ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 16-28.

УДК 517.53+517.95

О ФУНКЦИОНАЛАХ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.О. БАГАПШ, К.Ю. ФЕДОРОВСКИЙ

Аннотация. В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Показано, что для неразделимых сильно эллиптических систем указанного вида не существует неотрицательно определенных функционалов энергии вида

$$f \mapsto \int_D \varPhi(u_x, v_x, u_y, v_y)\, dxdy,$$

где D — область, в которой рассматривается задача, $\varPhi$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^4$, а $f = u + iv$ — функция комплексного переменного. Доказательство основано на приведении рассматриваемой системы к специальному (каноническому) виду, когда задающий эту систему дифференциальный оператор представляется в виде возмущения оператора Лапласа по двум малым вещественным параметрам (каноническим параметрам рассматриваемой системы). В частности, полученный результат показывает, что непосредственное распространение классической теоремы Лебега (о регулярности произвольной ограниченной односвязной области в комплексной плоскости относительно задачи Дирихле для гармонических функций) на сильно эллиптические уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами общего вида не представляется возможным. Это обстоятельство проясняет ряд сложностей, которые возникают в этой задаче, являющейся весьма важной для теории приближений аналитическими функциями.

Ключевые слова: эллиптическая система второго порядка, канонический вид эллиптической системы второго порядка, задача Дирихле, функционал энергии.

Mathematics Subject Classification: 30E25, 35J25

1. Введение, постановка задач и первоначальные сведения

В работе рассматривается задача Дирихле (в ее классической постановке) для эллиптических систем второго порядка в $\mathbb{R}^2$ с постоянными коэффициентами. Для вещественнозначных функций u, заданных в $\mathbb{R}^2$, мы будем обозначать через u_x, u_y, u_{xx} и т.д. их частные производные по соответствующим переменным. Кроме того, нам понадобятся дифференциальные операторы $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_y = \partial/\partial y$. На протяжении всей работы символ $M_k(\mathbb{R})$ будет обозначать пространство всех вещественных $k \times k$-матриц ($k > 0$ — целое число), а символ A^t — матрицу, транспонированную к матрице A.

A.O. Bagapsh, K.Yu. Fedorovskiy, On energy functionals for second-order elliptic systems.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», а также Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта 0705-2020-0047. Леммы 3.1 и 3.2 были получены в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, выполненных под руководством ведущих ученых, соглашение 075-15-2021-602.

Поступила 1 октября 2022 г.

Нас интересует вопрос о существовании для указанных систем функционалов энергии вида

$$f \mapsto \int_D \Phi(u_x, u_y, v_x, v_y)\, dxdy, \tag{1.1}$$

где D — область, в которой рассматривается задача, $f = u + iv$ — функция комплексного переменного, а Φ — неотрицательно определенная квадратичная форма в $\mathbb{R}^4$. Вопрос о существовании функционалов энергии такого вида мотивирован в первую очередь задачей Дирихле для вещественных гармонических функций, для которой такой функционал существует и имеет вид $\int_D ((u_x)^2 + (u_y)^2)\, dxdy$. Для общих систем рассматриваемого вида и, в частности, для эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, вопрос о существовании неотрицательно определенных функционалов энергии в общем случае открыт (так же как и вопрос об общей разрешимости соответствующей задачи Дирихле в односвязных ограниченных областях общего вида).

В дальнейшем точки $z = (x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ мы будем отождествлять, там где это удобно, с комплексными числами $z = x + iy$. Всюду в дальнейшем мы будем отождествлять пару функций u и v, определенных в $\mathbb{R}^2$ и принимающих вещественные значения, с комплекснозначной функцией комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и наоборот. Кроме того, символ f будет, при необходимости, обозначать вектор $(u, v)^t$.

Пусть $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Определим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = A\partial_{xx} + 2B\partial_{xy} + C\partial_{yy}, \tag{1.2}$$

где, как обычно, $\partial_x f = u_x + iv_x$ и $\partial_y f = u_y + iv_y$. Другими словами, $\mathcal{L}f = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, где функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + 2B \begin{pmatrix} u_{xy} \\ v_{xy} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_{yy} \\ v_{yy} \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать однородную систему уравнений вида

$$\mathcal{L}f = 0. \tag{1.3}$$

Важным частным случаем, который будет особо интересовать нас на протяжении всей работы, является система, определяемая матрицами $A, B, C \in M_2^\sharp$, где

$$M_2^\sharp = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \right\}.$$

Заметим, что множество $M_2^\sharp$, рассматриваемое с обычными операциями сложения и умножения матриц, является полем, изоморфным полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Таким образом, система (1.3) с матрицами $A, B, C \in M_2^\sharp$ эквивалентна одному уравнению второго порядка с постоянными *комплексными* коэффициентами на (комплекснозначную) функцию f, т.е. уравнению вида

$$af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0, \tag{1.4}$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$, а $f_x = \partial_x f$ и $f_y = \partial_y f$ (как и в вещественном случае). Системы, соответствующие уравнениям вида (1.4), часто называют *кососимметрическими*, несмотря на очевидную неточность этого термина.

Напомним, что эллиптичность системы (1.3) означает, что соответствующая *характеристическая форма*

$$\mathcal{F}(\xi, \eta) = \det(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2) \tag{1.5}$$

с вещественными ξ и η обращается в нуль только при $\xi = \eta = 0$ (см., например, [1]).

