ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 101-120.

УДК 517.958

ОДНОМЕРНЫЕ L_p-НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Р.Г. НАСИБУЛЛИН

Аннотация. Мы устанавливаем одномерные L_p-неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и применяем их для обоснования многомерных аналогов в выпуклых областях с конечным объемом. Получены вариационные неравенства со степенными весами, которые обобщают соответствующие утверждения, представленные ранее в статьях М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманна-Остенхофа, А. Лаптева и Дж. Тидблома. Мы формулируем и доказываем неравенства, справедливые для произвольных областей, затем существенно упрощаем их для класса выпуклых областей. Константы в дополнительных слагаемых в этих пространственных неравенствах зависят от объема или диаметра области. Как следствие полученных результатов будем иметь оценки первого собственного числа для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле.

Ключевые слова: неравенство Харди, дополнительное слагаемое, одномерное неравенство, функция расстояния, объем области, диаметр, первое собственное число задачи Дирихле.

Mathematics Subject Classification: 26D15, 46E35

1. Введение

Данная статья посвящена обобщениям неравенства типа Харди, доказанного В.И. Левиным в статье [1]. А именно, следующего точного неравенства

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt < \int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{1.1}$$

справедливого для любой неравной тождественно нулю абсолютно непрерывной функции y такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2[0,1]$. Мы установим L_p-аналоги (1.1).

Интерес к неравенству (1.1) вызван тем, что оно является усилением уже ставшего классическим неравенства Харди

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt \tag{1.2}$$

на единичном отрезке для того же класса функций. Константа 1 в неравенстве (1.1) и постоянная 4 в (1.2) являются точными, но не существует экстремальной функции, на которой в этих неравенствах достигается равенство.

R.G. Nasibullin, One-dimensional L_p-Hardy-type inequalities for special weight functions and their applications.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 18-11-00115) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

Поступила 23 марта 2022 г.

Стоит отметить, что родственные к (1.1) неравенства также используются для установления достаточных условий однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля производной Шварца. На первый взгляд достаточно сложно понять как неравенства Харди для абсолютно непрерывных функций применяются при обосновании достаточных условий однолистности аналитических функций. Оказывается, существует связь (см. подробнее [2]–[5]) однолистности функции с неколеблемостью решения специального дифференциального уравнения, которое, в свою очередь, близко к неравенствам типа Харди.

Мы легко можем преобразовать весовую функцию $t^{-2}(2-t)^{-2}$ и переписать (1.1) в виде

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + 2\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t(2-t)}dt + \int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^2} < 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{1.1$'$}$$

по которому сразу становится ясно, каким именно образом усиливается неравенство (1.2) — с помощью дополнительных слагаемых. В последние десятилетия опубликовано множество работ (см., например, [6]–[24]), посвященных неравенствам с дополнительными слагаемыми, но в литературе (даже собственно в статье [1]) практически не упоминается этот результат В.И. Левина как усиление классического неравенства Харди с помощью дополнительных слагаемых.

Достаточно интересным по содержанию и форме является аналог неравенства (1.1$'$) на отрезке $[0,2b]$ для абсолютно непрерывных функций таких, что $y(0) = y(2b) = 0$. А именно, неравенство

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + 2\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\mu^2(t)} < 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt, \tag{1.1$''$}$$

где $\rho(t) = \min\{t, 2b-t\}$ и $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. Более слабая версия (1.1$''$)

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt \leqslant 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt \tag{1.3}$$

неявным образом использована М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманном-Остенхофом и А. Лаптевым в статье [13] для доказательства следующего многомерного неравенства

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2}dx + \frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}\int_\Omega |g(x)|^2dx \leqslant \int_\Omega |\nabla g(x)|^2dx, \tag{1.4}$$

справедливого для всех g из известного семейства непрерывно дифференцируемых функций $C_0^1(\Omega)$ с компактным носителем в открытой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с конечным объемом $|\Omega|$, где $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности $n-1$-мерной единичной сферы и постоянная

$$K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}.$$

Многомерное неравенство (1.4) имеет ряд отличий от одномерного случая: интегрирование ведется по n-мерной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, степени t заменены на степени функции $\delta(x)$ расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, т.е.

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),$$

а производная функции заменена на ее градиент

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}\right).$$

Ясно, что если получить усиления неравенства (1.1″), то, используя подход из статьи [13] (см. также [23], [24]), можно получить неравенства типа (1.4) с более точными константами.

В статье [11] Х. Брезис и М. Маркус показали, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным диаметром $D(\Omega)$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2}dx + \frac{1}{4D^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx. \tag{1.5}$$

Также отметим результат Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирса из статьи [6]. Они доказали, что для всех непрерывно дифференцируемых функций g с компактным носителем в выпуклой области Ω с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$ справедливо точное неравенство

$$\frac{s^2-\nu^2 q^2}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^{s+1}}dx + \frac{q^2\lambda^2}{4\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta(x)^{s+1-q}}dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^2}{\delta(x)^{s-1}}dx, \tag{1.6}$$

где $s > 0$, $q > 0$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$ и константа λ является решением следующего уравнения типа Лэмба для функции Бесселя J_ν порядка ν

$$sJ_\nu(\lambda) + q\lambda J_\nu'(\lambda) = 0.$$

Константы $(s^2 - \nu^2 q^2)/4$ и $q^2\lambda^2/4$ в этом неравенстве являются точными. Отметим лишь, что при $\nu > 0$ существует экстремальная функция, на которой достигается равенство, а при $\nu = 0$ Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Вирс построили минимизирующую последовательность, через которую показали точность и недостижимость константы.

