в $\mathbb{R}^n \setminus \omega$, который может содержать всю или часть границы $\partial\omega$, причем C^k -нормы функции \tilde{u} на этом компакте оцениваются через норму $\|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{1, n+3}}$ и C^{k+3} -нормы функции \tilde{g} на большем компакте. Это позволяет нам сколько угодно раз дифференцировать задачу (3.17) по ξ , получая аналогичные задачи для производных функции \tilde{u} , но уже с неоднородными краевыми условиями Дирихле. Применяя затем преобразование Кельвина и указанные выше оценки Шаудера для полученных задач, мы можем последовательно оценить $\mathfrak{C}^{p, n-M-1+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ -нормы для функции

$\tilde{y} - U_2(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)\chi_1(\zeta)$. Указанные априорные оценки затем позволяют дифференцировать задачу (3.17) по x и получать аналогичные оценки для производных функции \tilde{y} по x . Это завершает доказательство леммы. \square

Замечание 3.1. Отметим, что единственным условием на выбор полинома U_2 в условии доказанной леммы является уравнение (3.10). Это равенство фиксирует выбор данного полинома с точностью до произвольного гармонического полинома. Лемма 3.2 верна для каждого возможного выбора полинома U_2 .

3.2. Формальное построение. Формальное асимптотическое разложение решения задачи (3.1) будем строить в виде комбинации внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение используется для приближения решения вне малых окрестностей полостей из множества θ^ε , внутреннее применяется в малых окрестностях этих полостей. В переходной зоне возле каждой полости эти разложения согласовываются на основе метода согласования асимптотических разложений.

Внешнее разложение будем строить, дополнительно применяя метод многих масштабов, в виде

$$u_{ex}^\varepsilon(x) = u_0(x, \mu) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j u_{1,j}(x, \mu) + \varepsilon^2 u_{2,0}(\xi, x, \mu) + \varepsilon^2 \eta u_{2,1}(\xi, x, \mu) + \dots \quad (3.19)$$

Переменная $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ здесь учитывает микроструктуру в виде наличия полостей, переменная x играет роль медленной. Поэтому функции $u_{k,p}$ ищем 1-периодическими по каждой из переменных ξ_j . Зависимость от медленной переменной x должна быть такова, чтобы обеспечить попадание этих функций в пространство W_2^2 и это фактически условие на поведение на бесконечности. Одновременно с этим, коэффициенты внешнего разложения будут иметь нарастающие особенности в точках $z \in \mathbb{Z}^n$, а потому мы будем искать попадающими в пространство W_2^2 на \mathbb{R}^n за вычетом малых окрестностей таких точек, включающих в себя полости из θ^ε .

Подставим разложение (3.19) в задачу (3.1), учитывая наличие быстрой переменной $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ в функциях u_j , соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε и η и заменим полости θ^ε на их точки сжатия. Тогда получим уравнения:

$$-\operatorname{div}_\xi A(x) \nabla_\xi u_{2,0} = f_{2,0}, \quad -\operatorname{div}_\xi A(x) \nabla_\xi u_{2,1} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n, \quad (3.20)$$

где функция $f_{2,0} = f_{2,0}(x)$ имеет вид

$$f_{2,0}(x) := \operatorname{div}_x A(x) \nabla_x u_0(x) - \sum_{j=1}^n A_j(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) + (\lambda - A_0(x)) u_0(x) + f(x). \quad (3.21)$$

В силу сходимости (2.4) мы можем утверждать, что должно быть выполнено равенство

$$u_0(\cdot, a) := (\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} f.$$

С учетом предполагаемой гладкости функции f , коэффициентов A_{ij} , A_j , A_0 и V_0 , согласно теоремам о повышении гладкости эллиптических краевых задач легко выводим, что $u_0(\cdot, 0) \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу стандартных теорем вложения, функция $u_0(\cdot, a)$ бесконечно дифференцируема и равномерно ограничена вместе со всеми своими производными на \mathbb{R}^n . Далее, получив уравнение для функции u_0 , мы покажем, что указанная гладкость имеет место и для μ из малой окрестности точки a .