Условие эллиптичности для уравнения (1.4) эквивалентно тому, что соответствующий *символ* $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ с вещественными ξ и η также обращается в нуль только при $\xi = \eta = 0$. Заметим, что последнее условие эквивалентно тому, что корни *характеристического уравнения* $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ не являются вещественными.

В общем случае из условия эллиптичности вытекает, что $\det A \neq 0$ и $\det C \neq 0$ (так как в противном случае $\mathcal{F}(t,0) = 0$ и $\mathcal{F}(0,t) = 0$ при $t \neq 0$, соответственно). Так как $\mathcal{F}(\xi,\eta) = \eta^4 \det(A\lambda^2 + 2B\lambda + C)$, где $\lambda = \xi/\eta$, то эллиптичность системы (1.3) эквивалентна тому, что $\det A \neq 0$ и все корни уравнения четвертой степени с вещественными коэффициентами

$$\det(A\lambda^2 + 2B\lambda + C) = 0$$

не являются вещественными. При этом указанное уравнение имеет две пары *комплексно сопряженных* корней, которые мы обозначим λ_1, $\overline{\lambda}_1$, λ_2 и $\overline{\lambda}_2$.

Задача Дирихле для системы (1.3) состоит в следующем: пусть даны ограниченная односвязная область D на плоскости и непрерывная функция h на границе ∂D области D; требуется найти функцию f класса $C^2(D) \cup C(\overline{D})$ такую, что $\mathcal{L}f = 0$ в D и $f|_{\partial D} = h$ (в силу эллиптичности дифференциального оператора $\mathcal{L}$ достаточно ставить вопрос о существовании функции $f \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в D в смысле теории распределений). Естественным образом возникает вопрос описания таких областей D, в которых задача Дирихле разрешима для любой заданной непрерывной функции h на ∂D. Области, удовлетворяющие этому условию, называются *$\mathcal{L}$-регулярными*.

В задаче описания $\mathcal{L}$-регулярных областей естественно возникает понятие эквивалентности систем рассматриваемого вида. Две системы вида (1.3) будем называть *эквивалентными*, если они сводятся друг к другу при помощи следующих *допустимых преобразований*: невырожденной вещественно линейной замены переменных и искомых функций, а также невырожденной линейной комбинации уравнений. В дальнейшем такие преобразования будем называть допустимыми преобразованиями *первого*, *второго* и *третьего* типов, соответственно. При этом, если две системы вида (1.3), заданные операторами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, эквивалентны, а область D является $\mathcal{L}_1$-регулярной, то область, полученная из D подходящим линейным преобразованием, будет $\mathcal{L}_2$-регулярной. Такое понятие эквивалентности систем было предложено, например, в [2].

Наиболее простой случай возникает, если система (1.3) может быть сведена при помощи преобразований указанных трех типов к системе с верхнетреугольными матрицами A, B и C. Такая система называется *разделимой*. Этот термин связан с тем, что система (1.3) с верхнетреугольными матрицами распадается на два независимых эллиптических уравнения с постоянными *вещественными* коэффициентами, одно из которых является однородным, а второе имеет ненулевую правую часть. Можно показать, что первое из этих уравнений эквивалентно в указанном выше смысле уравнению Лапласа, а второе — уравнению Пуассона для гармонических функций.

Для гармонических функций (т.е. для системы, заданной оператором Лапласа Δ, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$) хорошо известен результат о том, что всякая ограниченная односвязная область является Δ-регулярной (этот выдающийся результат был получен в 1907 году Лебегом [3], причем существенную роль в доказательстве сыграл факт существования для оператора Лапласа функционала энергии указанного выше вида). Таким образом, для разделимых систем известно как полное описание регулярных областей, так и ответ на вопрос о существовании функционалов энергии интересующего нас вида. Отметим сразу, что разделимые системы — это практически единственный класс систем, для которых получены полные ответы на обсуждаемые вопросы (кроме таких систем полный ответ известен также для системы, соответствующей анизотропному уравнению Ламе).

В дальнейшем мы будем рассматривать системы, не являющиеся разделимыми, которые мы будем называть *неразделимыми*. Одними из наиболее известных и важных случаев таких систем являются кососимметрические системы, т.е. системы, которые возникают из уравнений вида (1.4).

При изучении неразделимых систем в контексте задачи Дирихле и в контексте задачи о существовании функционалов энергии вида (1.1) естественно возникает понятие *сильной эллиптичности*.

Следующее определение сильной эллиптичности было дано Вишиком [4]: система (1.3) называется сильно эллиптической, если при любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ является положительно определенной матрица

$$A_+\xi^2 + 2B_+\xi\eta + C_+\eta^2,$$

где $X_+ = (X + X^t)/2$ при $X \in M_2(\mathbb{R})$. Заметим, что всякая сильно эллиптическая по Вишику система является эллиптической, но обратное, вообще говоря, неверно.

Несколько иначе понятие сильной эллиптичности для системы (1.3) было определено в [2]: система (1.3) является сильно эллиптической, если

$$\det(\alpha A + 2\beta B + \gamma C) \neq 0$$

при всех вещественных α, β и γ с условием $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$. Можно показать, что эти два определения сильной эллиптичности эквивалентны по модулю введенной выше эквивалентности систем.

Для изучения вопроса о существовании функционала энергии вида (1.1) нам потребуется еще одно свойство систем (1.3). Скажем, что *сильно эллиптическая* система вида (1.3) называется *симметризуемой*, если ее можно привести допустимыми преобразованиями к системе с симметричными матрицами A, B и C такими, что блочная 4×4-матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

является положительно определенной. В противном случае сильно эллиптическая система вида (1.3) называется *несимметризуемой*.