Следуя статьям [6]–[8], величину λ будем называть постоянной Лэмба (см. также [16]–[18]). Поясним названия «постоянная Лэмба» и «уравнение Лэмба». Дело в том, что частный случай этого уравнения впервые был рассмотрен Х. Лэмбом в статье [26]. Позже оно развивалось и так названо Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Вирсом в статье [6]. По этой причине более общие уравнения такого вида мы называем параметрическими уравнениями Лэмба, а его корни постоянными Лэмба.

Задача добавления в неравенства Харди дополнительного слагаемого связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega)\int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

Широко известны оценка Пуанкаре $\lambda_1(\Omega) > \pi^2/D^2(\Omega)$ и знаменитое изопериметрическое неравенство Рэлея-Фабера-Крана

$$\lambda_1(\Omega) > \frac{\omega^{2/n}}{|\Omega|^{2/n}} j_{n/2-1}^2,$$

где j_ν — первый нуль функции Бесселя J_ν порядка ν (см. [28]).

Как следствие этого результата М. Хофманн-Остенхоф, Т. Хофманна-Остенхофа и А. Лаптева, первое собственное число $\lambda_1(\Omega)$ лапласиана в случае выпуклых областей с фиксированным объемом может быть оценено следующим образом

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}.$$

В данной работе мы улучшим константу предыдущей оценки более чем в три раза. А именно, получим, что

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где постоянная $\lambda_1 \approx 1,25578$.

Неравенство Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирса (1.6) в случае n-мерных выпуклых областей является вторым способом доказательства известных оценок первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ лапласиана (см. [27])

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{\pi^2}{4\delta_0^2(\Omega)} \geqslant \frac{\pi^2}{D^2(\Omega)}.$$

Дж. Тидблом в статье [22] установил L_p-аналоги результатов М. Хофманн-Остенхоф, Т. Хофманна-Остенхофа и А. Лаптева. Им для любой функции g из соответствующего пространства Соболева при $p > 1$ доказано следующее неравенство в выпуклой области Ω

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx + \frac{a(p,n)}{|\Omega|^{p/n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx, \tag{1.7}$$

где постоянная

$$a(p,n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^p}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. В частности при $p = 2$ Дж. Тидблом имеет константу из неравенства (1.4)

$$a(2,n) = \frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}.$$

В работе С. Филиппаса, В.Г. Мазьи и А. Тертикаса [12] показано, что в выпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $1 < p < n$ и $p \leqslant q < \frac{np}{n-p}$ точная константа $C(\Omega)$ в L_p-неравенстве

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx + C(\Omega)\left(\int\limits_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{p/q} \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx$$

может быть оценена с двух сторон через внутренний радиус следующим образом

$$c_1(p,q,n)(\delta_0(\Omega))^{n-p-\frac{np}{q}} \geqslant C(\Omega) \geqslant c_2(p,q,n)(\delta_0(\Omega))^{n-p-\frac{np}{q}},$$

где $c_1(p,q,n)$ и $c_2(p,q,n)$ — некоторые константы, существование которых обосновывается.

По аналогии с L_2-случаем задача добавления дополнительного слагаемого в L_p-неравенства связана с оценками первого собственного числа $\lambda_p(\Omega)$ для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_p(\Omega)\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

В качестве следствия результата Дж. Тидблома получим

$$\lambda_p(\Omega) \geqslant \frac{(p-1)^{p+1}}{p^p}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{|\Omega|^{p/n}}.$$

Интересно сравнить результаты данной статьи с неравенствами из [20], [23] и [24]. Например, в статье [24] были получены обобщения и усиления неравенства (1.7), но в виде следствия авторы получают такую же константу $a(p,n)$ в дополнительном слагаемом. В статье [20] константа $a(p,n)$ усилена при $p \geqslant 2$. В виде следствия наших основных результатов в случае, когда $p \in [2, p_0]$, где $p_0 \approx 2,314$, мы получим более точные оценки $\lambda_p(\Omega)$. А именно, покажем, что

$$\lambda_p(\Omega) \geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \frac{(p-1)^p}{p^p} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{|\Omega|^{p/n}},$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Таким образом, в данной работе мы установим L_p-версии (1.1) и применим их для обоснования пространственных неравенств вида (1.4), (1.5) и (1.7) с более лучшими константами в дополнительных слагаемых. Также в виде следствия многомерных неравенств получим оценки первого собственного числа $\lambda_p(\Omega)$ для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле.

2. Уравнение и постоянная Лэмба

В данном разделе мы приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные сведения. В основном они будут касаться свойств двух введенных специальных функций.

2.1. Первая функция. Предположим, что $q \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$ и $\nu \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $F_{\nu,s,q}$, определенную следующим образом

$$F_{\nu,s,q}(t) = t^{\frac{s}{2}} \sqrt{(2-t)} J_\nu\left(\lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right), \quad t \in [0,1],$$

где константа λ является первым положительным решением уравнения типа Лэмба

$$(s-1)J_\nu(\lambda) + 2q\lambda J_\nu'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu), \tag{2.1}$$

для функции Бесселя J_ν порядка ν. Напомним, что функцию Бесселя можно определить через сходящийся ряд

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}.$$

Здесь и далее через j_ν будем обозначать первый положительный корень функции Бесселя J_ν. Подробную информацию о свойствах функции Бесселя и ее нулях можно найти в монографии Дж.Н. Ватсона [25].

