ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 3-15.

УДК 517.544.8

НОРМИРОВКА ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА ДЛЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В.М. АДУКОВ

Аннотация. В работе восполняется пробел, существующий в общей теории факторизации Винера–Хопфа матриц-функций. Известно, что факторизационные множители в такой факторизации находятся не единственным образом и, в общем случае, неизвестны способы нормировки факторизации, гарантирующие ее единственность. В работе введено понятие P-нормированной факторизации. Такая нормировка обеспечивает единственность факторизации Винера–Хопфа и дает возможность находить факторизацию Биркгофа. Для матриц-функций второго порядка показано, что факторизация любой матрицы-функции может быть приведена к P-нормированной факторизации. Описаны все возможные типы таких факторизаций, получены условия, при выполнении которых существует данная нормировка, и найден вид факторизационных множителей для данного типа нормировки. Изучена устойчивость P-нормировки при малом возмущении исходной матрицы-функции. Результаты применены для уточнения теоремы Шубина о непрерывности факторизационных множителей и для получения явных оценок абсолютных погрешностей факторизационных множителей для приближенной факторизации.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа, частные индексы, непрерывность факторизационных множителей, нормировка факторизации.

Mathematics Subject Classification: 47A68, 30E25

1. Введение

Основы теории факторизации Винера–Хопфа матриц-функций и тесно связанной с ней краевой задачей Римана для вектора были заложены много лет назад в трудах таких выдающихся математиков, как И. Племели, Г. Биркгоф, Ф.Д. Гахов, М.Г. Крейн, И.Ц. Гохберг, Б. Боярский, Н.П. Векуа и многих других ученых. Начальный этап в развитии этой теории был связан с вопросами существования факторизации, ее устойчивости и изучением ее общих свойств. В дальнейшем исследования переместились в сторону различных приложений задачи факторизации и разработки конструктивных способов ее построения.

Между тем, остался незамеченным пробел в общей теории факторизации, связанный с отсутствием способов ее нормировки, которая гарантировала бы единственность факторизационных множителей. Возможно, это вызвано тем, что считалось достаточным использование теоремы М.Г. Крейна и И.Ц. Гохберга об общем виде этих множителей. Однако, отсутствие нормировки доставляет определенные неудобства при применении факторизации: трудно сравнить две факторизации заданной матрицы-функции, полученные различными конструктивными методами; известная теорема М.А. Шубина о непрерывности факторизационных множителей в силу неединственности факторизации носит

V.M. Adukov, Normalization of Wiener–Hopf factorization for 2×2 matrix functions and its application.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-41-740024.

Поступила 12 ноября 2021 г.

несколько неопределенный характер. В свою очередь, это не позволяет применить ее при оценке погрешности приближенной факторизации.

В этой работе мы частично восполним данный пробел в теории. Главной нашей целью является нахождения условий на факторизацию, обеспечивающих ее единственность. Кроме того, на нормировку будет накладываться дополнительное требование так, чтобы нормированная факторизация Винера–Хопфа порождала так называемую факторизацию Биркгофа. Это позволит избежать некоторых технических трудностей при применении нормированной факторизации. В предлагаемой работе мы в основном ограничимся рассмотрением матриц-функций второго порядка, т.к. при этом получается полная и прозрачная теория нормировки.

Напомним основные понятия теории факторизации. Основными источниками сведений по этой теории являются монографии [1]–[3].

Пусть $A(t)$ — обратимая на единичной окружности $\mathbb{T}$ матрица-функция порядка p из матричной алгебры Винера $W^{p\times p}(\mathbb{T})$. Стандартная норма на этой алгебре будет обозначаться $\|\cdot\|_W$.

Правой факторизацией Винера–Хопфа $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.1}$$

где $A_\pm(t) \in GW^{p\times p}_\pm(\mathbb{T})$, $D(t) = \operatorname{diag}[t^{\rho_1}, \ldots, t^{\rho_p}]$, $\rho_1 \leqslant \ldots \leqslant \rho_p$ — правые частные индексы $A(t)$. Здесь $GW^{p\times p}_\pm(\mathbb{T})$ — группа обратимых элементов подалгебры $W^{p\times p}_\pm(\mathbb{T})$, состоящей из абсолютно сходящихся матричных рядов Фурье с нулевыми коэффициентами Фурье с отрицательными/положительными индексами. Аналогичным образом (с перестановкой местами факторов $A_-(t)$, $A_+(t)$) определяется *левая факторизация Винера–Хопфа*. Правые (левые) частные индексы однозначно (с точностью до порядка) определяются матрицей-функцией $A(t)$, в отличие от факторизационных множителей $A_\pm(t)$.

Задача факторизации Винера–Хопфа имеет многочисленные применения в задачах математической физики (дифракция волн, акустика, теория упругости, механика разрушения, геофизика) [4]–[6], в теории дифференциальных уравнений (аналитическая теория дифференциальных уравнений, решение нелинейных уравнений матфизики методом обратной задачи рассеяния, теория солитонов) [7] и в математическом анализе (системы интегральных и дискретных уравнений Винера–Хопфа, системы сингулярных интегральных уравнений) [8], [9]. Отметим, что в приложениях чаще всего задача факторизации Винера–Хопфа возникает при исследовании краевой задачи Римана с коэффициентом $A(t)$ для вектора. Построение факторизации эквивалентно нахождению канонической матрицы для соответствующей краевой задачи Римана.

Поскольку в общем случае отсутствуют явные формулы для факторизационных множителей $A_\pm(t)$ и нет методов вычисления частных индексов, то актуальной является задача разработки приближенных методов факторизации. Однако, решение этой проблемы наталкивается на значительные трудности, связанные с неустойчивостью, в общем случае, задачи.

По данной причине, по крайней мере на первом этапе исследований в этой области, следует сосредоточиться на разработке приближенной факторизации в устойчивом случае, когда частные индексы не меняются при малом возмущении исходной матрицы-функции $A(t)$, а факторизационные множители $A_\pm(t)$ непрерывно зависят от $A(t)$. Более точно, устойчивость задачи означает следующее:

– Частные индексы $\rho_1, \ldots, \rho_p$ матрицы-функции $A(t)$ являются *устойчивыми*, т.е. для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ любая матрица-функция $\widetilde{A}(t)$, удовлетворяющая неравенству $\|A(t) - \widetilde{A}(t)\|_W < \varepsilon$, обладает тем же набором правых частных индексов, что и $A(t)$.