Данная работа организована следующим образом. В §2 рассматривается приведение систем вида (1.3) к каноническому виду и раскрывается смысл возникающих канонических параметров. В §3 формулируется и доказывается основной результат настоящей работы (см. Теорему 3.1), который дает критерий того, что система (1.3) допускает (неотрицательно определенный) функционал энергии вида (1.1). Этот критерий формулируется в терминах канонических параметров, определяющих систему (1.3). Из Теоремы 3.1, в частности, вытекает, что для сильно эллиптического уравнения (1.4) функционал энергии указанного вида существует в том и только том случае, когда это уравнение имеет вещественные (с точностью до общего комплексного множителя) коэффициенты, т.е. эквивалентно уравнению Лапласа. Таким образом, стандартное доказательство утверждения о том, что всякая ограниченная односвязная область является регулярной относительно задачи Дирихле для гармонических функций, не может быть непосредственно перенесено на случай общих сильно эллиптических уравнений с постоянными комплексными коэффициентами.

2. Канонический вид эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами

Изучение вопросов о разрешимости задачи Дирихле для системы (1.3) и о существовании для этой системы функционалов энергии вида (1.1) удобно начать с приведения исходной системы в одну из канонических форм при помощи допустимых преобразований, которыми являются: линейные невырожденные замены переменных и искомых функций (допустимые преобразования первого и второго типа, см. выше), а также замена уравнений системы на их невырожденные линейные комбинации (допустимые преобразования третьего типа). Сразу отметим, что большинство фактов и утверждений, приведенных в этом параграфе, не являются новыми. Многие из них известны и могут быть найдены, например в [2] или [5] (см. также [6]). Однако комплексная каноническая форма, которая будет получена в конце этого параграфа, впервые появилась в работах авторов. В дальнейшем символ z будет обозначать не только комплексное переменное $z = x + iy$ и соответствующую точку плоскости, но и вектор-столбец $(x, y)^t$.

Следующая лемма проверяется непосредственным дифференцированием.

Лемма 2.1. *Матрицы A, B и C, задающие дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ вида* (1.2), *при допустимых преобразованиях меняются следующим образом:*

1) *При преобразовании координат $\zeta = Tz$, $\zeta = \xi + i\eta$, заданном матрицей $T \in M_2(\mathbb{R})$, $\det T \neq 0$, оператор $\mathcal{L}$ имеет вид*
$$\mathcal{L}f = A' f_{\xi\xi} + 2B' f_{\xi\eta} + C' f_{\eta\eta},$$
с матрицами A', B' и C', определенными по формулам
$$A' = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix} = t_{11}^2 A + 2t_{11}t_{12}B + t_{12}^2 C,$$
$$B' = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} = t_{11}t_{21}A + (t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21})B + t_{12}t_{22}C,$$
$$C' = \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} = t_{21}^2 A + 2t_{21}t_{22}B + t_{22}^2 C,$$
где t_{jk}, $j, k = 1, 2$, — это элементы матрицы T.

2) *При преобразовании искомых (вектор-) функций $\varphi = Qf$, заданном матрицей $Q \in M_2(\mathbb{R})$, $\det Q \neq 0$, оператор $\mathcal{L}$ имеет вид*
$$\mathcal{L}f = A'\varphi_{xx} + 2B'\varphi_{xy} + C'\varphi_{yy},$$
где $A' = AQ$, $B' = BQ$ и $C' = CQ$.

3) *Линейная комбинация уравнений системы* (1.3), *определяемая матрицей $P \in M_2(\mathbb{R})$, $\det P \neq 0$, приводит к системе уравнений, определяемой оператором $\mathcal{L}'$ вида*
$$\mathcal{L}'f = A'f_{xx} + 2B'f_{xy} + C'f_{yy},$$
где $A' = PA$, $B' = PB$ и $C' = PC$.

Следующая лемма также проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 2.2. *Пусть эллиптическая система уравнений* (1.3) *обладает характеристической формой $\mathcal{F}(\xi, \eta)$ с корнями λ_1, $\overline{\lambda_1}$, λ_2, $\overline{\lambda_2}$. Тогда* (*в обозначениях Леммы 2.1*) *выполнены следующие свойства.*

1) *Линейная замена переменных $\zeta = Tz$ приводит к новой системе с характеристической формой*
$$\det A' \cdot \left(\xi^2 + |\lambda_1'|^2\eta^2\right) \cdot \left(\xi^2 + |\lambda_2'|^2\eta^2\right),$$
где матрица A' определена в утверждении (1) Леммы 2.1, а $\lambda_k' = \Lambda_T(\lambda_k)$ при $k = 1, 2$, где
$$\Lambda_T(\lambda) := \frac{t_{22}\lambda - t_{21}}{-t_{12}\lambda + t_{11}}. \tag{2.1}$$

2) *Линейная замена искомых функций $\varphi = Qf$ приводит к системе с характеристической формой $q\mathcal{F}$ при $q = \det Q$.*

3) *Линейная комбинация уравнений системы, определяемая матрицей P, приводит к системе с характеристической формой $p\mathcal{F}$ при $p = \det P$.*

С использованием двух технических лемм, приведенных выше, можно получить первое утверждение о канонической форме системы рассматриваемого вида.