Приведем лишь некоторые свойства этой функции, которые в дальнейшем мы будем использовать. Например, известно, что:

а) $u(t) = J_\nu(t)$ является каноническим решением дифференциального уравнения Бесселя:

$$t^2 u''(t) + t u'(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) u(t) = 0;$$

б) при достаточно малых t справедлива следующая асимптотическая формула

$$J_\nu(t) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu.$$

Перейдем к некоторым свойствам функции $F_{\nu,s,q}$. Исходя из определения функции Бесселя, имеем $F_{\nu,s,q}(t) > 0$ при достаточно малых t и при $t \in (0,1]$

$$\lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}} \in (0, j_\nu).$$

Поэтому $F_{\nu,s,q}(t)$ является строго положительной также при $t \in (0,1]$.

Непосредственные выкладки дают следующее выражение для производной этой функции

$$t^{1-\frac{s}{2}}F'_{\nu,s,q}(t)=\frac{s(2-t)-t}{2\sqrt{2-t}}J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)+q\lambda\frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{1}{2}+\frac{q}{2}}}J'_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right).$$

Для удобства перепишем это равенство в более компактном виде

$$v(t)F'_{\nu,s,q}(t)=w(t)J_\nu\left(z(t)\right)+2z(t)J'_\nu\left(z(t)\right),$$

где

$$v(t)=\frac{2t^{1-\frac{s}{2}}\sqrt{2-t}}{q},\quad w(t)=-\frac{s+1}{q}t+\frac{2s}{q}\quad \text{и}\quad z(t)=\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

При каждом фиксированном $t\in(0,1]$ рассмотрим уравнение типа Лэмба

$$w(t)J_\nu\left(z(t)\right)+2z(t)J'_\nu\left(z(t)\right)=0.$$

В статье [6] Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Вирсом показано, что решение этого уравнения $z(t)$ монотонно возрастает при увеличении $w(t)$ и при этом $z(t)<j_\nu$. Поэтому так как функция $w(t)$ — убывающая, то мы получим, что решение $z(1)=\lambda$ уравнения

$$w(1)J_\nu\left(z(1)\right)+2z(1)J'_\nu\left(z(1)\right)=0$$

является наименьшим и лежит в интервале $(0,j_\nu)$. Этот факт существенно будет использоваться далее. Например, отсюда следует, что $F'_{\nu,s,q}(t)>0$ при $t\in(0,1)$ и $F'_{\nu,s,q}(1)=0$.

Действительно, имеем $F'_{\nu,s,q}(t)>0$ при достаточно малых t. Если положить противное, что $F'_{\nu,s,q}(t)\leqslant 0$ для некоторых t, то найдется точка $t_0\in(0,1)$, для которой $F'_{\nu,s,q}(t_0)=0$, т.е. найдется решение $z(t_0)<z(1)=\lambda$ уравнения

$$w(t_0)J_\nu\left(z(t_0)\right)+2z(t_0)J'_\nu\left(z(t_0)\right)=0.$$

Что противоречит минимальности λ.

Используя следующую формулу, связывающую функцию Бесселя и ее производную (см., например, [25]),

$$J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}J_\nu(z),$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)}=&\frac{s(2-t)-t}{2t(2-t)}+q\lambda\frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{1+\frac{q}{2}}}\frac{J'_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}\\=&\frac{s(2-t)-t}{2t(2-t)}-q\nu\frac{2-t}{t}+q\lambda\frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{1+\frac{q}{2}}}\frac{J_{\nu-1}\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}.\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Лэмба (2.1) можно переписать следующим образом

$$(s-2\nu q-1)J_\nu(\lambda)+2q\lambda J_{\nu-1}(\lambda)=0,\quad \lambda\in(0,j_\nu).$$

Применяя свойство а) функции Бесселя, имеем также равенство для второй производной функции $F_{\nu,s,q}$

$$\frac{F''_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)}+(1-s)\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{tF_{\nu,s,q}(t)}=-\frac{s^2-\nu^2q^2}{t^2}-(1-\nu^2q^2)\frac{4-t}{t(2-t)^2}-\frac{4\lambda^2q^2}{(2-t)^{2+q}}.\tag{2.2}$$

Наконец, используя разложение в ряд функции Бесселя, получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{tF'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)}=\frac{s+\nu q}{2}\tag{2.3}$$

(см. также [6]–[8] для большей информации).

2.2. Вторая функция. Теперь предположим, что $q \in (0,\infty)$ и $s \in (0,\infty)$. Далее также нам будет необходима функция $\Phi_{s,q}$, определенная следующим образом

$$\Phi_{s,q}(t) = t^{\frac{s}{2}} J_0\left(\lambda_1 \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right), \quad t \in [0,1],$$

где константа λ_1 является первым положительным решением уравнения

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Непосредственные выкладки дают

$$2(2-t)t^{1-\frac{s}{2}}\Phi'_{s,q}(t) = s(2-t)J_0\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right) - 2q\lambda_1 \frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} J_1\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right).$$

Выше мы воспользовались тем, что $J_0'(z) = -J_1(z)$. Последнее равенство перепишем следующим образом

$$v(t)\Phi'_{s,q}(t) = w(t)J_0\left(z(t)\right) - 2z(t)J_1\left(z(t)\right),$$

где

$$v(t) = \frac{2}{q}(2-t)t^{1-\frac{s}{2}}, \quad w(t) = -\frac{s}{q}t + \frac{2s}{q}, \quad z(t) = \lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

При каждом фиксированном $t \in (0,1]$ рассмотрим уравнение

$$w(t)J_0\left(z(t)\right) - 2z(t)J_1\left(z(t)\right) = 0.$$

По аналогии с функцией $F_{\nu,s,q}$, так как функция $w(t)$ — убывающая, то мы получим, что решение $\lambda_1 = z(1)$ уравнения

$$w(1)J_0\left(z(1)\right) - 2z(1)J_1\left(z(1)\right) = 0$$

является наименьшим.

