

УДК 517.547.3

О ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ЭЙЛЕРОВЫМ ЧИСЛОМ

А.Б. КОСТИН, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Рассматривается классическая конструкция «второго замечательного предела». Ставится вопрос об асимптотически точном описании характера такой аппроксимации числа e . В связи с этим требуется информация о поведении коэффициентов степенного разложения функции $f(x) = e^{-1}(1+x)^{1/x}$, сходящегося в интервале $-1 < x < 1$. Выведено рекуррентное правило, регулирующее формирование означенных коэффициентов. Показано, что коэффициенты образуют знакопеременную последовательность рациональных чисел $(-1)^n a_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a_0 = 1$, модули которых строго убывают. На основе формулы Фаа ди Бруно для производных сложной функции предложен комбинаторный способ вычисления чисел a_n при $n \in \mathbb{N}$. Исходная функция $f(x)$ есть сужение на вещественный луч $x > -1$ функции $f(z)$, имеющей те же тейлоровские коэффициенты и аналитической в комплексной плоскости \mathbb{C} с разрезом $(-\infty, -1]$. Методами комплексного анализа получено интегральное представление для a_n при любом значении параметра $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что $a_n \rightarrow 1/e$ при $n \rightarrow \infty$, и найден порядок стремления к нулю разности $a_n - 1/e$. Затронут вопрос о выборе контура в интегральной формуле Коши для вычисления тейлоровских коэффициентов $(-1)^n a_n$ функции $f(z)$. Посчитаны точные значения возникающих по ходу дела специальных несобственных интегралов. Результаты проведенного исследования позволяют дать серию общих двусторонних оценок отклонения $e - (1+x)^{1/x}$, согласованных с асимптотикой $f(x)$ при $x \rightarrow 0$. Обсуждаются возможности применения полученных утверждений.

Ключевые слова: число e , аналитическая функция, тейлоровские коэффициенты, формула Фаа ди Бруно, интегральное представление, асимптотическое поведение.

Mathematics Subject Classification: 30B10

1. ВВЕДЕНИЕ

В стандартном курсе математического анализа доказывается базовое соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (1.1)$$

формирующее привычный облик теории пределов. Гораздо реже обсуждается скорость такого приближения (укажем на известные задачки [1, отдел первый, гл. 4, § 2, номера 170, 171], [2, номера 2.16, 2.17] и недавнюю публикацию [3]). По понятным причинам вопрос о характере аппроксимации числа e посредством (1.1) вызывает естественный интерес. В то же время, в литературе не удалось отыскать полного описания картины приближения, включающего, например, асимптотические формулы для отклонения $e - (1+x)^{1/x}$ при $x \rightarrow 0$, подкрепленные качественными двусторонними оценками. Проведенное авторами небольшое исследование показало, что ситуация весьма любопытна. В заметке мы коснемся некоторых возникающих здесь задач.

A.B. KOSTIN, V.B. SHERSTYUKOV, ON TAYLOR COEFFICIENTS OF ANALYTIC FUNCTION RELATED WITH EULER NUMBER.

© Костин А.Б., Шерстюков В.Б. 2022.

Поступила 12 апреля 2022 г.

Формула (1.1) сохраняет свою силу при переходе к комплексным значениям переменной. В самом деле, используя стандартное обозначение для главной ветви логарифма

$$\ln \zeta = \ln |\zeta| + i \arg \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -0], \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi),$$

получим, что функция

$$f(z) \equiv \exp \left\{ \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right\}, \quad (1.2)$$

при вещественных $z = x > -1$ очевидно совпадает с функцией $e^{-1}(1+x)^{1/x}$ и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1. \quad (1.3)$$

Формула (1.2) с соглашением $f(0) = 1$ задает аналитическую в области $D \equiv \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ функцию, которая является суперпозицией целой функции

$$\exp w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w \in \mathbb{C},$$

и аналитической в области D функции

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z} - 1.$$

Последняя допускает в единичном круге разложение

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n, \quad |z| < 1. \quad (1.4)$$

Функция (1.2) также аналитична в единичном круге, и поэтому

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n, \quad |z| < 1. \quad (1.5)$$

С учетом (1.3) при вещественных значениях переменной имеем

$$f(x) = e^{-1} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^n, \quad -1 < x < 1, \quad (1.6)$$

где $a_n \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как мы увидим ниже, все числа a_n положительны. Этим объясняется форма записи коэффициентов в (1.5), (1.6), подчеркивающая их знакопеременность.

Отметим, что степенной ряд в (1.4) сходится всюду на единичной окружности, кроме точки $z = -1$. Это свойство не наследуется степенным рядом (1.5): выясняется (см. § 2), что для него множеством сходимости будет открытый круг $|z| < 1$.