– Факторизационные множители являются *непрерывно зависящими от* $A(t)$ или *устойчивыми*, т.е. для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой матрицы-функции $\widetilde{A}(t)$, удовлетворяющей неравенству $\|A(t) - \widetilde{A}(t)\|_W < \delta$, среди всех возможных факторизаций $\widetilde{A}(t)$ найдется факторизация $\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_-(t)\widetilde{D}(t)\widetilde{A}_+(t)$, для которой $\|A_\pm(t) - \widetilde{A}_\pm(t)\|_W < \varepsilon$.

Обратим внимание на уточнение «среди всех возможных факторизаций» $\widetilde{A}(t)$. Это связано с тем, что факторизационные множители, как уже отмечалось, находятся не единственным образом, и потому говорить о их близости для близких матриц-функций $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$ нельзя, не выбрав специальным образом соответствующие факторизации, т.е. как-то не пронормировав их.

Напомним, что известно об устойчивости задачи. Имеется классический критерий Гохберга–Крейна–Боярского устойчивости частных индексов [8], [10], [11]: система правых частных индексов $\rho_1 \leqslant \ldots \leqslant \rho_p$ устойчива при малом возмущении матрицы-функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда $\rho_p - \rho_1 \leqslant 1$. К сожалению, этот критерий не является эффективным, поскольку нет методов вычисления частных индексов. В настоящее время в общем случае не известно даже, когда матрица-функция допускает каноническую факторизацию (т.е. факторизацию с нулевыми частными индексами). Эффективные критерии устойчивости индексов имеются для треугольных матриц-функций второго порядка [12] и для лорановских матричных многочленов [13].

Относительно второго условия устойчивости факторизационной задачи известно следующее. Необходимым условием устойчивости факторов $\widetilde{A}_\pm(t)$ является совпадение частных индексов у исходной $A(t)$ и возмущенной $\widetilde{A}(t)$ матриц-функций [3, теорема 6.14]. Таким образом, об устойчивости факторов можно говорить только в том случае, когда $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$ принадлежат одному и тому же классу Боярского $\Omega(\rho_1, \ldots, \rho_p)$, состоящему из матриц-функций с одинаковым набором частных индексов $\rho_1, \ldots, \rho_p$ [11].

Если это условие выполнено, то факторы $A_\pm(t)$ непрерывно зависят от $A(t)$ (теорема М.А. Шубина, см. [3, теорема 6.15], [14]). Теорема Шубина носит, однако, не полный характер: неизвестно, как нужно выбирать факторизацию $\widetilde{A}(t)$, чтобы гарантировать устойчивость факторов. В силу этого, невозможно получить явные оценки абсолютной погрешности $\|A_\pm(t) - \widetilde{A}_\pm(t)\|_W$ нахождения факторизационных множителей. Эти проблемы появляются потому, что неизвестно, как нужно нормировать факторизацию, чтобы добиться ее единственности.

Если все частные индексы равны между собой, то подобных проблем не возникает. В данном случае нормировать факторизацию можно, фиксировав числовую матрицу $A_-(\infty)$. Этим условием факторизация определяется однозначно и, если одинаково нормировать достаточно близкие матрицы-функции $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$, то их факторизационные множители также будут близки, причем можно получить явные оценки для $\|A_\pm(t) - \widetilde{A}_\pm(t)\|_W$ в терминах факторизации исходной матрицы-функции [15].

Цель работы — изучить проблему нормировки факторизации, ограничившись случаем матриц-функций второго порядка, наиболее часто встречающимся в приложениях. Мы введем понятие P-нормированной факторизации и покажем, что любая факторизация матрицы-функции второго порядка может быть нормировкой в бесконечно удаленной точке приведена к P-нормированной факторизации. Далее мы опишем все возможные типы таких факторизаций, найдем условия, при выполнении которых существует данная нормировка и укажем вид факторизационных множителей для данного типа нормировки.

Оказалось, что P-нормировка близких матриц-функций $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$ позволяет уточнить теорему Шубина и получить явные оценки для абсолютной погрешности $\|A_\pm(t) - \widetilde{A}_\pm(t)\|_W$.

Такие оценки необходимы для получения в некоторых случаях приближенного решения задачи факторизации Винера–Хопфа с гарантированной точностью [16].

2. P-нормировка факторизации Винера–Хопфа

Напомним теорему Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей $A_\pm(t)$ [1, Гл. VIII, теорема 1.2]. Сформулируем ее в виде, удобном для нас.

Пусть $\rho_1,\ldots,\rho_p$ — произвольный набор целых чисел, упорядоченный по возрастанию: $\rho_1 \leqslant \ldots \leqslant \rho_p$. Будем считать, что в этом наборе имеется s различных чисел $\varkappa_1 < \ldots < \varkappa_s$ кратностей $k_1,\ldots,k_s$, соответственно. Обозначим $\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$ множество всех блочно-треугольных матриц-функций вида

$$Q_-(t) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1s} \\ 0 & Q_{22} & \ldots & Q_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & Q_{ss} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь блок Q_{ij} имеет размеры $k_i \times k_j$, диагональные блоки Q_{ii} являются постоянными обратимыми матрицами порядка k_i, а внедиагональные блоки $Q_{ij}(t)$ — это матричные многочлены по переменной t^{-1} степени не выше $\varkappa_j - \varkappa_i$. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$ является подгруппой группы $GW_-^{p\times p}(\mathbb{T})$.

Пусть $D(t) = \operatorname{diag}[t^{\rho_1},\ldots,t^{\rho_p}]$. Определим матрицу-функцию

$$Q_+(t) = D^{-1}(t)Q_-^{-1}(t)D(t).$$

Легко проверить, что она имеет вид (2.1), только в данном случае $Q_{ij}(t)$ являются матричными многочленами по переменной t степени не выше $\varkappa_j - \varkappa_i$, и, таким образом, $Q_+(z) \in GW_+^{p\times p}(\mathbb{T})$.