Ясно, что $\Phi_{s,q}(0) = 0$, $\Phi_{s,q}(t) > 0$ и $\Phi'_{s,q}(t) > 0$ для достаточно малых t. Используя определение постоянной Лэмба λ_1, имеем

$$\Phi'_{s,q}(1) = 0, \quad \Phi_{s,q}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0,1], \quad \Phi'_{s,q}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0,1).$$

Также стоит отметить, что применяя свойство a) функции Бесселя, можно получить следующее равенство

$$\frac{\Phi''_{s,q}(t)}{\Phi_{s,q}(t)} + (1-s)\frac{\Phi'_{s,q}(t)}{t\Phi_{s,q}(t)} = -\frac{s^2}{4t^2} - \frac{\lambda_1^2 q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} - \lambda_1 q \frac{t^{-1+q/2}}{(2-t)^{2+q/2}} \frac{J_1\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_0\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)},$$

в котором участвует, как мы покажем ниже, возрастающая при $z \in [0,2]$ функция $J_1(z)/(zJ_0(z))$.

Действительно, справедливо утверждение

Лемма 2.1. *Непрерывная функция* $h(t) = \frac{J_1(t)}{tJ_0(t)}$ *является возрастающей при* $t \in [0,2]$ *и* $\inf_{t\in[0,2]} h(t) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Покажем, что производная $h'(t) \geqslant 0$ при $t \in [0,2]$. Используя следующие известные равенства для функции и производной функции Бесселя (см., например, [25, с. 45 и 152])

$$J_0'(t) = -J_1(t), \qquad tJ_1'(t) - J_1(t) = -tJ_2(t),$$
$$J_1^2(t) - J_0(t)J_2(t) = \frac{4}{t^2}\sum_{j=0}^{\infty}(2+2j)J_{2+2j}^2(t),$$

получим

$$h'(t) = \frac{tJ_1'(t)J_0(t) - J_1(t)J_0(t) - tJ_0'(t)J_1(t)}{t^2J_0^2(t)} = \frac{J_0(t)\left(tJ_1'(t) - J_1(t)\right) + tJ_1^2(t)}{t^2J_0^2(t)}$$
$$= \frac{J_1^2(t) - J_0(t)J_2(t)}{tJ_0^2(t)} = \frac{4}{t^3}\sum_{j=0}^{\infty}(2+2j)J_{2+2j}^2(t) \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $h(t)$ является возрастающей и, учитывая свойство б), имеем

$$\inf_{t\in[0,2]} h(t) = \lim_{t\to 0} h(t) = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Принимая во внимание эту лемму, получим

$$\frac{\Phi_{s,q}''(t)}{\Phi_{s,q}(t)} + (1-s)\frac{\Phi_{s,q}'(t)}{t\Phi_{s,q}(t)} \leqslant -\frac{s^2}{4t^2} - \frac{\lambda_1^2q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} - \frac{\lambda_1^2q}{2}\frac{t^{q-1}}{(2-t)^{2+q}}.$$

Также, используя разложение в ряд функции Бесселя, имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\Phi_{s,q}'(t)}{\Phi_{s,q}(t)} = \frac{s}{2}.$$

3. Одномерные неравенства

В данном разделе мы получим одномерные неравенства на единичном отрезке $[0,1]$ и на отрезке вида $[0,2b]$. Мы будем существенно использовать свойства функций, определенных в предыдущем пункте.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $p \geqslant 2$, $s > 0$, $q \in (0,+\infty)$, $\nu \in [0, s/q]$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0) = 0$,*

$$|y'(t)|t^{(p+1-s)/p} \in L^p[0,1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}\int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt \geqslant \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}}\left(1 + \frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{p}{2}\frac{(4-t)t}{(2-t)^2} + \frac{2p\lambda^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}\right)dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$-1 - 2\nu q + s + 2qz\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)} = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что y является положительной и неубывающей функцией. На самом деле, если g произвольная абсолютно непрерывная функция такая, что $g(0) = 0$ и

$$y(t) = \int_0^t |g'(\tau)|d\tau$$

и к тому же выполнено неравенство

$$\int_a^b y^p(t)w(t)dt \leqslant C_1 \int_a^b y'^p(t)v(t)dt,$$

с некоторой константой C_1 и весовыми функциями w и v, то, так как

$$|g(t)| \leqslant \int_0^t |g'(\tau)|dt = y(t), \quad y'(t) = |g'(t)|,$$

имеем неравенство для произвольного случая

$$\int_a^b |g(t)|^p w(t)dt \leqslant \int_a^b y^p(t)w(t)dt \leqslant C_1 \int_a^b y'^p(t)v(t)dt = C_1 \int_a^b |g'(t)|^p v(t)dt.$$