Исследование тейлоровских коэффициентов функции (1.2) составляет основное содержание работы. В следующем параграфе предложен рекуррентный способ вычисления коэффициентов в (1.5) и с его помощью доказано убывание последовательности a_n . Затем, в § 3, указано явное комбинаторное представление чисел a_n , возникающее из формулы Фаа ди Бруно для производных сложной функции. Четвертый параграф посвящен обоснованию неочевидного свойства $a_n \rightarrow 1/e$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого используется формула Коши вычисления тейлоровских коэффициентов аналитической функции со специально подобранным контуром интегрирования. Предлагаются другие варианты выбора контура, приводящие к различным интегральным представлениям чисел a_n при всех $n \in \mathbb{N}$. Возможные приложения полученных результатов обсуждаются в заключительном § 5.

2. РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Начнем с вывода полезного рекуррентного соотношения для чисел a_n .

Предложение 2.1. Коэффициенты степенного ряда (1.5) образуют знакопередающуюся последовательность рациональных чисел, причем

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Согласно (1.2) имеем

$$f'(z) = f(z) \left(\frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right)', \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]. \quad (2.2)$$

Поскольку (ввиду (1.4), (1.5)) в круге $|z| < 1$ справедливы представления

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+1} z^n, \\ \left(\frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} z^n,$$

то связь (2.2) дает тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+1} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} z^n \right), \quad |z| < 1.$$

Произведение записанных степенных рядов есть снова степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k+2} (-1)^{n-k} a_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n-k} \right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Таким образом, в единичном круге имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n-k} \right) z^n,$$

откуда, с учетом (1.3), извлекается рекуррентное правило (2.1) для нахождения коэффициентов разложения (1.5). Это правило показывает, что все числа a_n являются рациональными. Предложение доказано. \square

Вычисления по формуле (2.1) дают несколько первых коэффициентов

$$a_1 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{2}{3} a_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{24}, \\ a_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a_2 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{3}{4} a_0 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{48} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{16}, \\ a_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} a_3 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{3}{4} a_1 + \frac{4}{5} a_0 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{7}{32} + \frac{11}{36} + \frac{3}{8} + \frac{4}{5} \right) = \frac{2447}{5760}, \\ a_5 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} a_4 + \frac{2}{3} a_3 + \frac{3}{4} a_2 + \frac{4}{5} a_1 + \frac{5}{6} a_0 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{2447}{11520} + \frac{7}{24} + \frac{11}{32} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \right) = \frac{959}{2304}.$$

Тем самым,

$$f(z) \equiv \exp \left\{ \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right\} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{11}{24} z^2 - \frac{7}{16} z^3 + \frac{2447}{5760} z^4 - \frac{959}{2304} z^5 + \dots, \quad |z| < 1.$$

На примере первых коэффициентов видим, что $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$, поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= \frac{1}{2} = 0,5, & a_2 &= \frac{11}{24} = 0,458(3), & a_3 &= \frac{7}{16} = 0,4375, \\ a_4 &= \frac{2447}{5760} = 0,4248263(8), & a_5 &= \frac{959}{2304} = 0,41623263(8). \end{aligned}$$

Сохранится ли при дальнейшем увеличении номера явно наблюдаемая тенденция к медленному уменьшению возникающих чисел? Ответ заключен в следующем утверждении.

Предложение 2.2. Числа a_n , заданные рекуррентным правилом (2.1), образуют убывающую последовательность, т.е.

$$d_n \equiv a_n - a_{n+1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Для накопления фактического материала вычислим несколько первых членов последовательности, определенной в (2.3). Получим

$$\begin{aligned} d_0 &= a_0 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & d_1 &= a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{11}{24} = \frac{1}{24}, & d_2 &= a_2 - a_3 = \frac{11}{24} - \frac{7}{16} = \frac{1}{48}, \\ d_3 &= a_3 - a_4 = \frac{7}{16} - \frac{2447}{5760} = \frac{73}{5760}, & d_4 &= a_4 - a_5 = \frac{2447}{5760} - \frac{959}{2304} = \frac{11}{1280}. \end{aligned}$$

Начальные числа (2.3) — первые разности чисел (2.1) — положительны и убывают:

$$d_0 > d_1 > d_2 > d_3 > d_4.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{2} = 0,5, & d_1 &= \frac{1}{24} = 0,041(6), & d_2 &= \frac{1}{48} = 0,0208(3), \\ d_3 &= \frac{73}{5760} = 0,0126736(1), & d_4 &= \frac{11}{1280} = 0,00859375. \end{aligned}$$

Выведем рекуррентный закон формирования чисел d_n . Из (2.1) при $n \in \mathbb{N}_0$ находим

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_{n+1} - a_{n+2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n-k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+1}{k+2} a_{n+1-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n-k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} (a_{n-k} - a_{n+1-k}) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} d_{n-k} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+1}{k+2} a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2} d_{n-k} + \frac{1}{n+1} a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n d_{n-k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} d_{n-k} \right) + \frac{1}{n+1} a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}. \end{aligned}$$

Учтем очевидное равенство

$$\sum_{k=0}^n d_{n-k} = a_0 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1}$$

и продолжим выкладку:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left(1 - a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} d_{n-k} \right) + \frac{1}{n+1} a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1} (a_{n+1} - a_{n+2}) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} d_{n-k} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1} d_{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} d_{n-k}. \end{aligned}$$

В результате

$$\frac{n+2}{n+1} d_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} d_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Итак, для числовой последовательности, заданной в (2.3), получено рекуррентное правило

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{n+3} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+2-k} d_k \right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.4)$$

Например, согласно (2.4),

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} d_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}, \\ d_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} d_0 - \frac{1}{2} d_1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{48} \right) = \frac{1}{48}, \end{aligned}$$

что подтверждается предыдущими прямыми вычислениями.