Теорема Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей утверждает, что, если (1.1) — факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$, то представление

$$A(t) = G_-(t)D(t)G_+(t), \tag{2.2}$$

где $G_-(t) = A_-(t)Q_-(t)$, $G_+(t) = Q_+(t)A_+(t)$, также является факторизацией Винера–Хопфа $A(t)$ для любой $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$. Более того, любая факторизация $A(t)$ может быть получена из исходной факторизации (1.1) подобным образом при соответствующем выборе $Q_-(t)$. С алгебраической точки зрения, множество всех возможных факторизационных множителей $G_-(t) = A_-(t)Q_-(t)$ образует левый смежный класс элемента $A_-(t)$ группы $GW_-^{p\times p}(\mathbb{T})$ по подгруппе $\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$.

Определение 2.1. *Переход от исходной факторизации (1.1) к факторизации (2.2) с помощью матрицы-функции $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$ будем называть нормировкой факторизации (1.1) в бесконечно удаленной точке.*

Таким образом, нормировка факторизации в бесконечно удаленной точке определяется выбором $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$, т.е. выбором представителя в левом смежном классе $A_-(t)\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$. Наша задача — выбрать в каком-то смысле канонический представитель данного смежного класса.

Вообще говоря, существуют различные способы нормировки факторизации Винера–Хопфа. Например, нормировку факторизации можно производить с помощью выбора $Q_+(t)$. В этом случае следует говорить о нормировке факторизации в точке $z = 0$. На вид нормировки также влияет выбранный порядок на множестве частных индексов. В работе [17] была введена нормировка факторизации в двух точках $z = 0$ и $z = \infty$ для некоторых матриц-функций с нулевыми частными индексами. Такая нормировка является обязательным шагом при решении дискретного аналога нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи рассеяния [18].

Главное условие, определяющее выбор канонического представителя, будет связано с факторизацией Биркгофа матриц-функций. Эта факторизация была введена Г. Биркгофом [19] в связи с некоторыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы излагаем основные факты о факторизации такого типа по монографии [2].

Правой факторизацией Биркгофа $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = D_b(t)B_-(t)B_+(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.3}$$

где $B_\pm(t) \in GW_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$ и $D_b(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_p}\right]$, $\beta_1, \dots, \beta_p$ — правые индексы Биркгофа $A(t)$. В отличие от частных индексов, индексы Биркгофа не определяются однозначно матрицей-функцией $A(t)$. Однако, среди всевозможных наборов индексов Биркгофа всегда существует набор, полученный некоторой перестановкой правых частных индексов. Этот важный факт впервые обнаружил И.С. Чеботару [20]. Таким образом, одна из факторизаций Биркгофа всегда может быть записана в виде

$$A(t) = PD(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.4}$$

где P — некоторая матрица перестановок.

Теперь мы можем определить каноническую нормировку факторизации.

Определение 2.2. *Пусть P — матрица перестановок порядка p. Факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$:*

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t) \tag{2.5}$$

называется P-нормированной, если выполняются условия:

1. *Матрица-функция $B_-(t) = PD^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)D(t)$ принадлежит алгебре $W_-^{p\times p}(\mathbb{T})$;*
2. *$B_-(\infty) = P$.*

Факторизацию с P-нормировкой будем также называть *нормированной факторизацией P-типа*.

Пример 2.1. *Рассмотрим нормировку факторизации Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$ с равными частными индексами $\rho_1 = \ldots = \rho_p \equiv \rho$:*

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t), \quad D(t) = t^\rho I_p.$$

В данном случае подгруппа $\mathcal{Q}_-(\rho_1, \dots, \rho_p)$ состоит из постоянных обратимых матриц порядка p, и любая нормировка в бесконечно удаленной точке сводится к умножению $A_-(t)$ справа на произвольную обратимую матрицу. Тогда $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$, где $C_-(t) = A_-(t)A_-^{-1}(\infty)$, $C_+(t) = A_-(\infty)A_+(t)$, есть нормированная факторизация I_p-типа, поскольку в этом случае $B_-(t) = C_-(t)$ и $B_-(\infty) = C_-(\infty) = I_p$. Таким образом, в этом случае имеется только один тип P-нормировки.

Следующая теорема проясняет значение условий определения 2.2.

Теорема 2.1. *Пусть для матрицы-функции $A(t)$ существует P-нормированная факторизация Винера–Хопфа:*

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t).$$

Тогда

1. *P-нормированная факторизация Винера–Хопфа порождает факторизацию Биркгофа по формуле*
$$A(t) = PD(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t),$$
где $B_-(t) = PD^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)D(t)$, $B_+(t) = C_+(t)$.
2. *Данная P-нормированная факторизация Винера–Хопфа единственна.*

Доказательство. Условие 1 определения 2.2 равносильно утверждению, что $B_-(t) \in GW_-^{p\times p}(\mathbb{T})$. Существование вышеуказанной факторизации Биркгофа проверяется непосредственно.

Докажем единственность P-нормированной факторизации Винера–Хопфа. Предположим, что $A(t) = \widetilde{C}_-(t)D(t)\widetilde{C}_+(t)$ — еще одна P-нормированная факторизация $A(t)$ и $A(t) = PD(t)P^{-1}\widetilde{B}_-(t)\widetilde{B}_+(t)$, соответствующая ей факторизация Биркгофа. Тогда $\widetilde{B}_-^{-1}(t)B_-(t) = \widetilde{B}_+(t)B_+^{-1}(t)$, и потому, по теореме Лиувилля, эта матрица-функция является постоянной обратимой матрицей. Значит, $\widetilde{B}_-^{-1}(t)B_-(t) = \widetilde{B}_-^{-1}(\infty)B_-(\infty) = I_p$, в силу условия 2 определения 2.2. Таким образом, $\widetilde{B}_-(t) = B_-(t)$ и $\widetilde{C}_-(t) = C_-(t)$, $\widetilde{C}_+(t) = C_+(t)$. □