Для определения функций $u_{2,0}$ и $u_{2,1}$ необходимо дополнить уравнения (3.20) условиями, определяющими их поведение в целочисленных точках из \mathbb{Z}^n . Это будет сделано

ниже в процессе согласования с внутренним разложением. Данное внутреннее разложение в окрестности каждой целочисленной точки $z \in \mathbb{Z}^n$ будем строить в виде

$$u_{in}^\varepsilon(x) = v_{0,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j v_{1,j}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon^2 v_{2,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon^2 \eta v_{2,1}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \dots, \quad (3.22)$$

где $v_{k,j}$ — некоторые функции, а $\zeta^{(z)} := (\xi - \zeta)\eta^{-1}$ — еще одна растянутая переменная. В окрестности каждой точки $z \in \mathbb{Z}^n$ перейдем к переменным $\zeta = \zeta^{(z)}$ в производных и подставим внутреннее разложение в краевую задачу (3.1). В коэффициентах уравнения и в правой части к переменным ζ переходить не будем. Тогда внешние краевые задачи для функций $v_{k,j}$:

$$-\operatorname{div}_\zeta A(x) \nabla_\zeta v_{k,j} = F_{k,j} \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \omega, \quad v_k = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (3.23)$$

где правые части $F_k = F_k(x, \zeta, \mu)$ даются формулами:

$$\begin{aligned} F_{0,0}(\zeta, x, \mu) &:= 0, & F_{1,j}(\zeta, x, \mu) &:= 0, & j &\neq 1, \\ F_{2,0}(\zeta, x, \mu) &:= 0, & F_{2,1}(\zeta, x, \mu) &:= 0, \\ F_{1,1}(\zeta, x, \mu) &:= \mathcal{L}_1 v_{0,0}, & \mathcal{L}_1 &:= \left(\operatorname{div}_x A(x) \nabla_\zeta + \operatorname{div}_\zeta A(x) \nabla_x \right) - \sum_{j=1}^n A_j(x) \frac{\partial}{\partial \zeta_j}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Полученные уравнения следует еще дополнить условиями поведения функций v_k на бесконечности, что будет сделано в результате согласования внешнего и внутреннего разложений.

При проведении согласования мы должны определить поведение коэффициентов внешнего разложения в окрестности точек сжатия полостей и коэффициентов внутреннего разложения на бесконечности. При этом указанное поведение будет выясняться при $\xi \rightarrow z$, $z \in \mathbb{Z}^n$ для функций внешнего разложения и при $\zeta \rightarrow \infty$ для функций внутреннего разложения. Переменная x в этих функциях будет играть роль параметра и по ней никаких асимптотических формул выписываться не будет.

С учетом сказанного выше и в силу метода согласования асимптотических разложений, для функции v_0 сразу получаем условие поведения на бесконечности:

$$v_{0,0}(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu) + \dots, \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Ввиду однородного уравнения (3.23), (3.24) для этой функции, немедленно заключаем, что она имеет следующий вид:

$$v_0(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu) X(\zeta, x), \quad (3.25)$$

где X — решение задачи (2.3). Свойства функции X , которые нам понадобятся в дальнейшем, описаны в следующей вспомогательной лемме.

Лемма 3.3. *Функция X бесконечно дифференцируема по $(\zeta, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$. Ее асимптотическое разложение при $\zeta \rightarrow \infty$ имеет вид*

$$X(\zeta, x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|), \quad n \geq 3, \quad (3.26)$$

где $K_\alpha = K_\alpha(x)$ — некоторые функции, принадлежащие пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства \mathbb{R}^n в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$x \mapsto X(\zeta, x) - \left(1 + \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) \right) \chi_1(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n , для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$.

Утверждение этой леммы является прямым следствием леммы 3.2 и замечания 3.1: достаточно выбрать полином U_2 в виде $U_2 = 1$.