Рекуррентную формулу (2.4) перепишем в эквивалентном виде

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = \frac{1}{24}, \quad d_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2-k} d_k, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Форма записи (2.5) лучше, чем (2.4), приспособлена к доказательству свойства (2.3).

При $n = 1$ формула (2.5) дает

$$d_2 = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} d_1 = \frac{1}{36} - \frac{1}{144} = \frac{1}{48},$$

что совпадает со значением, дважды вычисленным разными способами ранее. Докажем положительность разностей (2.3) индукцией по номеру $n \in \mathbb{N}_0$. При $n = 0$ и $n = 1$ имеем соответственно $d_0 = 1/2 > 0$ и $d_1 = 1/24 > 0$. Предположим, что

$$d_k > 0, \quad k = 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

для какого-то $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда, как показывает (2.5), выполнена оценка

$$d_k < \frac{1}{2(k+1)(k+2)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Действительно, (2.7) при $k = 1$ превращается в верное числовое неравенство $1/24 < 1/12$, а для последующих $k = 2, \dots, n$ из (2.5) с учетом (2.6) имеем

$$d_k = \frac{k}{2(k+1)^2(k+2)} - \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{k+1-m} d_m < \frac{k}{2(k+1)^2(k+2)} < \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Нужно доказать, что $d_{n+1} > 0$. Применив (2.7) в (2.5), получим

$$d_{n+1} > \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)}. \quad (2.8)$$

Используем стандартное обозначение для гармонических чисел

$$H_m \equiv \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Разложение на простые дроби

$$\frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} \frac{1}{n+2-k} + \frac{1}{n+3} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+4} \frac{1}{k+2}$$

показывает, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)} = \frac{2H_{n+1}}{(n+3)(n+4)} + \frac{n^2 - n - 8}{2(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Подставив это соотношение в (2.8), запишем оценку

$$d_{n+1} > \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{H_{n+1}}{(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{n^2 - n - 8}{4(n+2)^2(n+3)(n+4)},$$

откуда

$$4(n+2)^2(n+3)(n+4) d_{n+1} > n^2 + 11n + 16 - 4(n+2)H_{n+1}.$$

Положительность правой части последнего неравенства при $n \geq 2$ следует из оценки сверху для гармонических чисел

$$H_m < \frac{m^2 + 9m + 6}{4(m+1)}, \quad m \geq 3.$$

Проверка такой, довольно грубой оценки элементарна (например, индукцией по m).

В итоге выяснили, что предположение (2.6) влечет $d_{n+1} > 0$. Значит, выполнено (2.3). Это показывает убывание последовательности a_n при $n \in \mathbb{N}_0$. Доказательство завершено. \square

Предложение 2.2 указывает на наличие у последовательности (2.1) предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv a \geq 0.$$

Несколько неожиданным выглядит то обстоятельство, что этот предел отличен от нуля. Терпеливый расчет приводит к двусторонней оценке

$$0,3433 < a < 0,3985. \quad (2.9)$$

Действительно, ввиду убывания последовательности a_n , на основании имеющихся данных можем сразу записать $a < a_n < a_5 < 0,4163$, где $n > 5$. Попробуем снизить «верхнюю планку», преодолев отметку 0,4. Благодаря свойству монотонности, доказанному в предложении 2.2, найденную верхнюю границу можно последовательно уточнять, продолжая вычисления значений a_n по формуле (2.1) для номеров $n \geq 6$. Так, дойдя до номера $n = 9$, обнаружим, что

$$a_9 = \frac{123377159}{309657600} < 0,3985,$$

откуда следует правое неравенство в (2.9). С другой стороны, при всех $n \in \mathbb{N}$ рекуррентное соотношение (2.5) с учетом начального условия $d_1 = 1/24$ дает

$$d_{n+1} \leq \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{24(n+1)(n+2)} = \frac{11n^2 + 19n + 6}{24(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Тем самым,

$$d_m \leq \frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)}, \quad m \geq 2.$$

Но тогда для номеров $n \geq 2$ получим

$$a_{n+1} = 1 - \sum_{m=0}^n d_m = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \sum_{m=2}^n d_m \right) > \frac{11}{24} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)} = \frac{4\pi^2 - 23}{48}.$$

Сумма ряда посчитана с помощью знаменитого результата Эйлера

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

примененного после преобразования

$$\frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{(m+1)^2}.$$

Найденная оценка

$$a_n > \frac{4\pi^2 - 23}{48} > 0,3433, \quad n \geq 3,$$

(верная при всех $n \in \mathbb{N}_0$) демонстрирует справедливость левого неравенства в (2.9).