Несложно показать, что

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P :=& \int_0^1 \frac{y^{p-2}(t)}{t^{s-1}} \left(y'(x) - \frac{2}{p} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} y(t) \right)^2 dt \\ =& \int_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(y)}{y^{s-1}} dt - \frac{4}{p^2} \int_0^1 \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t) t^{s-1}} dy^p(t) + \frac{4}{p^2} \int_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'^2_{\nu,s,q}(t)}{F^2_{\nu,s,q}(t)} dt. \end{aligned}$$

Интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} P = \int_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{t^{s-1}} dt - y^p(1) \frac{F'_{\nu,s,q}(1)}{F_{\nu,s,q}(1)} + \lim_{t\to 0} \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} \\ + \frac{4}{p^2} \int_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \left(\frac{F''_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} + (1-s) \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{t F_{\nu,s,q}(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

Используя определение постоянной λ, имеем

$$y^p(1) \frac{F'_{\nu,s,q}(1)}{F_{\nu,s,q}(1)} = \frac{y^p(1)}{2} \left(-1 - 2\nu q + s + 2q\lambda \frac{J_{n-1}(\lambda)}{J_n(\lambda)} \right) = 0.$$

Для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $|y'(t)| t^{(p-s-1)/p} \in L^p[0,1]$, применяя неравенство Гельдера, получим

$$|y(t)|^p \leqslant \left(\int_0^t |y'(\tau)|d\tau \right)^p \leqslant \left(\int_0^t \tau^{\frac{s-p+1}{p-1}} d\tau \right)^{p-1} \int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}} d\tau = \left(\frac{p-1}{s} \right)^{p-1} t^s \int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}} d\tau.$$

Следовательно, принимая во внимание (2.3), имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = 0.$$

Используя равенство (2.2), получим

$$p^2 \int_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{t^{s-1}} dt \geqslant \int_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{t^2} + (1-\nu^2 q^2) \frac{4-t}{t(2-t)^2} + \frac{4\lambda^2 q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} \right) dt.$$

Таким образом,

$$\frac{p^2}{s^2-\nu^2q^2}\int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-2}}dt \geqslant \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{4-t}{t(2-t)^2}+\frac{4\lambda^2q^2t^{q-2}}{(s^2-\nu^2q^2)(2-t)^{2+q}}\right)dt.$$

Применяя теорему о среднем арифметическом, записанную в следующей форме (см. [29])

$$a^{p_1}b^{p_2} \leqslant \left(\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}\right)^{p_1+p_2},$$

для величин

$$a=\frac{y^p(t)}{t^s}, \quad b=\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}\frac{y'^p(t)}{t^{s+1-p}}, \quad p_1=1-\frac{2}{p} \quad \text{и} \quad p_2=\frac{2}{p},$$

имеем

$$\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}\int\limits_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt \geqslant \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{p}{2}\frac{4-t}{t(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2q^2t^{q-2}}{(s^2-\nu^2q^2)(2-t)^{2+q}}\right)dt.$$

Что завершает доказательство леммы 3.1. □

При $s=p-1$ и $q=1$ из леммы 3.1 несложно получить следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть $p \geqslant 2$, $\nu \in [0,p-1]$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0)=0$, $|y'(t)| \in L^p[0,1]$. Тогда имеет место неравенство*

$$c_p\int\limits_0^1 |y'(t)|^p dt \geqslant \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-2}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{p(1-\nu^2)}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{4-t}{t(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2}{((p-1)^2-\nu^2q^2)t(2-t)^3}\right)dt,$$

где $c_p=p^p((p-1)^2-\nu^2)^{-\frac{p}{2}}$ и λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu+s+2z\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0.$$

Перейдем к неравенствам на отрезке $[0,2b]$ в терминах функций

$$\rho(t)=\min\{t,2b-t\} \quad \text{и} \quad \mu(t)=2b-\rho(t).$$

Имеет место теорема.

Теорема 3.1. *Предположим, что $0<b<\infty$, $p \in [2,\infty)$ и $\nu \in [0,p-1]$. Если $y:[0,2b]\to\mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(0)=y(2b)=0$ и $|y'(t)| \in L^p[0,2b]$, то имеет место следующее неравенство*

$$c_p\int\limits_0^{2b} |y'(t)|^p dt \geqslant \int\limits_0^{2b} \frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-2}(t)}\left(\frac{1}{\rho^2(t)}+\frac{c_1}{\rho(t)\mu(t)}+\frac{c_2}{\mu^2(t)}+\frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{\rho(t)}{\mu^3(t)}\right)dt,$$

где

$$c_p=\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}, c_1=\frac{p(2+\lambda^2)-2\nu^2}{2(p-1)^2-\nu^2}, \quad c_2=\frac{p(1+2\lambda^2)-2\nu^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}$$

и λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu+s+2z\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0.$$

Доказательство. Неравенство следствия 3.1 можно преобразовать следующим образом.

$$c_p \int_0^1 |y'(t)|^p dt \geqslant \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-2}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{c_1}{t(2-t)} + \frac{c_2}{(2-t)^2} + \frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)} \frac{t}{(2-t)^3} \right) dt.$$

С помощью замены переменной $t = \tau/b$ в последнем неравенстве получим

$$c_p \int_0^b |y'(\tau)|^p d\tau \geqslant \int_0^b \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{p-2}} \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{c_1}{\tau(2b-\tau)} + \frac{c_2}{(2b-t)^2} + \frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)} \frac{t}{(2b-\tau)^3} \right) d\tau.$$