Замечание 2.1. *Мы показали, что P-нормированная факторизация Винера–Хопфа порождает факторизацию Биркгофа. Вообще говоря, произвольная факторизация Биркгофа не порождает подобным образом факторизацию Винера–Хопфа. Однако, справедливо следующее. Пусть задана факторизация Биркгофа (2.3) и P — любая матрица перестановок такая, что в диагональной матрице-функции $D(t) = PD_b(t)P^{-1}$ индексы Биркгофа $\beta_1, \dots, \beta_p$ переупорядочены по убыванию. Если фактор $B_-(t)$ удовлетворяет условию*

$$D_b(t)B_-(t)PD_b^{-1}(t)P^{-1} \in W_-^{p\times p}(\mathbb{T}),$$

то индексы Биркгофа (после переупорядочения) совпадают с правыми частными индексами $A(t)$, и факторизация Биркгофа порождает P-нормированную факторизацию Винера–Хопфа

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t),$$

где $C_-(t) = D_b(t)B_-(t)PD_b^{-1}(t)P^{-1},\ C_+(t) = B_+(t)$. Таким образом, P-нормированная факторизация Винера–Хопфа и построенная по ней факторизация Биркгофа эквивалентны. Этот факт позволит свести изучение непрерывности факторизационных множителей и получение явных оценок для их абсолютных погрешностей к уже решенной подобной задаче для матриц-функций, допускающих каноническую факторизацию [15].

Условие $B_-(\infty) = P$, обеспечивающее единственность P-нормированной факторизации, можно заменить на $B_-(\infty) = A_0$, где A_0 — любая обратимая матрица. Первоначальное условие позволит получить более простой вид факторов $C_-(t)$, $B_-(t)$ в P-нормированных факторизациях.

В связи с определением 2.2, возникают следующие естественные вопросы.

1. Прежде всего, нужно выяснить, для любой ли матрицы-функции $A(t) \in GW^{p\times p}(\mathbb{T})$ существует нормированная факторизация какого-либо P-типа?
2. Для матриц-функций из класса Боярского $\Omega(\rho_1, \dots, \rho_p)$, т.е. имеющих одинаковый набор правых частных индексов, перечислить все возможные P-типы нормировок.
3. Указать необходимые и достаточные условия, определяющие нормировку P-типа.
4. Указать вид факторизационных множителей $C_\pm(t)$, $B_\pm(t)$ для каждого P-типа.
5. Проверить устойчивость заданного P-типа нормировки по отношению к малому возмущению исходной матрицы-функции $A(t)$.
6. Используя каноническую нормировку, получить полный вариант теоремы Шубина о непрерывности факторизационных множителей, включающий явную оценку абсолютных погрешностей $\|C_\pm(t) - \widetilde{C}_\pm(t)\|_W$.

При перечислении возможных P-типов нормировки факторизации матриц-функций из класса $\Omega(\rho_1, \dots, \rho_p)$ хотелось бы указать полный набор непересекающихся типов нормировки. Однако, в этом случае некоторые типы нормировок не будут устойчивыми при малом возмущении исходной матрицы-функции. Поскольку такая устойчивость важна для построения приближенной факторизации, мы в дальнейшем не будем требовать дизъюнктного разбиения множества возможных нормировок.

Для многих из этих задач можно дать приемлемые решения для матриц-функций произвольного порядка p. Однако, полная и прозрачная картина нормировки возникает при $p = 2$. Далее мы ограничимся данным случаем.

3. P-нормировка факторизации Винера–Хопфа матриц-функций второго порядка

Случай, когда $\rho_1 = \rho_2$ разобран в Примере 2.1. В этом случае всегда существует нормировка I_2-типа. Возможен только такой тип P-нормировки. Устойчивость данного типа нормировки изучена в работе [15].

Далее будем считать, что $\rho_1 < \rho_2$. Обозначим $\rho = \rho_2 - \rho_1$. Матрица-функция $Q_-(t)$ из теоремы об общем виде факторизационных множителей теперь имеет вид

$$Q_-(t) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12}(t) \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Здесь q_{11}, q_{22} — ненулевые числа и $q_{12}(t) = \sum_{k=0}^{\rho} q_{12}^{(k)} t^{-k}$ — скалярный многочлен от t^{-1} степени не выше $\rho = \rho_2 - \rho_1$. Параметры q_{11}, q_{22}, $q_{12}^{(k)}$ требуется подобрать так, чтобы привести факторизацию (1.1) к канонически нормированной факторизации (2.5):

$$C_-(t) = A_-(t)Q_-(t).$$

Оказывается, что требование 1 из определения 2.2 P-нормировки равносильно существованию так называемой PLU-факторизации обратимой числовой матрицы $A_0 = A_-(\infty)$. Напомним (см., например, [21]), что, если обратимая матрица A_0 может быть представлена в виде произведения $A_0 = LU$ нижней треугольной матрицы L на верхнюю треугольную матрицу U, то говорят, что A_0 допускает *LU-факторизацию*. Необходимым и достаточным условием существования LU-факторизации матрицы A_0 является отличие от нуля всех ведущих миноров этой матрицы. Если фиксировать диагональные элементы матрицы L, то LU-факторизация будет единственной.

В общем случае всегда существует (вообще говоря, неединственная) матрица перестановок P^{-1} такая, что $P^{-1}A_0$ допускает LU-факторизацию, т.е. A_0 представляется в виде $A_0 = PLU$. Это и есть *PLU-факторизация* A_0.

Для $p = 2$ существует только две матрицы перестановок:

$$P_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $A_0 = A_-(\infty)$ обратима, то для любой факторизации Винера–Хопфа $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ всегда осуществляется хотя бы один из следующих двух типов треугольных разложений A_0: LU-факторизация, при $(A_0)_{11} \neq 0$ и JLU-факторизация при $(A_0)_{21} \neq 0$. Легко проверить, что, если условие $(A_0)_{11} \neq 0$ (или $(A_0)_{21} \neq 0$) выполнено хотя бы для одной факторизации Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$, то оно выполняется для любой факторизации данной матрицы-функции.