Как будет показано ниже, истинное значение предела a есть число $1/e = 0,3678 \dots$, попадающее, конечно, в обозначенный диапазон (2.9). На наш взгляд, вывести заявленное точное утверждение из рекуррентной формулы (2.1) проблематично. По крайней мере, инструменты комплексного анализа оказываются более эффективными при решении данной задачи. Впрочем, и приближенный результат (2.9) весьма полезен для понимания ситуации в целом. Например, из него следует расходимость степенного ряда в (1.5) на окружности $|z| = 1$, несмотря на то, что f есть композиция двух аналитических (во всей плоскости \mathbb{C} и в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ соответственно) функций, степенные разложения которых заведомо сходятся в точках $z \neq -1$ указанной окружности.

В § 4 мы вернемся к вопросу о вычислении величины $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, а сейчас обсудим альтернативный способ задания последовательности a_n , носящий комбинаторный характер.

3. ФОРМУЛА ФАА ДИ БРУНО

Генезис функции (1.2) подсказывает идею применить для нахождения коэффициентов разложения (1.5) один общий результат, известный как формула Фаа ди Бруно (см., например, [4, гл. 2, § 8]). Речь идет о правиле вычисления производных сложной функции. Воспользуемся следующим вариантом его записи

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} h(g(z)) = \sum \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} h^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(z)) \prod_{j=1}^n \left(\frac{g^{(j)}(z)}{j!} \right)^{m_j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам (m_1, m_2, \dots, m_n) чисел из \mathbb{N}_0 , связанных при заданном, фиксированном значении n (порядок производной) условием

$$m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n. \quad (3.2)$$

Много интересных сведений о формуле Фаа ди Бруно можно почерпнуть из ретроспективной подборки российских публикаций [5]–[7] и обстоятельного обзора [8].

В нашем случае

$$h(w) = \exp w, \quad g(z) = \frac{\ln(1+z)}{z} - 1, \quad f(z) = h(g(z)), \quad h^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(z)) = f(z).$$

Из (1.3), (1.4) имеем

$$f(0) = 1, \quad \frac{g^{(j)}(0)}{j!} = \frac{(-1)^j}{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Учитывая эти простые соображения, подставим в (3.1) точку $z = 0$ и получим для коэффициентов тейлоровского разложения (1.5) формулу

$$(-1)^n a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^j}{j+1} \right)^{m_j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что соотношение (3.2) позволяет при любом $n \in \mathbb{N}$ записать

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^j}{j+1} \right)^{m_j} = (-1)^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{(j+1)^{m_j}}.$$

Следовательно, верен такой результат.

Предложение 3.1. *Для коэффициентов из тейлоровского разложения (1.5) справедливо представление*

$$a_n = \sum \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n! 2^{m_1} 3^{m_2} \dots (n+1)^{m_n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

с суммированием по правилу (3.2).

Протестируем формулу (3.3), выбрав номер $n = 4$. В таком случае согласно предыдущим расчетам, основанным на рекуррентной формуле (2.1), мы должны получить для a_4 значение $2447/5760$. В самом деле, уравнение

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 4$$

имеет ровно пять решений (m_1, m_2, m_3, m_4) с компонентами из множества \mathbb{N}_0 , а именно,

$$(0, 0, 0, 1), \quad (1, 0, 1, 0), \quad (0, 2, 0, 0), \quad (2, 1, 0, 0), \quad (4, 0, 0, 0).$$

Соответственно, сумма

$$\sum \frac{1}{m_1! m_2! m_3! m_4! 2^{m_1} 3^{m_2} 4^{m_3} 5^{m_4}}$$

состоит из пяти слагаемых, каждое из которых вычисляется по своему набору целочисленных компонент:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 1) &\implies \frac{1}{0! 0! 0! 1! 2^0 3^0 4^0 5^1} = \frac{1}{5}, \\ (1, 0, 1, 0) &\implies \frac{1}{1! 0! 1! 0! 2^1 3^0 4^1 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}, \\ (0, 2, 0, 0) &\implies \frac{1}{0! 2! 0! 0! 2^0 3^2 4^0 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{18}, \\ (2, 1, 0, 0) &\implies \frac{1}{2! 1! 0! 0! 2^2 3^1 4^0 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{24}, \\ (4, 0, 0, 0) &\implies \frac{1}{4! 0! 0! 0! 2^4 3^0 4^0 5^0} = \frac{1}{24 \cdot 16} = \frac{1}{384}. \end{aligned}$$

В результате

$$a_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{384} = \frac{2447}{5760},$$

что и требовалось подтвердить.