Перепишем асимптотику (3.26) функции X в переменных $\xi = \zeta\eta + z$ и подставим ее в формулу (3.25). Затем сравним внешнее и внутреннее разложения (3.19), (3.22) и в силу метода согласования асимптотических разложений сразу заключаем, что функции внешнего разложения должны иметь следующее поведение вблизи точек $z \in \mathbb{Z}^n$:

$$u_{2,0}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) K_0(x) E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)|) + o(|\xi - z|^{-n+2}), \quad \xi \rightarrow z, \quad (3.27)$$

$$u_{2,1}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} E_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)) + o(|\xi - z|^{-n+1}), \quad \xi \rightarrow z. \quad (3.28)$$

Существование решения задачи (3.20) с асимптотикой (3.27) обеспечивается леммой 3.1. При этом в роли функции $b(x)$ выступает функция $\mu K_0(x)$ и равенство (3.11) следует трактовать как условие разрешимости. А именно, в данном случае функция U_0 из (3.9) отсутствует, то есть, $U_0 = 0$, а функция $f_{2,0}$ не зависит от ξ . Поэтому равенство (3.11) переписывается к виду

$$\mu \sqrt{\det A} K_0 u_0 = f_{2,0},$$

что с учетом определения (3.21) дает уравнение для u_0 :

$$(\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda) u_0 = f.$$

При μ из малой окрестности a потенциал μV_0 представляет собой аналитическое возмущение потенциала aV_0 , а потому резольвента $(\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda)^{-1}$ голоморфна по μ из малой окрестности точки a и верна очевидная формула

$$u_0 = (\mathcal{I} + (\mu - a)(\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} V_0)^{-1} (\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} f.$$

Из этой формулы и стандартных теорем о повышении гладкости эллиптических краевых задач уже легко следует, что функция u_0 голоморфна по μ в окрестности точки a в смысле нормы пространства $W_2^p(\mathbb{R}^n)$ для всех $p > 0$.

Указанный выбор функции u_0 обеспечивает разрешимость задачи (3.20), (3.27). Согласно лемме 3.1, решение $u_{2,0}$ представляется в виде

$$u_{2,0}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) K_0(x) \tilde{u}_{2,0}(\xi, x),$$

где $\tilde{u}_{2,0}$ — периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div}_\xi A(x) \nabla_\xi \tilde{u}_{2,0} = \sqrt{\det A} \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n,$$

$$\tilde{u}_{2,0}(\xi, x, \mu) = E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)|) + \dots, \quad \xi \rightarrow z.$$

Применив лемму 3.1 с произвольным достаточно большим M , мы можем уточнить асимптотику функции $\tilde{u}_{2,0}$ в нуле:

$$\tilde{u}_{2,0}(\xi, x) = E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|) + \frac{\sqrt{\det A(x)}}{2n} |A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^2 + \sum_{p=0}^{\infty} U_{2,0,p}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

где $U_{2,0,p}(\zeta, x)$ — однородные степени p гармонические полиномы с бесконечно дифференцируемыми по $x \in \mathbb{R}^d$ коэффициентами, принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. При этом функция $U_{2,0,0}(\zeta, x) = U_{2,0,0}(x)$ может быть выбрана произвольно, мы априорно считаем ее принадлежащей пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение

$$x \mapsto \tilde{u}_{2,0}(\xi, x) - E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|)$$

пространства \mathbb{R}^n в $W_2^q(\square)$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $q > 0$.

Аналогично исследуется и разрешимость задачи (3.20), (3.28) для функции $u_{2,1}$. А именно, существует решение данной задачи вида

$$u_{2,1}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) \tilde{u}_{2,1}(\xi, x, \mu),$$

где $\tilde{u}_{2,1}$ — периодическое решение уравнения (3.20) с асимптотикой в нуле

$$\tilde{u}_{2,1}(\xi, x, \mu) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} E_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} U_{2,1,p}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (3.30)$$

где $U_{2,1,p}(\zeta, x)$ — однородные степени p гармонические полиномы с бесконечно дифференцируемыми по $x \in \mathbb{R}^d$ коэффициентами, принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. Функция $U_{2,1,0}(\zeta, x) = U_{2,1,0}(x)$ может быть выбрана произвольно, мы априорно считаем ее принадлежащей пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение

$$x \mapsto \tilde{u}_{2,1}(\xi, x) - \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} E_0(A^{-\frac{1}{2}}(x)\xi)$$

пространства \mathbb{R}^n в $W_2^q(\square)$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $q > 0$.