Объединяя последнее неравенство со следующим соответствующим неравенством на интервале $[b, 2b]$

$$c_p \int_b^{2b} |y'(\tau)|^p d\tau \geqslant \int_b^{2b} \frac{|y(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{p-2}} \left(\frac{1}{(2b-\tau)^2} + \frac{c_1}{\tau(2b-\tau)} + \frac{c_2}{\tau^2} + \frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2 q^2)} \frac{2b-\tau}{\tau^3} \right) d\tau,$$

для функции $y \in C^1(b, 2b)$ такой, что $y(2b) = 0$, получим утверждение теоремы. □

Далее мы будем применять свойства второй введенной выше функции для обоснования новых неравенств. Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть $p \geqslant 2$, $s > 0$, $q \in (0, +\infty)$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ и такой, что $y(0) = 0$,*

$$|y'(t)|t^{(p+1-s)/p} \in L^p[0, 1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}} dt \geqslant \frac{s^p}{p^p} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} \left(1 + \frac{2\lambda_1^2 q^2 p}{s^2} \frac{t^q}{(2-t)^{2+q}} + \frac{p\lambda_1^2 q}{s^2} \frac{t^{q+1}}{(2-t)^{2+q}} \right) dt,$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Леммы 3.1. □

При $q = 1$ имеем

Следствие 3.2. *Пусть $s > 0$, $p \geqslant 2$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ и такой, что $y(0) = 0$,*

$$|y'(t)| \in L^p[0, 1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s+1-p}} dt \geqslant \frac{s^p}{p^p} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-1}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2\lambda_1^2 p}{s^2} \frac{1}{t(2-t)^3} + \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \frac{1}{(2-t)^3} \right) dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Теорема 3.2. *Предположим, что* $0 < b < \infty$, $p \in [2, \infty)$ *и* $\nu \in [0, p-1]$. *Если* $y : [0, 2b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(0) = y(2b) = 0$ *и* $|y'(t)| \in L^p[0, 2b]$, *то имеет место следующее неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_0^{2b} \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s+1-p}(t)} dt \geqslant \int\limits_0^{2b} \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-1}(t)} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\rho(t)\mu(t)} + \frac{3}{\mu^2(t)} + \frac{2\rho(t)}{\mu^3(t)}\right]\right) dt,$$

где λ_1 — *первый положительный корень уравнения*

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Доказательство. Неравенство следствия 3.2 можно преобразовать следующим образом

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_0^1 |y'(t)|^p dt \geqslant \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-1}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{t(2-t)} + \frac{3}{(2-t)^2} + \frac{2t}{(2-t)^3}\right]\right) dt.$$

В последнем неравенстве сделаем замену переменной $t = \tau/b$ и получим

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_0^b \frac{|y'(\tau)|^p}{t^{s+1-p}} d\tau \geqslant \int\limits_0^b \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{s-1}} \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\tau(2b-\tau)} + \frac{3}{(2b-\tau)^2} + \frac{2\tau}{(2b-\tau)^3}\right]\right) d\tau.$$

Объединяя последнее неравенство со следующим соответствующим неравенством на интервале $[b, 2b]$

$$\frac{p^p}{s^p} \int\limits_b^{2b} \frac{|y'(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{s+1-p}} d\tau \geqslant \int\limits_b^{2b} \frac{|y(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{s-1}} \left(\frac{1}{(2b-\tau)^2} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\tau(2b-\tau)} + \frac{3}{\tau^2} + \frac{2(2b-\tau)}{\tau^3}\right]\right) d\tau,$$

для функции $y \in C^1(b, 2b)$ такой, что $y(2b) = 0$, получим утверждение теоремы. □

4. Многомерные неравенства

В этом параграфе мы получим многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях в терминах расстояния в среднем. Расстояние в среднем также иногда называют расстоянием по Дэвису. Полученные неравенства принимают более упрощенный вид в выпуклых областях.

Прежде введем основные обозначения, используемые в данном параграфе. Пусть Ω — открытое связное собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере. Для любой точки $x \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем

$$\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$$

— расстояние от точки x до границы области Ω по направлению вектора ν,

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x),$$

— расстояние от точки x до границы области Ω,

$$\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad \mu_\nu(x) := \max\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\},$$

$$D_\nu(x) := \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad D(\Omega) = \sup_{x \in \Omega, \nu \in \mathbb{S}^{n-1}} D_\nu(x),$$

и расстоянием в среднем называем величину (см., например, [23, с. 83])

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^{-p}(x) d\omega(\nu).$$

Через $|\Omega|$ обозначим объем области Ω и через Ω_x — элементы множества Ω, которые «видны» из точки x.

Отметим, что далее мы применяем подход к доказательству теорем из статьи [13] (см. также [22]–[24]).