Как видим, практическое применение «явной» формулы (3.3) осложняется нетривиальным способом суммирования — по целым неотрицательным решениям диофантова уравнения (3.2) с n неизвестными и натуральным параметром n . При увеличении параметра

количество таких решений растет, делая представление (3.3) труднообозримым. Безусловно, предложение 3.1 обладает своеобразной комбинаторной эстетикой, но не ясно, как извлекать из (3.3) информацию об асимптотическом поведении чисел a_n . Именно поэтому будем искать «рабочую» формулу для a_n , лишенную указанных недостатков. С этой целью используем аппарат контурного интегрирования, который часто бывает полезен в таких задачах [9, гл. I, § 1.3].

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Ключевым результатом параграфа и всей работы является следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Для чисел a_n , фигурирующих в разложении (1.5), справедливо интегральное представление*

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau} \tau^n d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Выберем числа r, R так, чтобы $0 < r < 1 < 1+r < R$. В плоскости \mathbb{C} сделаем разрез по лучу $(-\infty, -1]$ и построим контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из следующих четырех частей, выписанных в порядке их обхода:

- окружность (против часовой стрелки) $\gamma_R : z = Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$;
- отрезок $l_{r,R}$ от точки $z_1 = -R$ до точки $z_2 = -(1+r)$, проходимый по верхнему берегу разреза;
- окружность (по часовой стрелке) γ_r^- , где $\gamma_r : z = -1 + re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$;
- отрезок $l_{r,R}^-$ от точки $z_2 = -(1+r)$ до точки $z_1 = -R$, проходимый по нижнему берегу разреза.

Любой тейлоровский коэффициент разложения (1.5) выражается через контурный интеграл по формуле Коши

$$(-1)^n a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и вычислим интеграл в (4.2) как сумму

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = I_{1,n}(R) + I_{2,n}(r, R) + I_{3,n}(r) + I_{4,n}(r, R), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1,n}(R) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, & I_{2,n}(r, R) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \\ I_{3,n}(r) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, & I_{4,n}(r, R) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Интеграл по окружности γ_R запишем в виде

$$I_{1,n}(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Поскольку для функции (1.2) верна оценка

$$|f(Re^{i\theta})| = \left| \exp \left\{ \frac{\ln(1 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} - 1 \right\} \right| \leq \exp \left\{ \frac{|\ln(1 + Re^{i\theta})|}{R} - 1 \right\} \leq \exp \left\{ \frac{\ln(1 + R) + \pi}{R} - 1 \right\}$$

при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$, то

$$\frac{1}{2\pi R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(Re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{eR^n} e^{\pi/R} (1 + R)^{1/R}.$$

Поэтому для произвольно заданного $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$I_{1,n}(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty. \quad (4.4)$$

Переходя ко второму интегралу в сумме (4.3), заметим, что в точках $z = x$ отрезка $l_{r,R}$ функция $g(z)$ определена по закону

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 = \frac{1}{x} (\ln(-1-x) + \pi i) - 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{2,n}(r, R) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi e i} \int_{-R}^{-(1+r)} \frac{1}{x^{n+1}} (-1-x)^{1/x} e^{\pi i/x} dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i} \int_{1/R}^{1/(1+r)} \tau^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)^{-\tau} e^{-\pi\tau i} \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i} \int_{1/R}^{1/(1+r)} \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{-\pi\tau i} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$I_{2,n}(r, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i} \int_0^1 \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{-\pi\tau i} d\tau, \quad r \rightarrow 0+, \quad R \rightarrow +\infty. \quad (4.5)$$

Интеграл по окружности γ_r^- запишем в виде

$$I_{3,n}(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-1 + re^{i\theta}) re^{i\theta}}{(-1 + re^{i\theta})^{n+1}} d\theta.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} f(-1 + re^{i\theta}) re^{i\theta} &= \frac{re^{i\theta}}{e} \exp \frac{\ln(re^{i\theta})}{-1 + re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{e} \exp \left\{ \frac{\ln r + i\theta}{-1 + re^{i\theta}} + \ln r + i\theta \right\} = \frac{1}{e} \exp \frac{re^{i\theta}(\ln r + i\theta)}{-1 + re^{i\theta}} \end{aligned}$$

для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$, то при $r \rightarrow 0+$ подынтегральное выражение

$$\frac{f(-1 + re^{i\theta}) re^{i\theta}}{(-1 + re^{i\theta})^{n+1}}$$

стремится к $(-1)^{n+1} (1/e)$ равномерно по $\theta \in [-\pi, \pi]$. Применяв известный результат относительно интеграла, зависящего от параметра (см., например, [10, гл. I, § 6]), для любого $n \in \mathbb{N}$ получим, что

$$I_{3,n}(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \rightarrow \frac{(-1)^n}{e}, \quad r \rightarrow 0+. \quad (4.6)$$

Наконец, учтем, что в точках $z = x$ отрезка $l_{r,R}^-$ функция $g(z)$ определена по закону

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 = \frac{1}{x} \left(\ln(-1-x) - \pi i \right) - 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{4,n}(r, R) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = -\frac{1}{2\pi e i} \int_{-R}^{-(1+r)} \frac{1}{x^{n+1}} (-1-x)^{1/x} e^{-\pi i/x} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int_{1/R}^{1/(1+r)} \tau^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right)^{-\tau} e^{\pi \tau i} \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int_{1/R}^{1/(1+r)} \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{\pi \tau i} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$I_{4,n}(r, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,R}^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \rightarrow \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int_0^1 \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{\pi \tau i} d\tau, \quad r \rightarrow 0+, \quad R \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Применив в (4.3) предельные соотношения (4.4)–(4.7), получим, что для произвольно заданного номера $n \in \mathbb{N}$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