Предложение 2.1. *Любая неразделимая эллиптическая система вида* (1.3) *может быть приведена с помощью допустимых преобразований к системе, определяемой оператором*

$$\mathcal{L}^1_{\kappa,\lambda} = A\partial_{xx} + 2B\partial_{xy} + C\partial_{yy},$$

где параметры κ и λ таковы, что $\kappa \in (0,1]$ и $\lambda \in [-\kappa,\kappa] \setminus \{0,\kappa^2\}$, а матрицы A, B и C имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4}(1-\lambda)(1-\kappa^2/\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \kappa^2/\lambda \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

При этом сильная эллиптичность исходной системы (1.3) *равносильна тому, что $\lambda > 0$.*

Схема доказательства. Пусть оператор $\mathcal{L}$, задающий систему (1.3), определяется матрицами A, B и C. Для приведения оператора $\mathcal{L}$ к требуемой канонической форме упростим матрицы A, B и C в четыре шага.

Шаг 1. Упрощение характеристической формы. Так как характеристические корни исходной системы — это две пары комплексно сопряженных чисел (причем можно считать, что λ_1 и λ_2 лежат в верхней полуплоскости), то существует дробно-линейное отображение, отображающее верхнюю полуплоскость в себя и переводящее все характеристические корни исходной системы на мнимую ось. Такое отображение $\varLambda$ можно определить, исходя из следующих условий:

$$\varLambda(\lambda_1) = \kappa i, \qquad \varLambda(\lambda_2) = i, \tag{2.3}$$

где $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, — параметр, который нужно определить.

В случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, преобразование $\varLambda$ — это композиция сдвига и растяжения. В этом случае $\kappa = 1$. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ заметим, что точки λ_1, λ_2, $\overline{\lambda}_1$ и $\overline{\lambda}_2$ лежат на некоторой окружности, ортогональной вещественной прямой. Пусть ζ_* и ζ_{**} — точки пересечения этой окружности с вещественной прямой. Функция

$$\varLambda(\zeta) = \rho\frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta - \zeta_{**}}$$

отображает указанную окружность на мнимую ось. Параметр ρ определяется, исходя из условия $\varLambda(\lambda_2) = i$. После этого, из условия $\varLambda(\lambda_1) = \kappa i$ находится значение κ. Если $\kappa > 1$, то вместо $\varLambda$ будем использовать композицию $\varLambda$ и сжатия в κ раз. Таким образом, мы получаем дробно-линейное отображение

$$\varLambda(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d},$$

которое удовлетворяет условиям $\varLambda(\lambda_1) = \kappa i$, $\kappa \in (0,1]$, и $\varLambda(\lambda_2) = i$.

Используем замену переменных, определяемую матрицей

$$T_1 = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

При этом мы переходим от оператора $\mathcal{L}$ к оператору $\mathcal{L}_1$, заданному матрицами A_1, B_1 и C_1, которые определяются согласно первому утверждению Леммы 2.1. Согласно Лемме 2.2, новая система (определяемая оператором $\mathcal{L}_1$) обладает характеристической формой

$$\mathcal{F}_1(\xi,\eta) = \det A_1 \cdot (\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + \kappa^2\eta^2).$$

Заметим, что в силу эллиптичности исходной системы выполнено $\det A_1 \neq 0$ и $\det C_1 \neq 0$.

Шаг 2. Диагонализация матрицы A_1. Применим преобразование третьего типа (линейную комбинацию уравнений системы) к системе, заданной оператором $\mathcal{L}_1$. Получим систему, определяемую оператором $\mathcal{L}_2$, заданным матрицами $A_2 = A_1^{-1}A_1 = I$, $B_2 = A_1^{-1}B_1$ и $C_2 = A_1^{-1}C_1$, где I — единичная матрица. Для этой системы характеристическая форма имеет вид $\mathcal{F}_2(\xi,\eta) = (\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + \kappa^2\eta^2)$.

Шаг 3. Диагонализация матрицы C_2. Приведем матрицу C_2 к жордановой нормальной форме C_3. При этом $C_3 = PC_2P^{-1}$, где P — подходящая невырожденная матрица. Такое преобразование матрицы C_2 в C_3 соответствует последовательному выполнению допустимых преобразований второго и третьего типа, заданных при помощи матрицы T. Пусть $A_3 = I$ и $B_3 = PB_2P^{-1}$. При этом от системы, заданной оператором $\mathcal{L}_2$ мы переходим к системе, определяемой оператором $\mathcal{L}_3$, заданной матрицами A_3, B_3 и C_3. Характеристическая форма систему при таком преобразовании не меняется, т.е. для полученной системы эта форма имеет вид

$$\mathcal{F}_3(\xi,\eta) = (\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\kappa^2\eta^2) = \xi^4 + (1+\kappa^2)\xi^2\eta^2 + \kappa^2\eta^4. \tag{2.4}$$

Заметим, что матрица C_3 может принимать один из следующих трех видов:

1) $C_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где λ и μ — вещественные собственные числа матрицы C_2, причем можно считать, что $|\lambda| \leqslant |\mu|$;
2) $C_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где λ — вещественное собственное число матрицы C_2 кратности два;
3) $C_3 = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \pm i\mu$ — пара комплексно сопряженных собственных чисел матрицы C_2.