Теорема 3.1. *Матрица-функция $A(t) \in GW^{2\times 2}(\mathbb{T})$ допускает нормированную факторизацию P-типа тогда и только тогда, когда для некоторой факторизации $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ числовая матрица $A_0 = A_-(\infty)$ допускает PLU-факторизацию, т.е. когда $(A_0)_{11} \neq 0$ для $P = I$ или $(A_0)_{21} \neq 0$ для $P = J$.*

Если это условие выполнено, то P-нормированная факторизация Винера–Хопфа и соответствующая ей факторизация Биркгофа имеют вид:

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t), \quad A(t) = PD(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t),$$

где

$$C_-(t) = P\begin{pmatrix} 1+t^{-1}c^-_{11}(t) & t^{-\rho-1}c^-_{12}(t) \\ c^-_{21}(t) & 1+t^{-1}c^-_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$B_-(t) = P\begin{pmatrix} 1+t^{-1}c^-_{11}(t) & t^{-1}c^-_{12}(t) \\ t^{-\rho}c^-_{21}(t) & 1+t^{-1}c^-_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $c^-_{ij}(t) \in W_-(\mathbb{T})$.

Доказательство. Предположим, что матрица-функция $A(t)$ допускает нормированную факторизацию $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$ с матрицей перестановок $P = I$. Тогда, в силу условия 1 из определения 2.2, должно выполняться $D^{-1}C_-(t)D(t) \in W_-^{2\times 2}(\mathbb{T})$. Это требование равносильно тому, что элемент $\big(C_-(t)\big)_{12}$ имеет на бесконечности нуль порядка не меньше $\rho = \rho_2 - \rho_1$. В частности, матрица $C_-(\infty)$ является нижней треугольной. Для любой первоначальной факторизации $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$, по теореме об общем виде факторизационных множителей, $C_-(t) = A_-(t)Q_-(t)$ для некоторой $Q_-(t)$ вида (3.1). В частности, $C_-(\infty) = A_-(\infty)Q_-(\infty)$, где $Q_-(\infty)$ — верхняя треугольная матрица. Таким образом, $A_-(\infty)$ допускает LU-факторизацию. Случай $P = J$ легко приводится к рассмотренному.

Пусть теперь матрица $A_-(\infty)$ для некоторой факторизации $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ допускает PLU-факторизацию. Покажем, что тогда для $A(t)$ существует P-нормированная факторизация, и найдем вид факторов $C_-(t)$, $B_-(t)$ в данном случае.

Предположим вначале, что $P = I$, т.е. $\big(A_-(\infty)\big)_{11} \neq 0$. Нормируем LU-факторизацию матрицы $A_0 = A_-(\infty)$ условием, что диагональные элементы нижней треугольной матрицы L выбраны единичными. По теореме об общем виде факторизации, любые два фактора $A_-(t)$, $C_-(t)$ связаны соотношением

$$C_-(t) = A_-(t)Q_-(t), \tag{3.3}$$

где $Q_-(t)$ имеет вид $Q_-(t) = \begin{pmatrix} q_{11} & \sum_{k=0}^{\rho} q^{(k)}_{12}t^{-k} \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}$.

Подберем параметры q_{11}, q_{22}, $q^{(k)}_{12}$ так, чтобы фактор $C_-(t)$ имел вид (3.2).

Для этого разложим аналитические в области D_- матрицы-функции $A_-(t)$, $C_-(t)$ в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$A_-(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-k}, \quad C_-(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k}.$$

Пусть $Q_-(t) = \sum_{k=0}^{\rho} Q_k t^{-k}$, где $Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11} & q^{(0)}_{12} \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}$, $Q_k = \begin{pmatrix} 0 & q^{(k)}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $1 \leqslant k \leqslant \rho$. Элементы матрицы A_k обозначим $a^{(k)}_{ij}$, по условию $a^{(0)}_{11} \neq 0$.

Из равенства (3.3) следует, что $C_k = \sum_{j=0}^{k} A_{k-j}Q_j$, в частности, $C_0 = A_0Q_0$. Построим нормированную LU-факторизацию матрицы A_0:

$$A_0 := L_0 \cdot U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a^{(0)}_{21}}{a^{(0)}_{11}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{(0)}_{11} & a^{(0)}_{12} \\ 0 & \frac{\det A_0}{a^{(0)}_{11}} \end{pmatrix}.$$

Положим $Q_0 = U_0^{-1}$, тогда $C_0 = L_0$. Параметры q_{11}, q_{22}, $q^{(0)}_{12}$ определены. Оставшиеся параметры $q^{(k)}_{12}$, $1 \leqslant k \leqslant \rho$, найдем рекуррентно. Поскольку

$$C_k = A_kU_0^{-1} + \sum_{j=1}^{k} A_{k-j}Q_j = A_kU_0^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=1}^{k} a^{(k-j)}_{11}q^{(j)}_{12} \\ 0 & \sum_{j=1}^{k} a^{(k-j)}_{21}q^{(j)}_{12} \end{pmatrix},$$

то отсюда следует такое соотношение для элементов матрицы C_k:

$$(C_k)_{12} = (A_k U_0^{-1})_{12} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{11}^{(k-j)} q_{12}^{(j)} + a_{11}^{(0)} q_{12}^{(k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \rho.$$

Здесь, для удобства, мы принимаем обычное соглашение, что «пустая» сумма считается равной нулю.

Определив $q_{12}^{(k)}$ последовательно для $1 \leqslant k \leqslant \rho$ по формулам

$$q_{12}^{(k)} = -\frac{1}{a_{11}^{(0)}} \Big((A_k U_0^{-1})_{12} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{11}^{(k-j)} q_{12}^{(j)} \Big), \tag{3.4}$$

мы получаем, что $(C_k)_{12} = 0$ для данных значений k. Вместе с уже найденным значением $C_0 = L_0$ это дает для $C_-(t)$ вид (3.2).