стремится к величине

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i} \int_0^1 \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{-\pi \tau i} d\tau + \frac{(-1)^n}{e} + \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int_0^1 \frac{\tau^{\tau+n-1}}{(1-\tau)^\tau} e^{\pi \tau i} d\tau,$$

очевидно равной

$$\frac{(-1)^n}{e} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi \tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau} \tau^n d\tau \right),$$

если $r \rightarrow 0+$ и $R \rightarrow +\infty$. Осуществив указанный предельный переход в (4.2), убедимся в справедливости формулы (4.1). Предложение доказано. \square

Взяв точные значения для первых четырех чисел a_n , начиная с a_1 (см. § 2), получим из (4.1) серию «изысканных» равенств

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\tau^\tau}{(1-\tau)^\tau} \sin(\pi \tau) d\tau &= \frac{\pi(e-2)}{2}, & \int_0^1 \frac{\tau^{1+\tau}}{(1-\tau)^\tau} \sin(\pi \tau) d\tau &= \frac{\pi(11e-24)}{24}, \\ \int_0^1 \frac{\tau^{2+\tau}}{(1-\tau)^\tau} \sin(\pi \tau) d\tau &= \frac{\pi(7e-16)}{16}, & \int_0^1 \frac{\tau^{3+\tau}}{(1-\tau)^\tau} \sin(\pi \tau) d\tau &= \frac{\pi(2447e-5760)}{5760}, \end{aligned}$$

которую при необходимости можно продолжить. Но основное предназначение предложения 4.1 в другом: теперь уже несложно получить общее представление об асимптотическом поведении тейлоровских коэффициентов функции (1.2).

Предложение 4.2. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{2}{\pi(n+1)} \right) < a_n < \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

влекущая порядковое соотношение

$$a_n - \frac{1}{e} \asymp \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Доказательство. Запишем интегральное представление (4.1) в компактной форме

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \int_0^1 \varphi(\tau) \tau^n d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

где

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi} \frac{1}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau}, \quad \tau \in (0, 1). \quad (4.11)$$

Функция (4.11) при естественном соглашении

$$\varphi(0) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \varphi(\tau) = 1, \quad \varphi(1) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 1-0} \varphi(\tau) = 1$$

непрерывна на $[0, 1]$ и обладает свойствами:

- 1) $\varphi(\tau) = \varphi(1 - \tau)$, $\tau \in [0, 1]$,
- 2) $\varphi(\tau)$ убывает на $[0, 1/2]$ и возрастает на $[1/2, 1]$,
- 3) $\min_{0 \leq \tau \leq 1} \varphi(\tau) = \varphi(1/2) = 2/\pi$, $\max_{0 \leq \tau \leq 1} \varphi(\tau) = \varphi(0) = \varphi(1) = 1$.

Первое свойство очевидно, третье вытекает из второго. Поэтому достаточно проверить убывание функции $\varphi(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq 1/2$. Это делается стандартными средствами анализа на основе соотношений

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &\equiv \ln \varphi(\tau) = \ln \sin(\pi\tau) - \ln \pi - (1-\tau) \ln \tau - \tau \ln(1-\tau), & \tau \in (0, 1/2], & \eta(0) = 0, \\ \eta'(\tau) &= \pi \operatorname{ctg}(\pi\tau) + \ln \tau - \frac{1-\tau}{\tau} - \ln(1-\tau) + \frac{\tau}{1-\tau}, & \tau \in (0, 1/2], & \eta'(0+) = -\infty, \\ \eta''(\tau) &= -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{(1-\tau)^2}, & \tau \in (0, 1/2], & \eta''(0+) = +\infty. \end{aligned}$$

Точнее говоря, с помощью оценки

$$\sin s > s - \frac{s^3}{6}, \quad s > 0,$$

доказывается неравенство $\eta''(\tau) > 0$ при всех $\tau \in (0, 1/2]$, влекущее возрастание η' на промежутке $(0, 1/2]$ от $\eta'(0+) = -\infty$ до $\eta'(1/2) = 0$, а значит — убывание η на $[0, 1/2]$ от $\eta(0) = 0$ до $\eta(1/2) = -\ln(\pi/2)$.