При этом во всех случаях собственные числа матрицы C_2 отличны от нуля, поскольку эта матрица невырождена. Пусть

$$B_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

В первом из указанных случаев мы можем уточнить вид матриц B_3 и C_3, сравнив выражение (2.4) для характеристической формы $\mathcal{F}_3$ с его явным выражением через элементы матриц A_3, B_3 и C_3:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3(\xi,\eta) &= \det\begin{pmatrix} \xi^2 + 2b_1\xi\eta + \lambda\eta^2 & 2b_2\xi\eta \\ 2b_3\xi\eta & \xi^2 + 2b_4\xi\eta + \mu\eta^2 \end{pmatrix} \\ &= \xi^4 + 2(b_1+b_4)\xi^3\eta + (\lambda+\mu+4b_1b_4-4b_2b_3)\xi^2\eta^2 + 2(b_1\mu+b_4\lambda)\xi\eta^3 + \lambda\mu\eta^4.\end{aligned}$$

В случае, когда $\lambda \neq \mu$ получаем

$$A_3 = I, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \kappa^2/\lambda \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $b_2b_3 = -\frac{1}{4}(1-\lambda)(1-\kappa^2/\lambda)$, а при $\lambda = \mu$ получаем

$$A_3 = I, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} \pm\kappa & 0 \\ 0 & \pm\kappa \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $b_1^2 + b_2b_3 = -\frac{1}{4}(1\mp\kappa)^2$.

Во втором из указанных случаев (также сравнивая (2.4) с явным выражением $\mathcal{F}_3$ через элементы матриц B_3 и C_3) получаем, что матрицы B_3 и C_3 оказываются верхнетреугольными. Это, в свою очередь, означает, что полученная система, определяемая оператором $\mathcal{L}_3$, будет разделимой.

Наконец, в третьем случае система соотношений, возникающая при уравнивании одинаковых коэффициентов формы (2.4) и явного выражения для $\mathcal{F}_3$ через элементы матриц B_3 и C_3, оказывается несовместной. Таким образом, в случае неразделимых систем имеет только первый случай строения жордановой формы матрицы C_2. А в этом случае матрицы, задающие соответствующий дифференциальный оператор, могут быть упрощены до вида (2.5) или (2.6).

Шаг 4. Исключение лишних параметров. Пусть матрицы A_3, B_3 и C_3 определены согласно (2.5) и пусть $P = \operatorname{diag}(b_2, 1)$ (т.е. P — это соответствующая диагональная матрица). Тогда матрицы $A_4 = P^{-1}A_3P$, $B_4 = P^{-1}B_3P$ и $C_4 = P^{-1}A_3P$ имеют вид

$$A_4 = I, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4}(1-\lambda)\big(1-\kappa^2/\lambda\big) & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \kappa^2/\lambda \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

а переход от оператора, заданного матрицами A_3, B_3 и C_3, к оператору, заданному матрицами A_4, B_4 и C_4, может быть осуществлен в результате допустимых преобразований второго и третьего типа, определенных матрицами P и P^{-1}.

В случае, когда матрицы A_3, B_3 и C_3 определены согласно (2.6), они также могут быть сведены к матрицам вида A_4, B_4 и C_4 (в частном случае $\lambda = \pm\kappa$) при помощи сопряжения с некоторой невырожденной матрицей, явный внешний вид которой мы не приводим, чтобы избежать ряда громоздких выкладок.

Уточнение множества возможных значений параметра λ. Найдем множество возможных значений параметра λ для неразделимых эллиптических систем, чьи матрицы приведены к виду (2.5) или (2.6). Прежде всего, заметим, что поскольку $|\lambda| \leqslant |\mu|$ и $\lambda\mu = \kappa^2$, то $\lambda \in [-\kappa, \kappa]$. Далее, все матрицы в (2.5) одновременно становятся треугольными в том и только том случае, когда $b_3 = 0$. Тогда, так как $b_2 b_3 = -\frac{1}{4}(1-\lambda)(1-\kappa^2/\lambda)$, то получаем, что $\lambda = \kappa^2$ (заметим, что значение $\lambda = 1$ невозможно, так как $|\lambda| \leqslant |\mu|$). Далее, все матрицы в (2.6) одновременно становятся треугольными в том и только том случае, когда $b_3 = 0$, откуда $b_1 = -\frac{1}{4}(1 \mp \kappa)^2$, т.е. $b_1 = 0$ и $\lambda = \kappa = 1$. Объединяя полученные результаты, имеем $\lambda \in [-\kappa, \kappa] \setminus \{0, \kappa^2\}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что сильная эллиптичность рассматриваемой системы эквивалентна условию $\lambda > 0$. В самом деле, для этого достаточно заметить, что $\det(C_1 - \lambda A_1) = 0$ (так как λ — собственное число матрицы $C_2 = A_1^{-1}C_1$) и использовать формулы для матриц A_1 и C_1, полученные в Лемме 2.1. $\square$

В дальнейшем нам будет удобно использовать другое каноническое представление для систем (1.3), связанное с оператором Коши–Римана. Напомним, что оператор Коши–Римана — это дифференциальный оператор

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big).$$

Вместе с оператором $\overline{\partial}$ мы будем использовать оператор

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big).$$

Напомним, что ядро оператора $\overline{\partial}$ в области $D \subset \mathbb{C}$ — это пространство всех голоморфных функций в D, а ядро оператора ∂ в D — это пространство всех антиголоморфных функций в D (разумеется, оба ядра рассматриваются в классе непрерывных функций в D).