Проверим выполнение условий 1, 2 определения 2.2. Введем матрицу-функцию $B_-(t) = D^{-1}(t) C_-(t) D(t)$. Вычисления показывают, что

$$B_-(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{-1} c_{11}^-(t) & t^{-1} c_{12}^-(t) \\ t^{-\rho} c_{21}^-(t) & 1 + t^{-1} c_{22}^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что матрица-функция $B_-(t)$ вместе с обратной принадлежит алгебре $W_-^{2\times 2}(\mathbb{T})$. Очевидно, что $B_-(\infty) = I = P$. Нормированная факторизация Винера–Хопфа I-типа и соответствующая ее факторизация Биркгофа построены.

Рассмотрим теперь второй возможный случай канонической нормировки. Пусть для матрицы-функции $A(t)$ существует правая факторизация Винера–Хопфа, для которой матрица $A_0 = A_-(\infty)$ допускает JLU-факторизацию, т.е. для которой $\big(A_-(\infty)\big)_{21} \neq 0$. В данной JLU-факторизации A_0 считаем, что элементы нижней треугольной матрицы L, лежащие на побочной диагонали, выбраны единичными.

Сведем этот случай к предыдущему. Для этого введем вспомогательную матрицу-функцию $F(t) = JA(t) = \begin{pmatrix} a_{21}(t) & a_{22}(t) \\ a_{11}(t) & a_{12}(t) \end{pmatrix}$. Она допускает факторизацию Винера–Хопфа $F(t) = F_-(t) D(t) F_+(t)$, где $F_-(t) = JA_-(t)$, $F_+(t) = A_+(t)$. Поэтому $F_0 = F_-(\infty) = JA_0$, и для $F(t)$ имеет место первый случай нормировки, т.е. она допускает I-нормированную факторизацию $F(t) = K_-(t) D(t) K_+(t)$, где

$$K_-(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{-1} c_{11}^-(t) & t^{-\rho-1} c_{12}^-(t) \\ c_{21}^-(t) & 1 + t^{-1} c_{22}^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

и $c_{ij}^-(t) \in W_-(\mathbb{T})$.

Тогда $A(t) = JF(t)$ имеет J-нормированную факторизацию с фактором

$$C_-(t) = JK_-(t) = \begin{pmatrix} c_{21}^-(t) & 1 + t^{-1} c_{22}^{-1}(t) \\ 1 + t^{-1} c_{11}^-(t) & t^{-\rho-1} c_{12}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Утверждение теоремы относительно факторизации Биркгофа также легко проверяется. □

Замечание 3.1. *Если для $A(t)$ известна произвольная факторизация Винера–Хопфа $A(t) = A_-(t) D(t) A_+(t)$, то все построения в данной теореме могут быть проведены конструктивно, поскольку матрица-функция $Q_-(t)$, производящая данную P-нормировку, находится по рекуррентным соотношениям (3.4).*

Для треугольных матриц-функций второго порядка [12] *и для лорановских матричных многочленов* [13]*, когда факторизация строится в явном виде, нормировку можно осуществить явно.*

Отметим одно важное обстоятельство, относительно дизъюнктности классов нормировки. Некоторые матрицы-функции $A(t)$ из класса $\Omega(\rho_1,\rho_2)$ могут одновременно допускать нормировку I-типа и J-типа, поскольку возможно, что одновременно выполняются условия $\big(A_-(\infty)\big)_{11} \neq 0$, $\big(A_-(\infty)\big)_{21} \neq 0$. Поэтому, чтобы любая матрица-функция $A(t)$ допускала один и только один тип канонической нормировки, нужно потребовать, чтобы $\big(A_-(\infty)\big)_{11} \neq 0$ (I-тип) или $\big(A_-(\infty)\big)_{11} = 0$. В последнем случае выполняется условие $\big(A_-(\infty)\big)_{21} \neq 0$, и мы имеем частный случай J-нормировки. Назовем этот тип OJ-типом. Таким образом, для данного типа существует факторизация $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$, для которой

$$A_-(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq 0.$$

В этом случае любая факторизация $A(t)$ удовлетворяет данным условиям.

Понятно, что факторизация в третьем случае нормировки строится по тем же формулам, что для J-типа, но с дополнительным условием $\big(C_-(\infty)\big)_{11} = 0$, т.е. фактор $C_-(t)$ в этом случае имеет вид

$$C_-(t) = \begin{pmatrix} t^{-1}k_{11}^-(t) & 1 + t^{-1}k_{12}^-(t) \\ 1 + t^{-1}k_{21}^-(t) & t^{-\rho-1}k_{22}^{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Данные три типа нормировки мы будем называть *каноническими нормировками в бесконечно удаленной точке.*

Для того, чтобы изначально прийти к дизъюнктным типам нормировок, нужно было использовать вместо PLU-разложения матрицы $A_-(\infty)$ так называемое разложение Брюа: $A_-(\infty) = LPU$, в котором перестановка P определяется единственным образом. Однако, как мы увидим ниже, такой тип нормировок не удобен с точки зрения приложений, поскольку OJ-тип нормировки не будет устойчивым при малом возмущении исходной матрицы-функции $A(t)$.

4. Устойчивые типы канонической нормировки

В этом и следующем параграфах при определении нормы $\|\cdot\|_W$ матрицы-функции из матричной алгебры Винера мы будем использовать максимальную столбцовую норму $\|\cdot\|_1$ для ее матричных коэффициентов Фурье.

Определение 4.1. *Каноническая нормировка факторизации матрицы-функции $A(t)$ называется устойчивой при малом возмущении $A(t)$ в классе Боярского $\Omega(\rho_1,\rho_2)$, если для любого достаточно малого $\delta > 0$ любая матрица-функция $\widetilde{A}(t)$, имеющая тот же набор правых частных индексов ρ_1, ρ_2, что и $A(t)$, и удовлетворяющая неравенству $\|A(t) - \widetilde{A}(t)\|_W < \delta$, имеет тот же тип канонической нормировки, что и $A(t)$.*

Очевидно, что при $\rho_1 = \rho_2$ каноническая нормировка является устойчивой. Рассмотрим случай $\rho_1 < \rho_2$.