В результате для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем двустороннюю оценку

$$\frac{2}{\pi(n+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \tau^n d\tau < \int_0^1 \varphi(\tau) \tau^n d\tau < \int_0^1 \tau^n d\tau = \frac{1}{n+1}.$$

Применив ее в (4.10), получим (4.8), (4.9). Предложение доказано. \square

Качество общей оценки (4.8) проиллюстрируем численным расчетом. Последовательно подставим в (4.8) значения $n = 1, 2, 3, 4$ и запишем

$$\begin{aligned} 0,4849 \dots &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) < a_1 = \frac{1}{2} < \frac{3}{2e} = 0,5518 \dots, \\ 0,4459 \dots &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) < a_2 = \frac{11}{24} = 0,458(3) < \frac{4}{3e} = 0,4905 \dots, \\ 0,4264 \dots &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) < a_3 = \frac{7}{16} = 0,4375 < \frac{5}{4e} = 0,4598 \dots, \\ 0,4147 \dots &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2}{5\pi}\right) < a_4 = \frac{2447}{5760} = 0,4248263(8) < \frac{6}{5e} = 0,4414 \dots, \end{aligned}$$

с неплохим приближением, особенно снизу.

Отметим также, что из (4.10), (4.11) легко извлекается рекуррентная связь

$$a_{n+1} = a_n - \int_0^1 \psi(\tau) \tau^n d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

где положительная функция ψ определена по формуле

$$\psi(\tau) \equiv \frac{1-\tau}{e} \varphi(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi e} \left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^{1-\tau}, \quad \tau \in (0, 1). \quad (4.13)$$

Тем самым, найден другой способ для обоснования предложения 2.2.

Укажем еще, что выбор контура в доказательстве предложения 4.1 представляется в определенном смысле оптимальным, хотя изначально имеется большой экспериментальный запас. Опуская подробности, приведем для сравнения результат, возникающий в случае, когда при подходящем сочетании параметров r, R контур $\tilde{\Gamma}_{r,R}$ в области D составляется из следующих четырех частей:

– дуга окружности (против часовой стрелки)

$$\tilde{\gamma}_R: z = Re^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi + \arccos(1/R), \pi - \arccos(1/R)];$$

– вертикальный отрезок от точки $-1 + i\sqrt{R^2 - 1}$ до точки $-1 + ir$;

– полуокружность (по часовой стрелке) $\tilde{\gamma}_r^-$, где $\tilde{\gamma}_r: z = -1 + re^{i\theta}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$;

– вертикальный отрезок от точки $-1 - ir$ до точки $-1 - i\sqrt{R^2 - 1}$.

Такой подход выглядит перспективным, но это иллюзия: формула

$$(-1)^n a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_{r,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.14)$$

после соответствующих преобразований контурного интеграла, венчающихся предельным переходом $r \rightarrow 0+$, $R \rightarrow +\infty$, приводится к виду

$$a_n = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(1-ix)^{n+1}} \exp \frac{\ln(ix)}{ix-1} \right\} dx \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.15)$$

со сходящимся несобственным интегралом. Подынтегральная функция в (4.15) записывается выражением

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \exp \left(\frac{\frac{\pi}{2}x - \ln x}{1+x^2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + x \ln x}{1+x^2} - (n+1) \operatorname{arctg} x \right).$$

Вряд ли простой анализ позволит вывести отсюда предложение 4.2. Сравнение (4.15) с (4.1) весьма показательно. Однако, в качестве своеобразной компенсации получаем возможность точного вычисления для счетного набора экзотических несобственных интегралов наподобие

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \exp\left(\frac{\frac{\pi}{2}x - \ln x}{1+x^2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x \ln x}{1+x^2} - 2 \operatorname{arctg} x\right) dx = \frac{\pi(e-1)}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\frac{\pi}{2}x - \ln x}{1+x^2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x \ln x}{1+x^2} - 3 \operatorname{arctg} x\right) dx = \frac{\pi(11e-12)}{24}.$$

Завершая параграф, предлагаем при малых r и больших R выбрать в интегральной формуле Коши (4.14) вместо $\tilde{\Gamma}_{r,R}$ модифицированный контур, составленный так:

– дуга окружности (против часовой стрелки)

$$\gamma_{r,R}: z = Re^{i\theta}, \quad \theta \in \left[-\pi + \arccos((1+r)/R), \pi - \arccos((1+r)/R)\right];$$

– вертикальный отрезок от точки $-(1+r) + i\sqrt{R^2 - (1+r)^2}$ до точки $-(1+r)$;

– окружность (по часовой стрелке) γ_r^- , где $\gamma_r: z = -1 + re^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$;

– вертикальный отрезок от точки $-(1+r)$ до точки $-(1+r) - i\sqrt{R^2 - (1+r)^2}$.

Было бы любопытно затем повторить *mutatis mutandis* схему доказательства предложения 4.1 и сравнить возникающее на этом пути интегральное представление для чисел a_n с формулой (4.15).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученные результаты находят применение в исходной задаче об асимптотическом поведении уклонения $e - (1+x)^{1/x}$ при $x \rightarrow 0$. Действительно, на основе степенного разложения

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \dots = e \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

эквивалентного (1.6), и известного свойства рядов типа Лейбница (учтено предложение 2.2) имеем серию двусторонних оценок

$$e \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} a_n x^n < e - (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n-1} a_n x^n, \quad (5.1)$$

действующих для всех $x \in (0, 1)$ при любом $N \in \mathbb{N}$. Например, выбрав $x = 1/m$ и первое значение $N = 1$, из (5.1) получим, что

$$e \left(\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} \right) < e - \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < e \left(\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3} \right)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Отдельно проверяется, что и при $m = 1$ выписанное неравенство верно. Следовательно,

$$\frac{12m-11}{24m^2} e < e - \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < \frac{24m^2 - 22m + 21}{48m^3} e, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Положив в (5.1) $x = 1/m$ и увеличивая значение параметра N , можно сформировать сколь угодно большой запас двойных неравенств, последовательно уточняющих (5.2).