Перепишем теперь асимптотики (3.29), (3.30) в переменных ζ и проведем согласование с внутренним разложением (3.22). Тогда получим, что коэффициенты внутреннего разложения должны обладать следующим поведением на бесконечности:

$$\begin{aligned} v_{1,j}(\zeta, x, \mu) &= u_{1,j}(x, \mu) + \dots, \\ v_{2,0}(\zeta, x, \mu) &= \mu K_0(x) u_0(x, \mu) U_{2,0,0}(x) + \dots, \\ v_{2,1}(\zeta, x, \mu) &= \mu u_0(x, \mu) (U_{2,0,1}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)) + \dots, \end{aligned}$$

при $\zeta \rightarrow \infty$. Существование решений у задач (3.23) с указанными выше асимптотиками обеспечивается леммой 3.2. А именно, функции $v_{1,j}$ и $v_{2,0}$ можно найти явно:

$$v_{1,j}(\zeta, x, \mu) = u_{1,j}(x, \mu) X(\xi, x), \quad j \neq 1, \quad v_{2,0} = \mu K_0(x) u_0(x, \mu) U_{2,0,0}(x) X(\xi, x).$$

В случае функции $v_{1,1}$ наличие правой части в уравнении для нее не дает найти решения явно, однако применение леммы 3.2 гарантирует существование частного решения вида $u_0(x, \mu) \tilde{v}_{1,1}(\xi, x, \mu)$, где функция $\tilde{v}_{1,1}$ является решением задачи для $v_{1,1}$, но с заменой $F_{1,1}$ на $\mathcal{L}_1 X$. Функция $\tilde{v}_{1,1}$ бесконечно дифференцируема по $(\xi, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$ и обладает следующим поведением на бесконечности:

$$\tilde{v}_{1,1}(\zeta, x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \mathcal{L}_1 \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_1(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{1,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|),$$

где $K_{1,1,\alpha}$ — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства \mathbb{R}^n в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$\begin{aligned} x \mapsto \tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) - \chi_1(\zeta) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \mathcal{L}_1 \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_1(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) \\ - \chi_1(\zeta) \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{1,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|), \end{aligned}$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n , для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$. Решение задачи (3.23), (3.24) имеет вид:

$$v_{1,1}(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu) \tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) + u_{1,1}(x, \mu) X(\zeta, x).$$

Задача для функции $v_{2,1}$ также разрешима и ее решение имеет вид $\mu u_0(x, \mu) \tilde{v}_{2,1}(\zeta, x)$, где функция $\tilde{v}_{2,1}$ решает ту же задачу, но имеет следующее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$\tilde{v}_{2,1}(\zeta, x) = U_{2,0,1}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{2,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|),$$

где $K_{2,1,\alpha}$ — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства \mathbb{R}^n в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$\begin{aligned} x \mapsto \tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) - \chi_1(\zeta) \left(U_{2,0,1}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{2,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|A^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) \right) \end{aligned}$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ -значных функций, заданных на \mathbb{R}^n , для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$.

Описанная выше формальная схема позволяет построить и дальнейшие члены внешнего и внутреннего разложений. При этом для определения оставшихся пока произвольными функций $u_{1,j}$ следует провести построение членов порядка $O(\varepsilon^3)$ во внешнем разложении. Применение затем леммы 3.1 к этим функциям, а именно, равенства (3.11), позволит определить функции $u_{1,j}$. Аналогичная ситуация будет иметь место и далее — для полного определения коэффициентов при $\varepsilon^p \eta^q$ следует провести построение до $\varepsilon^{p+2} \eta^q$ и выписать затем равенство (3.11). Коэффициенты внешнего и внутреннего разложений будут бесконечно дифференцируемыми функциями по (ξ, x) и (ζ, x) ; дополнительно будет иметь место аналитичность по параметру μ . В нечетных размерностях внешнее и внутреннее разложение будут степенными по ε и η . В четных размерностях возникнет дополнительная зависимость от $\ln \eta$. Это связано с возникновением $\ln t$ в функциях E_j , см. (3.5). Исследование зависимости коэффициентов внешнего и внутреннего разложений от $\ln \eta$ — это отдельная задача.