Пусть оператор $\mathcal{L}$ вида (1.2) имеет канонические параметры $\kappa \in (0, 1]$ и $\lambda \in [-\kappa, \kappa]$, $\lambda \neq 0, \kappa^2$. Положим

$$\tau = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}, \qquad \sigma = \frac{\kappa - \lambda}{\kappa + \lambda}.$$

Пусть $\lambda > 0$ (этот случай соответствует сильной эллиптичности системы (1.3), определяемой оператором $\mathcal{L}$). Тогда $|\sigma| < 1$. Определим оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ следующим образом

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)f + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f}. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\lambda < 0$, т.е. система (1.3), определяемая оператором $\mathcal{L}$, не является сильно эллиптической. В этом случае $|\sigma| > 1$, причем при $\lambda = -\kappa$ полагаем $\sigma = \infty$. Положим $s = 1/\sigma$ и определим $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ следующим образом

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = (\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial})f + s(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\overline{f}. \tag{2.9}$$

Заметим, что оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ при $|\sigma|<1$ имеет вид возмущения оператора Лапласа по паре «малых» параметров τ и σ, тогда как при $|\sigma|>1$ он представляет из себя возмущения оператора Бицадзе $\overline{\partial}^2$ по малым параметрам τ и $s=1/\sigma$.

Предложение 2.2. *Пусть оператор $\mathcal{L}$ вида* (1.2) *является сильно эллиптическим. Тогда он может быть приведен допустимыми преобразованиями к виду $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ при $|\sigma|<1$. Если же $\mathcal{L}$ не является сильно эллиптическим, то он приводится допустимыми преобразованиями к виду $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ при $|\sigma|>1$.*

В частности, любой сильно эллиптический оператор вида (1.2) *приводится к виду $\mathcal{L}_{\tau,0}$, а любой оператор вида* (1.2)*, не являющийся сильно эллиптическим, — к виду $\mathcal{L}_{\tau,\infty}$.*

Доказательство. Первым делом заметим, что любая неразделимая эллиптическая система (1.3), заданная оператором $\mathcal{L}$ вида (1.2), может быть записана в виде одного уравнения относительно функции $f=u+iv$:

$$\begin{aligned}(1-\kappa)(\kappa+\lambda)\partial^2 f(z)+&(1+\kappa)(\kappa+\lambda)\partial\overline{\partial}f(z)\\ &+(1+\kappa)(\kappa-\lambda)\partial^2\overline{f(z)}+(1-\kappa)(\kappa-\lambda)\partial\overline{\partial}\,\overline{f(z)}=0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

где параметры κ и λ определены для $\mathcal{L}$ в Предложении 2.1. В самом деле, продолжим преобразования матриц A, B и C, определяющих оператор $\mathcal{L}$, начатое при доказательстве Предложения 2.1.

На *первом шаге* умножим матрицы A_4, B_4 и C_4 из (2.7) слева на $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda/\kappa^2\end{pmatrix}$ и получим матрицы

$$A_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda/\kappa^2\end{pmatrix},\qquad B_5=\begin{pmatrix}0 & 1\\ (\lambda-1)(\lambda-\kappa^2)/(4\kappa^2) & 0\end{pmatrix},\qquad C_5=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

На *втором шаге* при помощи матрицы $L=\begin{pmatrix}2\kappa/(\lambda-\kappa^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ переходим от матриц A_5, B_5 и C_5 к матрицам $A_6=LA_5L^{-1}$, $B_6=LB_5L^{-1}$ и $C_6=LC_5L^{-1}$, а затем, умножая матрицы A_6, B_6 и C_6 слева на матрицу $\begin{pmatrix}\kappa/(\kappa^2-\lambda) & 0\\ 0 & \kappa/(1-\lambda)\end{pmatrix}$, приходим к матрицам

$$\begin{aligned}A_7&=\begin{pmatrix}\kappa/(\kappa^2-\lambda) & 0\\ 0 & \lambda/(\kappa(1-\lambda))\end{pmatrix},\\ B_7&=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\\ C_7&=\begin{pmatrix}\lambda\kappa/(\kappa^2-\lambda) & 0\\ 0 & \kappa/(1-\lambda)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Наконец, на *третьем шаге* остается перейти от системы уравнений на пару функций u и v, заданной оператором, определенным при помощи матриц A_7, B_7 и C_7, к одному комплексному уравнению на функцию $f=u+iv$. Для этого нужно сложить первое уравнение соответствующей системы со вторым, умноженным на i, и заменить производные по x и y на их выражения через операторы $\overline{\partial}$ и ∂, а функции u, v на их выражения через f и $\overline{f}$.

Переход от уравнения (2.10) к уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=0$ проверяется прямым вычислением. □

Заметим, что оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ удобно представить в следующем виде. Определим дифференциальный оператор $\partial_\tau=\overline{\partial}+\tau\partial$ и линейный оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}=\alpha\mathcal{I}+\beta\mathcal{C}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, а $\mathcal{I}$ и $\mathcal{C}$ — это тождественный оператор и оператор комплексного сопряжения соответственно.