Сравним (5.2) с известной двусторонней оценкой

$$\frac{e}{2m+2} < e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

взятой из [1, отдел первый, гл. 4, § 2, номер 170]. В силу очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \frac{12m-11}{24m^2} &> \frac{1}{2m+2}, & m \geq 12, \\ \frac{24m^2-22m+21}{48m^3} &< \frac{1}{2m+1}, & m \geq 2, \end{aligned}$$

новая оценка (5.2) лучше классической оценки (5.3) при $m \geq 12$, причем оценка сверху в (5.2) лучше оценки сверху в (5.3) для всех натуральных значений переменной, начиная с $m = 2$. Более того, (5.2) подкрепляет асимптотическую формулу

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{e}{2m} - \frac{11e}{24m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

в то время как (5.3) дает только более слабый результат

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{e}{2m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad m \rightarrow \infty.$$

В недавней заметке [3] указано справедливое для всех $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{2m+1}\right) < \frac{1}{2(2m+1)^2}.$$

Перепишем его в форме

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{2e(2m+1) + 1}{4(2m+1)(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Нетрудно проверить, что оценка (5.4) сильнее оценки сверху в (5.3) при любом $m \in \mathbb{N}$, но слабее оценки сверху в (5.2) при $m \geq 11$. Мы не будем продолжать разбор подобных примеров, демонстрирующих эффективность результата (5.1).

Разумеется, справедливо общее асимптотическое разложение

$$e - (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \sum_{n=1}^p (-1)^{n-1} a_n x^n + O(x^{p+1}), \quad x \rightarrow 0+, \quad p \in \mathbb{N},$$

для вычисления коэффициентов которого можно использовать на выбор как рекуррентное правило (2.1), так и представления (3.3), (4.1). Кстати, порядковое соотношение (4.9) было бы полезно конкретизировать, указав точный закон стремления к нулю величины

$$\alpha_n \equiv a_n - 1/e = \frac{1}{\pi e} \int_0^1 \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau} \tau^n d\tau, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определенный интерес представляет также задача об асимптотическом поведении первых разностей (2.3), которые, согласно (4.12), могут быть записаны как моменты

$$d_n = \int_0^1 \psi(\tau) \tau^n d\tau, \quad n \in \mathbb{N},$$

положительной на $(0, 1)$ функции (4.13).

Есть основания полагать, что свойство обвертывания (5.1) распространяется с интервала $x \in (0, 1)$ на луч $x > 0$. Простейшим аргументом в пользу такой гипотезы выступает тот факт, что двойное неравенство

$$e - \frac{e}{2}x < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

выполнено при всех $x > 0$. Вопрос важен еще и в связи с неожиданными аппроксимационными эффектами, обсуждаемыми в [11], [12].

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаем благодарность С.Р. Насырову за интерес к нашему сообщению на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, август 2021 г.), что послужило одним из стимулов для написания данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Поля, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций*. М.: Наука. 1978.
2. Б.М. Макаров, М.Г. Голузина, А.А. Лодкин, А.Н. Подкорытов. *Избранные задачи по вещественному анализу*. М.: Наука. 1992.
3. В.М. Федосеев. *Способы вычисления числа «e». Тема учебного исследования // Матем. обр. 2:98, 50–53 (2021)*.
4. Дж. Риордан. *Введение в комбинаторный анализ*. М.: Иностран. лит. 1963.
5. А.П. Поляков. *О выражении производной любого порядка функции от функции // Матем. сб. 5:2, 180–202 (1909)*.
6. В.А. Кудрявцев. *Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции // Матем. сб. 1, 24–27 (1934)*.
7. С.В. Дворянинов, М.И. Сильванович. *О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Матем. обр. 1:49, 22–26 (2009)*.
8. W.P. Johnson. *The curious history of Faà di Bruno's formula // Amer. Math. Monthly. 109, 217–234 (2002)*.
9. М.А. Евграфов. *Асимптотические оценки и целые функции*. М.: Наука. 1979.
10. М.А. Евграфов. *Аналитические функции*. М.: Наука. 1968.
11. А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович. *Об аппроксимации числа π^2 // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск. 22, 261–264 (2021)*.
12. A.V. Kostin, V.B. Sherstyukov, D.G. Tsvetkovich. *Enveloping of Riemann's zeta function values and curious approximation // Lobachevskii Math. J. 43:3, 1376–1381 (2022)*.

Андрей Борисович Костин,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: abkostin@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com