3.3. Обоснование асимптотик. Строгое обоснование асимптотик и получение оценок остатков здесь проводится стандартным образом. Следует построить достаточное число следующих членов внутреннего и внешнего разложений так, чтобы они давали достаточно

малую невязку при подстановке в уравнение для резольвенты. После этого вопрос об оценках остатков элементарно решается на основе имеющихся априорных оценок для резольвенты. А именно, пусть $Q_{ex}(\xi, x, \varepsilon, \mu)$ и $Q_{in}(\xi, x, \varepsilon, \mu)$ — дополнительные члены во внешнем и внутреннем разложениях. Тогда их можно построить достаточное количество так, что для функций

$$U_\varepsilon(x) := U_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right) \chi_\varepsilon(x) + U_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right) (1 - \chi_\varepsilon(x)),$$

$$Q_\varepsilon(x) := Q_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right) \chi_\varepsilon(x) + Q_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right) (1 - \chi_\varepsilon(x)),$$

будет выполнено уравнение и оценки

$$(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)(U_\varepsilon + Q_\varepsilon) = f + h_\varepsilon, \quad \|h_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2),$$

$$\|Q_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}), \quad \|Q_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1}f - U_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \|h_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от ε . Поэтому

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1}f - U_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}), \quad \|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1}f - U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}),$$

что и дает требуемые оценки остатков в (2.5), (2.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука. 1974.
2. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле* // Матем. сб. **212**:8, 33–88 (2021).
3. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Асимптотики для задач в перфорированных областях с третьим нелинейным краевым условием на границах полостей* // Матем. сб. **213**:10, 3–59 (2022).
4. В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. *Усреднение дифференциальных операторов*. М.: Физ.-мат. литература. 1993.
5. В.В. Жиков. *О спектральном методе в теории усреднения* // Труды МИАН. **250**, 95–104 (2005).
6. А.М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука. 1989.
7. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Наука. 1972.
8. В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*. Киев: Наукова Думка. 1974.
9. С.Е. Пастухова. *L_2 -аппроксимации резольвенты эллиптического оператора в перфорированном пространстве* // Совр. матем. фонд. напр. **66**:2, 314–334 (2020).
10. С. Anné, O. Post. *Wildly perturbed manifolds: norm resolvent and spectral convergence* // J. Spectr. Theory. **11**:1, 229–279 (2021).
11. D.I. Borisov. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: strange term* // Preprint: arXiv:2205.09490.
12. D.I. Borisov, J. Kříž. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit* // Preprint: arXiv:2204.04829 (2022).
13. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A. Math. **146**:6, 1115–1158 (2016).

14. K. Cherednichenko, P. Dondl, and F. Rösler. *Norm-resolvent convergence in perforated domains* // *Asymp. Anal.* **110**:3-4, 163–184 (2018).
15. A. Khrabustovskiy, M. Plum. *Operator estimates for homogenization of the Robin Laplacian in a perforated domain* // *J. Diff. Equat.* **338**, 474–517 (2022).
16. A. Khrabustovskiy, O. Post. *Operator estimates for the crushed ice problem* // *Asymp. Anal.* **110**:3-4, 137–161 (2018).
17. J.L. Lions. *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure* // *Rocky Mountain J. Math.* **10**:1, 125–140 (1980).
18. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*. V.I. Basel, Birkhäuser. 2000.
19. T.A. Mel'nyk. *Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary-value problems with rapidly oscillating coefficients in a perforated cube* // *J. Math. Sci.* **75**:3, 1646–1671 (1995).
20. T.A. Mel'nyk, O.A. Shvak. *Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains* // *Asymp. Anal.* **75**:1-2, 79–92 (2011).
21. T.A. Mel'nyk, O.A. Shvak. *Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear parabolic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains* // *J. Math. Sci.* **177**:1, 50–70 (2011).
22. T.A. Suslina. *Spectral approach to homogenization of elliptic operators in a perforated space* // *Rev. Math. Phys.* **30**:08, 1840016 (2018).

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального
исследовательского центра РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный
университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: BorisovDI@yandex.ru