Тогда

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = \begin{cases} \partial \mathcal{B}_{1,\sigma} \partial_\tau & \text{при } |\sigma| < 1, \\ \overline{\partial} \mathcal{B}_{1,s} \partial_\tau & \text{при } |\sigma| > 1, \end{cases}$$

где, как и раньше, $s = 1/\sigma$. Кроме того, уравнение $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ при $\sigma \neq \infty$ можно записать в виде системы, с оператором $\mathcal{L}$, заданным матрицами

$$\begin{aligned} A =& (1+\tau) \begin{pmatrix} 1+\sigma & 0 \\ 0 & 1-\sigma \end{pmatrix}, \\ B =& \begin{pmatrix} 0 & \tau - \sigma \\ -(\tau+\sigma) & 0 \end{pmatrix}, \\ C =& (1-\tau) \begin{pmatrix} 1-\sigma & 0 \\ 0 & 1+\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. Функционал энергии для системы (1.3)

Для функции $f = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ обозначим

$$\nabla f = \begin{pmatrix} u_x & v_x & u_y & v_y \end{pmatrix}^t. \tag{3.1}$$

Кроме того, мы будем отождествлять функцию f с вектором $(u,v)^t$ и нам будет удобно использовать обозначения $f_x = (u_x, v_x)^t$ и $f_y = (u_y, v_y)^t$. Для векторов $a, b \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, символом (a,b), как обычно, обозначается их скалярное произведение (в подходящем пространстве $\mathbb{R}^m$). Символом $m_2(\cdot)$ всюду в дальнейшем обозначается двумерная мера Лебега (площадь) в $\mathbb{R}^2$.

В этом разделе мы изучим вопрос, при каких условиях на оператор $\mathcal{L}$ вида (1.2) система (1.3), определяемая этим оператором, допускает неотрицательно определенный функционал энергии вида (1.1). Мы начнем с доказательства нескольких вспомогательных утверждений. Пусть $E \in M_4(\mathbb{R})$ — симметричная матрица, т.е. $E = E^t$, и пусть

$$E = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $K, L, M \in M_2(\mathbb{R})$, причем $K = K^t$ и $M = M^t$.

Лемма 3.1. *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ с границей Γ, пусть $h \in C(\Gamma)$, и пусть $E \in M_4(\mathbb{R})$ — симметричная матрица. Тогда для функционала*

$$\mathcal{E} f := \frac{1}{2} \int_D (E \nabla f, \nabla f)\, dm_2, \tag{3.3}$$

определенного на классе функций

$$\mathcal{F}(D,h) = \{f \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) : f|_\Gamma = h\}, \tag{3.4}$$

система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид (1.3) с матрицами $A = K$, $B = (L + L^t)/2$ и $C = M$, где матрицы K, L и M определены в (3.2).

Доказательство. Запишем рассматриваемый функционал в терминах матриц K, L и M:

$$\mathcal{E} f = \frac{1}{2} \int_D \big((K f_x, f_x) + 2(L f_x, f_y) + (M f_y, f_y) \big)\, dm_2.$$

Вариация этого функционала вычисляется непосредственно:

$$\delta \mathcal{E} f = \int_D \big((K f_x, \delta f_x) + (L^t f_y, \delta f_x) + (L f_x, \delta f_y) + (M f_y, \delta f_y) \big)\, dm_2,$$

где $\delta f_x = (\delta u_x, \delta v_x)^t$ и $\delta f_y = (\delta u_y, \delta v_y)^t$ — вариации векторов f_x и f_y, соответственно. Последнее выражение может быть преобразовано к виду

$$\delta\mathcal{E}f = \int_D \left[\partial_x\big((Kf_x, \delta f) + (L^t f_y, \delta f)\big) + \partial_y\big((Lf_x, \delta f) + (Mf_y, \delta f)\big)\right] dm_2$$
$$- \int_D \left[(Kf_{xx}, \delta f) + ((L + L^t)f_{xy}, \delta f) + (Mf_{yy}, \delta f)\right] dm_2,$$

где $\delta f = (\delta u, \delta v)$ — вариация f, а ∂_x и ∂_y — это операторы частных производных по переменным x и y, соответственно. Первый интеграл в этом выражении является дивергенцией некоторого вектора, следовательно, он равен интегралу вида:

$$\int_\Gamma \big((Kf_x, \delta f) + (L^t f_y, \delta f)\big)\, dy - \big((Lf_x, \delta f) + (Mf_y, \delta f)\big)\, dx,$$

который равен нулю так как вариации функций u и v на Γ равны нулю (поскольку эти функции принимают на Γ предписанные значения). Равенство нулю второго интеграла в выражении для $\delta\mathcal{E}f$ непосредственно приводит к системе уравнений вида (1.3) с матрицами $A = K$, $B = (L + L^t)/2$ и $C = M$. □

Доказательство следующей леммы легко получается непосредственным дифференцированием.

Лемма 3.2. *Пусть на границе Γ жордановой области D задана функция $h \in C(\Gamma)$, пусть $E \in M_4(\mathbb{R})$ — симметричная матрица, а функционал $\mathcal{E}$ на множестве функций $\mathcal{F}(D, h)$ задан при помощи* (3.3). *Тогда*

1) *Если $z \mapsto \zeta = \xi + i\eta$, — линейная невырожденная замена координат в $\mathbb{R}^2$, заданная матрицей $T \in M_2(\mathbb{R})$, то функционал $\mathcal{E}$ в координатах (ξ, η) выражается следующим образом:*

$$\mathcal{E}f = \frac{1}{2}\int_{D_0} (E_0 \nabla_\zeta f, \nabla_\zeta f)\, dm_2(\zeta),$$

где D_0 — это образ D при отображении $z \mapsto \zeta$, $\nabla_\zeta f = (u_\xi, v_\xi, u_\eta, v_\eta)^t$, а компоненты K_0, L_0 и M_0 матрицы E_0, определенные согласно (3.2), *находятся, исходя из следующего матричного соотношения*

$$\begin{pmatrix} K_0 & L_0 \\ L_0^t & M_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} T^t. \tag{3.5}$$