Теорема 4.1. *Каноническая нормировка факторизации типа $P = I$ или $P = J$ является устойчивой при малом возмущении $A(t)$ в классе Боярского $\Omega(\rho_1,\rho_2)$. Каноническая нормировка типа OJ неустойчива.*

Доказательство. Предположим, что матрица-функция $A(t)$ допускает канонически нормированную факторизацию I-типа: $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$, где

$$C_-(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{-1}c_{11}^-(t) & t^{-\rho-1}c_{12}^-(t) \\ c_{21}^-(t) & 1 + t^{-1}c_{22}^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Значит, $C_-(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21}^-(\infty) & 1 \end{pmatrix}$.

По теореме Шубина, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что, если $\|A(t) - \widetilde{A}(t)\|_W < \delta$, и матрицы-функции $A(t)$, $\widetilde{A}(t)$ имеют одинаковый набор частных индексов, то существует факторизация $\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_-(t)D(t)\widetilde{A}_+(t)$, для которой $\|C_-(t) - \widetilde{A}_-(t)\|_W < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\|C_-(\infty) - \widetilde{A}_-(\infty)\|_1 < \varepsilon$, а значит, и $|1 - \big(\widetilde{A}_-(\infty)\big)_{11}| < \varepsilon$. Таким образом, $\big(\widetilde{A}_-(\infty)\big)_{11} \neq 0$, и матрица-функция $\widetilde{A}(t)$ допускает канонически нормированную факторизацию I-типа. Аналогично рассматривается случай J-нормировки.

Докажем, что нормировка типа OJ не является устойчивой. В самом деле, пусть для матрицы-функции $A(t)$ существует канонически нормированная факторизация типа OJ: $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$, где $C_-(t)$ находится по формуле (3.5).

Составим матрицу-функцию $\widetilde{C}_-(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon + t^{-1}k_{11}^-(t) & 1 + t^{-1}k_{12}^-(t) \\ 1 + t^{-1}k_{21}^-(t) & t^{-\rho-1}k_{22}^{-1}(t) \end{pmatrix}$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда $\|C_-(t) - \widetilde{C}_-(t)\|_W = \varepsilon$, и потому $\widetilde{C}_-(t)$ – обратимая на $\mathbb{T}$ матрица-функция, принадлежащая вместе с обратной подалгебре $W_-^{2\times 2}(\mathbb{T})$.

Образуем матрицу-функцию $\widetilde{A}(t) = \widetilde{C}_-(t)D(t)C_+(t)$. Эта матрица-функция имеет такие же правые частные индексы, как $A(t)$, имеет нормировку I-типа и удовлетворяет неравенству $\|A(t) - \widetilde{A}(t)\|_W < 2\varepsilon\,\|C_+(t)\|_W$. Здесь учтено, что $\|D(t)\|_W = 2$. Таким образом, в любой достаточно малой окрестности $A(t)$ существует матрица-функция $\widetilde{A}(t)$ с другим типом нормировки, т.е. нормировка типа OJ неустойчива. □

5. Непрерывность канонически нормированных факторизационных множителей

Теперь мы можем изучить вопрос о непрерывности факторизационных множителей матрицы-функции $A(t)$ и уточнить теорему Шубина. Оказывается, что если $A(t)$ и $\widetilde{A}(t)$ принадлежат одному и тому же классу Боярского $\Omega(\rho_1, \rho_2)$ и достаточно близки, то, одинаково нормировав их факторизации, мы получим достаточно близкие факторизационные множители $C_\pm(t)$ и $\widetilde{C}_\pm(t)$.

Теорема 5.1. *Пусть матрица-функция $A(t)$ допускает канонически нормированную факторизацию $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$ типа I или J, а матрица-функция $\widetilde{A}(t)$ имеет такие же правые частные индексы, как $A(t)$, и удовлетворяет неравенству*

$$\|A(t) - \widetilde{A}(t)\| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\widetilde{A}(t)$ допускает канонически нормированную факторизацию $\widetilde{A}(t) = \widetilde{C}_-(t)D(t)\widetilde{C}_+(t)$ того же типа, что $A(t)$ и

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{4}\|A\|_W,\ \frac{1}{16\|C_+^{-1}\|_W\|C_-^{-1}\|_W},\ \frac{1}{128\|C_+\|_W\|C_-^{-1}\|_W^2\|C_+^{-1}\|_W^2}\right\}. \tag{5.1}$$

Тогда

$$\|C_- - \widetilde{C}_-\|_W < 8\big(\|C_+^{-1}\|_W + 128\,\|A\|_W\,\|C_-^{-1}\|_W^2\,\|C_+^{-1}\|_W^2\big)\cdot\varepsilon$$
$$\|C_+ - \widetilde{C}_+\|_W < 32\big(\|C_+\|_W^2\,\|C_-^{-1}\|_W^2\,\|C_+^{-1}\|_W^2\big)\cdot\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, что $A(t)$ допускает канонически нормированную факторизацию типа I. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ матрица-функция $\widetilde{A}(t)$ допускает факторизацию с канонической нормировкой того же типа I.

Перейдем от I-нормированных факторизаций Винера–Хопфа к факторизациям Биркгофа для того, чтобы свести задачу к задаче об устойчивости факторизационных множителей для матрицы-функции с нулевыми частными индексами, изученной в работе [15].

В силу теоремы 3.1, имеем

$$A(t) = D(t)B_-(t)B_+(t), \quad \widetilde{A}(t) = D(t)\widetilde{B}_-(t)\widetilde{B}_+(t),$$

где $B_-(t) = D^{-1}(t)C_-(t)D(t)$, $B_+(t) = C_+(t)$. Аналогичные формулы справедливы для факторов $\widetilde{B}_-(t)$, $\widetilde{B}_+(t)$.

Обозначим $B(t) = D^{-1}(t)A(t)$, $\widetilde{B}(t) = D^{-1}(t)\widetilde{A}(t)$. Матрицы-функции $B(t)$, $\widetilde{B}(t)$ допускают факторизации с нулевыми частными индексами:

$$B(t) = B_-(t)B_+(t), \quad \widetilde{B}(t) = \widetilde{B}_-(t)\widetilde{B}_+(t).$$

Кроме того, из формул для $B_-(t)$, $\widetilde{B}_-(t)$ следует, что эти факторы одинаково нормированы: $B_-(\infty) = \widetilde{B}_-(\infty) = I$.