Предположим, что действительнозначная функция $g \in C_0^1(\Omega)$. Через ∂_ν обозначим частную производную по направлению ν. Аргументы Е.Б. Дэвиса (см. [30]) вместе с одномерным неравенством теоремы 3.2 дают

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|\partial_\nu g(x)|^p}{\rho_\nu^{s+1-p}(x)}dx - \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx \geqslant \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^{s-1}(x)}\left(\frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} + \frac{3}{\mu_\nu^2(x)} + \frac{2\rho_\nu(x)}{\mu_\nu^3(x)}\right)dx.$$

Если проинтегрируем это неравенство по нормированной мере $d\omega(\nu)$ и воспользуемся определением производной по направлению

$$|\partial_\nu g| = |\nu\cdot\nabla g| = |\nabla g||\cos(\nu,\nabla g)|,$$

то получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu,\nabla g)|^p}{\rho_\nu^{s+1-p}(x)}d\omega(\nu)dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx \\ \geqslant \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu^{s-1}(x)}\left(\frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} + \frac{3}{\mu_\nu^2(x)} + \frac{2\rho_\nu(x)}{\mu_\nu^3(x)}\right)d\omega(\nu)dx.\end{gathered} \tag{4.1}$$

В [22] Дж. Тидбломом показано, что при $p > 1$ справедливы соотношения

$$B(n,p) := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\cos(\nu,\nabla g)|^p d\omega(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^p d\omega(\nu) \geqslant \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-p/n},$$

а А.А. Балинский, В.Д. Эванс, Р.Т. Льюис в [23] установили следующие оценки

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)}d\omega(\nu) \geqslant \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n}, \qquad \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2}d\omega(\nu) \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n}.$$

Далее при $p \geqslant s+1$ рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $s \in (0,1]$. Используя определения функций ρ_ν, μ_ν и применяя предыдущие четыре формулы, получим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{1-s}(x)}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)}d\omega(\nu) \geqslant \delta^{1-s}(x)\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu(x)^2} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{1-s}(x)}{\mu_\nu^2(x)}d\omega(\nu) \geqslant \frac{\delta^{1-s}(x)}{2}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{2-s}(x)}{\mu_\nu(x)^3}d\omega(\nu) \geqslant \frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^3 d\omega(\nu) \geqslant \frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{3}{n}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p\delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Случай 2: $s\in(1,2]$. Аналогично случаю 1 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu(x)^2} \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu), \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu(x)^3} \geqslant \frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{3}{n}}.$$

Поэтому получим

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Случай 3: $s\in(2,3)$. Так как справедливы оценки

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu(x)^2} \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu), \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu(x)^3} \geqslant \frac{1}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{s+1}{n}},$$

то в этом случае имеем следующее неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant \frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Случай 4: $s\in[3,+\infty)$. По аналогии с предыдущими случаями получим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu(x)^2}) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{16\rho_\nu^{3-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^4}d\omega(\nu) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu(x)^3} \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4\rho_\nu^{3-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2\mu_\nu^2(x}d\omega(\nu) \geqslant \frac{1}{4}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{s+1}{n}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant\frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Таким образом справедлива теорема

Теорема 4.1. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g\in C_0^1(\Omega)$, $p\geqslant 2$ и $p\geqslant s+1$. Если $s\in(0,1]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant\frac{5p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p\delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}}dx+\frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s\in(1,2]$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant\frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx+\frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s\in(2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant\frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Если $s\in[3,+\infty)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx$$
$$\geqslant\frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1)-2q\lambda_1J_1(\lambda_1)=0,\quad \lambda_1\in(0,j_0).$$

Если положим, что $p\leqslant s+1$, то по аналогии с доказательством теоремы 4.1 будем иметь следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geqslant 2$ и $p \leqslant s+1$. Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)} dx$$
$$\geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)} dx \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Предыдущие теоремы можно рассматривать в более узких классах областей. Можно положить, что область Ω является регулярной в смысле Дэвиса, потребовать для нее выполнение условия внешнего конуса или на область наложить условие выпуклости. В этих случаях областей формулы существенно упрощаются (см. подробнее [20], [23]). Например, известно, что если Ω — выпуклая область, то $|\Omega_x| = |\Omega|$ и, как показано, в [22] справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)} \geqslant \frac{B(n,s+1)}{\delta^{s+1}(x)}.$$

В виде следствий теорем 4.1 и 4.2 соответственно получим следующие утверждения.

Теорема 4.3. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geqslant 2$ и $p \geqslant s+1$. Если $s \in (0,1]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx$$
$$\geqslant \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx.$$

Если $s \in (1,2]$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx$$
$$\geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Теорема 4.4. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geqslant 2$ и $p \leqslant s+1$. Если $s \in (1,2]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geqslant \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Для сравнения с известными результатами рассмотрим случай $s = p-1$. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geqslant 2$. Если $p \in (2,3]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx \geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{p-3}(x)} dx.$$

Если $p \in (3,4)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx \geqslant \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $p \in [4,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx \geqslant \frac{9p\lambda_1^2}{4(p-1)^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Используя определение $\lambda_p(\Omega)$ и следствие 4.1, получим

Следствие 4.2. *В выпуклых областях Ω с фиксированным объемом при $p \in (2,3]$, имеет место оценка*

$$\lambda_p(\Omega) \geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2}\frac{(p-1)^p}{p^p}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{|\Omega|^{p/n}},$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Замечание 4.1. *Численные расчеты показывают, что*

$$\frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \geqslant p-1$$

при $p \in [2, p_0]$, где $p_0 \approx 2,314$.

Если в теореме 4.3 положим $s = 1$ и $p = 2$, то имеем результат, усиливающий неравенство М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманна-Остенхофа и А. Лаптева (1.4). Справедливо следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)}dx + \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx + \frac{\lambda_1^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}}\int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x)dx,$$

где $\lambda_1 \approx 1,25578$.