2) *Если функции $f = u + iv$ и $f_1 = u_1 + iv_1$ связаны посредством невырожденного линейного преобразования $f_1 = Qf$, заданного матрицей $Q \in M_2(\mathbb{R})$, то имеет место равенство*

$$\mathcal{E}f = \frac{1}{2}\int_D (E_1 \nabla f_1, \nabla f_1)\, dm_2,$$

где матрица $E_1 \in M_4(\mathbb{R})$ такова, что ее компоненты K_1, L_1 и M_1 из (3.2) *определяются, исходя из матричного соотношения*

$$\begin{pmatrix} K_1 & L_1 \\ L_1^t & M_1 \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} Q. \tag{3.6}$$

Если матрица E неотрицательно (положительно) определена, то обе определенные выше матрицы E_0 и E_1 также будут неотрицательно (положительно) определенными.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Неразделимая эллиптическая система вида* (1.3) *является системой уравнений Эйлера–Лагранжа для некоторого функционала вида* (3.3) *с неотрицательно определенной матрицей* $E \in M_4(\mathbb{R})$ *в том и только том случае, когда эта система является сильно эллиптической и ее канонические параметры* τ *и* σ *таковы, что* $\sigma > \tau$.

Доказательство. Если эллиптическая система (1.3) является системой уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала (3.3), то, согласно Лемме 3.1, эта система либо обладает симметричными матрицами, либо сводится к системе с такими матрицами с помощью перехода к линейным комбинациям ее уравнений. Имеющуюся систему с симметричными матрицами приведем к системе, заданной матрицами вида (2.11). Это может быть осуществлено с помощью линейных комбинаций уравнений системы, которые не изменяют соответствующего функционала энергии, и линейных замен переменных и искомых функций, которые, согласно Лемме 3.2, сохраняют неотрицательную определенность функционала энергии. Теперь умножим все матрицы полученной системы слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} \sigma+\tau & 0 \\ 0 & \sigma-\tau \end{pmatrix}$$

и получим систему с симметричными матрицами

$$\begin{aligned} A =& (1+\tau)\begin{pmatrix} (1+\sigma)(\sigma+\tau) & 0 \\ 0 & (1-\sigma)(\sigma-\tau) \end{pmatrix}, \\ B =& (\tau^2-\sigma^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C =& (1-\tau)\begin{pmatrix} (1-\sigma)(\sigma+\tau) & 0 \\ 0 & (1+\sigma)(\sigma-\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Система, определенная матрицами A, B и C, также является системой уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала вида (3.3) с неотрицательно определенной матрицей E вида (3.2), причем, согласно Лемме 3.1, компоненты матрицы E таковы, что $K = A$, $L+L^t = 2B$ и $M = C$. Используя критерий Сильвестра, получаем, что для неотрицательной определенности такой матрицы E нужно, чтобы матрица K была неотрицательно определенной, откуда следует, что $\sigma > \tau$ (случай $\sigma = \tau$ исключен, так как исходная система неразделима).

Чтобы показать достаточность условий теоремы, предъявим при $0 \leqslant \tau < \sigma < 1$ неотрицательно определенную матрицу E вида (3.2), построенную по матрицам $K = A$, $M = C$ и

$$L = \begin{pmatrix} 0 & (1+\sigma)(\tau^2-\sigma^2) \\ (1-\sigma)(\tau^2-\sigma^2) & 0 \end{pmatrix},$$

и удовлетворяющую условию $L + L^t = 2B$ с матрицей B (где матрицы A, B и C взяты из (3.7)). □

Из Теоремы 3.1, в частности, следует, что для систем, задаваемых операторами $\mathcal{L}_{\tau,0}$ при $\tau > 0$ (т.е. для уравнений вида (1.4), отличных от уравнения Лапласа, которое соответствует разделимой системе) не существует неотрицательно определенного функционала энергии вида (3.3). Это обстоятельство показывает, что непосредственное распространение теоремы Лебега на сильно эллиптические уравнения вида (1.4) не представляется возможным и для доказательства аналога теоремы Лебега для таких уравнений (и, в частности, для решения Задачи 4.2 из [7]) необходимо привлечение существенно другой техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Г. Петровский. *Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными* // Матем. сб. **5**, 3–70 (1939).
2. Hua Loo Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian. *Second-order systems of partial differential equations in the plane*. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.
3. H. Lebesgue. *Sur le problème de Dirichlet* // Rend. Circ. Mat. di Palermo, **29**, 371–402 (1907).
4. М.И. Вишик. *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений* // Матем. сб. **29**:3, 615–676 (1951).
5. G.C. Verchota, A.L. Vogel. *Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains* // Trans. Amer. Math. Soc. **349**:11, 4501–4535 (1997).
6. А.О. Багапш, К.Ю. Федоровский. *C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$* // Тр. МИАН. **298**, 42–57 (2017).
7. П.В. Парамонов, К.Ю. Федоровский. *О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка* // Матем. сб. **190**:2, 123–144 (1999).

Астамур Олегович Багапш,
ФИЦ ИУ РАН,
ул. Вавилова, д. 44, корп. 2,
119333, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
119991, Москва, Россия

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, д. 5 стр. 1,
105005, Москва, Россия
E-mail: a.bagapsh@gmail.com

Константин Юрьевич Федоровский,
Механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
119991, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
119991, Москва, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., д. 29б,
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kfedorovs@yandex.ru