Проверим выполнение условий теоремы 2 из работы [15]. Т.к. $\|D^{-1}\|_W = 2$, то $\frac{1}{2}\|A\|_W \leqslant \|B\|_W$. Из формулы

$$B_-^{-1}(t) = D^{-1}(t)C_-^{-1}(t)D(t)$$

следует оценка $\frac{1}{4\|C_-^{-1}\|_W} \leqslant \frac{1}{\|B_-^{-1}\|_W}$, а из неравенства (5.1) следует

$$\|B - \widetilde{B}\|_W < \min\left\{\|B\|_W,\ \frac{1}{2\|B_+^{-1}\|_W\|B_-^{-1}\|_W}\right\}.$$

Поэтому мы можем для $\|B_- - \widetilde{B}_-\|_W$ применить оценку из теоремы 2 работы [15].

Тогда

$$\begin{aligned}\|C_- - \widetilde{C}_-\|_W &= \|D\Big(B_- - \widetilde{B}_-\Big)D^{-1}\|_W \leqslant 4\|B_- - \widetilde{B}_-\|_W \\ &< 4\big(\|B_+^{-1}\|_W + 4\|B\|_W\|B_-^{-1}\|_W^2\|B_+^{-1}\|_W^2\big)\|B - \widetilde{B}\|_W \\ &\leqslant 8\big(\|C_+^{-1}\|_W + 128\,\|A\|_W\,\|C_-^{-1}\|_W^2\,\|C_+^{-1}\|_W^2\big)\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Аналогично, по теореме 3 из [15], можно получить

$$\|C_+ - \widetilde{C}_+\|_W = \|B_+ - \widetilde{B}_+\|_W < 32\big(\|C_+\|_W^2\,\|C_-^{-1}\|_W^2\,\|C_+^{-1}\|_W^2\big)\cdot\varepsilon.$$

Поскольку $\|J\|_1 = 1$, то все оценки норм сохраняются, если матрица-функция $A(t)$ допускает каноническую нормировку J-типа. □

Итак, на все вопросы, сформулированные в конце раздела 2, для матриц-функций второго порядка можно дать исчерпывающие ответы.

Благодарности

Внимание автора к задаче нормировки факторизации привлек И.Т. Хабибуллин во время стажировки автора в Башкирском государственном университете. Тогда же был получен первый результат о нормировке, гарантирующей единственность факторизации, и о виде факторизационного множителя для случая, когда матрица-функция допускает нормировку I-типа. Этот результат вошел в теорему 3.1. Автор признателен И.Т. Хабибуллину за стимулирующее общение, которое через много лет привело к появлению данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* М.: Наука. 1971.
2. K.F. Clancey, I. Gohberg. *Factorization of matrix functions and singular integral operators.* Operator Theory, Advances and Applications. 1981.
3. G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovskii. *Factorization of measurable matrix functions.* Operator Theory, Advances and Applications. 1987.
4. V.G. Daniele, R.S. Zich. *The Wiener–Hopf method in electromagnetics. ISMB Series.* SciTech Publishing, Edison, N.Y. 2014.
5. J.B. Lawrie, I.D. Abrahams. *A brief historical perspective of the Wiener–Hopf technique* // J. Eng. Math. **59**, 351–358 (2007).
6. I.D. Abrahams. *On the application of the Wiener–Hopf technique to problems in dynamic elasticity* // Wave Motion. **36**, 311–333 (2002).
7. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фадеев. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука. 1986.
8. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов* // Успехи матем. наук. **13**:2(80), 3–72 (1958).
9. Н.П. Векуа. *Системы сингулярных интегральных уравнений.* М.: Наука. 1970.
10. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. *Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций* // Докл. АН СССР. **119**:5, 854–857 (1958).
11. Б.В. Боярский. *Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора* // Сообщения АН Груз. ССР. **21**:4, 391–398 (1958).
12. V.M. Adukov, G. Mishuris, S. Rogosin. *Exact conditions for preservation of the partial indices of a perturbed triangular* 2×2 *matrix function* // Proc. R. Soc. A. **476**:2237, (2020).
13. N.V. Adukova, V.M. Adukov. *On effective criterion of stability of partial indices for matrix polynomials* // Proc. R. Soc. A. **476**:2238, (2020).
14. М.А. Шубин. *Факторизация зависящих от параметра матриц-функций в нормированных кольцах и связанные с ней вопросы теории нетеровых операторов* // Матем. сб. **73**:4, 610–629 (1967).
15. Н.В. Адукова, В.Л. Дильман. *Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций* // Вестник Южно-Уральского университета, серия Математика. Механика. Физика. **13**:1, 5–13 (2021).
16. В.М. Адуков, Н.В. Адукова. *О гибридном методе построения канонической факторизации Винера–Хопфа* // Материалы XXII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», Смоленск: Изд-во СмолГУ. **22**, 195-202 (2021).
17. И.Т. Хабибуллин. *Обратная задача рассеяния для разностных уравнений* // Докл. АН СССР. **249**:1, 67–70 (1979).
18. И.Т. Хабибуллин, А.Г. Шагалов. *Численная реализация метода обратной задачи рассеяния* // Теор. матем. физика. **83**:3, 323–333 (1990).
19. G.D. Birkhoff. *A theorem on matrices of analytic functions* // Math. Ann. **74**, 122–133 (1913).
20. И.С. Чеботару. *Сведение систем уравнений Винера–Хопфа с системам с нулевыми индексами* // Изв. АН МССР. **8**, 54–66 (1967).
21. Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ*, М.: Мир. 1989.

Виктор Михайлович Адуков,
Институт естественных и точных наук,
Южно-Уральский государственный университет,
проспект Ленина, 76,
454080, г. Челябинск, Россия
E-mail: `adukovvm@susu.ru`