Следствие 4.4. *В выпуклых областях Ω с фиксированным объемом*

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где $\lambda_1 \approx 1,25578$.

Также имеет место неравенство с дополнительными слагаемыми, зависящими только от диаметра области. Справедлива теорема.

Теорема 4.5. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$B(n,p)\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx$$
$$\geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p \delta(x)dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Доказательство. Используя неравенство (4.1) и определение диаметра области $D(\Omega)$, при $s = p-1$ в силу очевидных неравенств

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} d\omega(\nu) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2} d\omega(\nu) \geqslant \frac{4}{D^2(\Omega)},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2} d\omega(\nu) \geqslant \frac{1}{D^2(\Omega)},$$

получим

$$B(n,p)\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx$$
$$\geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega)} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2 D^p(\Omega)} \int\limits_\Omega |g(x)|^p \delta(x) dx.$$

Откуда следует утверждение теоремы. □

Следствие 4.5. *В выпуклых областях Ω с фиксированным диаметром*

$$\lambda_p(\Omega) \geqslant \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega) B(n,p)},$$

где $\lambda_1 \approx 1,25578$.

Аналогичные результатам этого параграфа неравенства можно получить также, используя теорему 3.1. Выкладки и обоснования будут практически такими же, но будут отличаться константы в неравенствах. Эти результаты иногда будут иметь некоторые преимущества. Например, в выпуклых областях Ω с фиксированным объемом можно получить оценку

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{{j'}_1^2}{2} \frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}},$$

где ${j'}_1 \approx 1,84118$ — первый положительный корень производной ${J_1}'$ функции Бесселя J_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Левин. *О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств* // Матем. сб. **4(46)**:2, 309–324 (1938).
2. Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев, А.М. Елизаров. *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. **25**, 3–121 (1987).
3. Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // УМН. **30**:4 (184), 3–60 (1975).
4. Z. Nehari. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* // Bull. Amer. Math. Soc. **55**:6, 545–551 (1949).
5. Z. Nehari. *Some criteria of univalence* // Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 700–704 (1954).
6. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18**: 4, 723–736 (2011).
7. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Weighted Hardy inequalities with sharp constants* // Lobachevskii Journal of Mathematics. **31**:1, 1–7 (2010).
8. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Unified Poincare and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angev. Math. Mech. **14**:8-9, 532–542 (2007).

9. Ф.Г. Авхадиев. *Задача Брезиса—Маркуса и ее обобщения* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **153**, 3–12 (2018).
10. F.G. Avkhadiev. *Hardy-type inequalities on planar and spatial open sets* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. **255**:1, 2–12 (2006).
11. H. Brezis, M. Marcus. *Hardy's inequalities revisited* // Dedicated to E. De Giorgi, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **25**:1-2, 217–237 (1998).
12. S. Filippas, V.G. Maz'ya, A. Tertikas. *On a question of Brezis and Marcus* // Calc. Var. Partial Diff. Eq. **25**:4, 491–501 (2006).
13. M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev. *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal. **189**:2, 539–548 (2002).
14. T. Matskewich, P.E. Sobolevskii. *The best possible constant in generalized Hardy's inequality for convex domains in* $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Anal. **28**:9, 1601–1610, (1997).
15. M. Marcus, V.J. Mitzel, Y. Pinchover. *On the best constant for Hardy's inequality in* R^n // Trans. Amer. Math. Soc. **350**:8, 3237–3255 (1998).
16. Р.В. Макаров, Р.Г. Насибуллин. *Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба* // Сибирск. матем. журн. **61**:6, 1377–1397 (2020).
17. R.V. Makarov, R.G. Nasibulli. *Hardy type inequalities and parametric Lamb equation* // Indagationes Mathematicae. **31**:4, 632–649 (2020).
18. R.G. Nasibullin. *Hardy and Rellich type inequalities with remainders* // Czechoslovak Math. J. **72**:1, 87–110 (2022).
19. R.G. Nasibullin. *Sharp conformally invariant Hardy-type inequalities with remainders* // Eurasian Math. J. **12**:3, 46–56 (2021).
20. R.G. Nasibullin. *Brezis–Marcus type inequalities with Lamb constant* // Сиб. электрон. матем. изв. **16**, 449–464 (2019).
21. Р.Г. Насибуллин. *Точные интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя* // Уфимск. матем. журн. **9**:1, 89–97 (2017).
22. J. Tidblom. *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. **132**, 2265–2271 (2004).
23. A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Universitext, Springer. 2015.
24. W.D. Evans, R.T. Lewis. *Hardy and Rellich inequalities with remainders* // J. Math. Inequal. **1**:4, 473–490 (2007).
25. G.N. Watson. *A threatise on the theory of the Bessel Functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1966.
26. H. Lamb. *Note on the induction of electric currents in a cylinder placed across the lines of magnetic force* // Proc. Lond. Math. Soc. **XV**, 270–274 (1884).
27. J. Hersch. *Sur la fréquence fondamentale d'une membrande vibrante; évaluation par défaut et principe de maximum* // J. Math. Phys. Appl. **11**, 387–412 (1960).
28. C. Bandle. *Isoperimetri inequalities and appliations.* Boston-London-Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program. 1980.
29. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1973.
30. E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 42.* Cambridge: Cambridge University Press. 1995.

Рамиль Гайсаевич Насибуллин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, КФУ,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `NasibullinRamil@gmail.com`