ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 35-42.

УДК 519.837

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

С.В. ГРИШИН

Аннотация. Мы рассматриваем задачу определения времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой. Более конкретно, объектом нашего исследования является график производящей функции вышеупомянутой случайной величины. Для случайного блуждания с максимальным положительным приращением 1 получено уравнение, задающее производящую функцию в неявном виде, из которого следует рациональность функции, обратной к производящей. Описан общий метод получения систем уравнений для нахождения производящей функции времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой. Для случайного блуждания с приращениями $-1, 0, 1, 2$ выведено алгебраическое уравнение, задающее производящую функцию в неявном виде. Доказана рациональность соответствующей плоской алгебраической кривой, содержащей график производящей функции. Сформулировано и доказано несколько общих свойств производящей функции времени первого достижения положительной полуоси при однородном дискретном целочисленном случайном блуждании на прямой.

Ключевые слова: производящая функция, случайное блуждание.

Mathematics Subject Classification: 60G50

1. Введение

1.1. Краткая история вопроса. В данной работе изучается случайное блуждание. Следуя [1], дадим определение этому понятию.

Определение 1.1. *Под однородным дискретным целочисленным случайным блужданием на прямой с параметрами* $p_1, a_1, \ldots, p_n, a_n$*, где* $p_i \in R$*,* $p_i \geqslant 0$*,* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *и* $a_i \in Z$ *понимается дискретный марковский процесс* η_k*, пропагатор которого равен* $P(\eta_{k+1} = n + a_i | \eta_k = n) = p_i$*. Величина* $\xi = min\{n | \eta_n > 0\}$ *называется временем первого попадания на положительную полуось. Если все* $\eta_k < 0$*, то принимается* $\xi = \infty$*.*

Далее, если не оговорено противное, под случайным блужданием всегда подразумевается однородное дискретное целочисленное случайное блуждание на прямой.

Первоначально случайное блуждание, как и вся теория вероятностей, возникло из азартных игр, где a_i интерпретируется как возможное значение выигрыша за ход в условных единицах, а p_i — вероятность данного значения выигрыша. Теория игр возникла еще в XVIII веке, но систематически впервые была изложена в эпоху Второй Мировой войны в монографии [2]. В это время она уже отделилась от теории вероятностей. Теория игр имеет много приложений в экономике, где роль выигрыша играет прибыль, что отмечено в [2], а также в работе [3], принесшей автору Нобелевскую премию по экономике. В последней работе указывается еще одно применение теории игр — в военном деле.

S.V. Grishin, Application of generating functions to problems of random walk.

© Гришин С.В. 2022.

Поступила 29 октября 2021 г.

Случайные блуждания нашли применение и в физике, а именно в задаче диффузии и броуновского движения (модель одномерного броуновского движения: за единицу времени частица изменяет свою координату на a_i с вероятностью p_i), относящейся к физической кинетике. Уравнение диффузии из [4] переписывается в нашем случае в виде $\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$, где скорость потока $v = \sum_{i=1}^n p_i a_i$ — математическое ожидание приращения координаты за единицу времени, а коэффициент диффузии $D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i(a_i - v)^2$ — половина его дисперсии. Данная теория принадлежит А. Эйнштейну и М. Смолуховскому.

Отметим, что именно статистическая физика вызвала в XX веке бурное развитие теории случайных процессов. Основы этой математической теории изложены, например, в [5]. Первым изученным случайным процессом был винеровский процесс, являющийся непрерывным аналогом случайных блужданий. Этим и другими случайными процессами занимались А. Эрланг, Р. Винер, А. Марков и другие. Подробнее об этом можно прочитать в [6]. Случайное блуждание является частным случаем дискретного однородного случайного процесса с независимыми приращениями.

Тема случайного блуждания так или иначе освещается во всех книгах по теории вероятностей. Например, в книге [1] подробно изучены так называемые «тривиальное» $(n = 2; a_1 = 1; a_2 = 0)$ и «симметричное» $(n = 2; a_1 = 1; a_2 = -1)$ случайные блуждания. Для последнего в [4] и выводится уравнение диффузии. «Тривиальное» соответствует количеству успехов в схеме Бернулли, а «симметричное» — антагонистической игре двух участников с равными ставками. В [1] также сформулированы следующие утверждения про общий случай:

Теорема 1.1. *Если $\sum_{i=1}^n p_i a_i = 0$, то с вероятностью 1 последовательность η_n содержит бесконечно много нулей.*

Теорема 1.2. *Если $\sum_{i=1}^n p_i a_i < 0$ (> 0), то с вероятностью 1 последовательность η_n содержит лишь конечное количество неотрицательных (соответственно неположительных) чисел.*

В учебнике [7] рассматриваются случайные блуждания на прямой в самом общем смысле (не только целочисленные и даже не обязательно с дискретными приращениями) и с помощью характеристической функции приращения формулируются и доказываются некоторые утверждения, являющиеся обобщениями утверждений 1.1 и 1.2. Мы же ограничимся более узким классом — приращение может принимать конечное число целых значений. Мы будем рассматривать производящую функцию величины ξ из определения 1.1.

1.2. Постановка задачи и обзор исследований на сходные темы. Нас будет интересовать время первого попадания на положительную полуось. С точки зрения теории игр, это задача о продолжении игры до тех пор, пока не окажемся в чистом выигрыше. Возраст этой задачи следует оценить в 300 лет, так как фактически ее решали еще Гюйгенс для случая «тривиального» блуждания (он рассматривал первое выпадение шестерки) и Муавр для «симметричного». Последний получил явные формулы для вероятности того, что игра закончится за n шагов (см. [6]). Физический смысл задачи заключается в том, что с положительной стороны от частицы установлен поглощающий экран.

Как следует из утверждений 1.1 и 1.2, вероятность бесконечного значения величины ξ из определения 1.1 ненулевая тогда и только тогда, когда математическое ожидание приращения отрицательно: $\sum_{i=1}^n p_i a_i < 0$.

Поскольку наша случайная величина принимает только натуральные значения, за исключением ∞, целесообразно рассмотреть производящую функцию.

Определение 1.2 ([8]). *Производящая функция величины ξ — это непрерывная на единичном круге и голоморфная внутри него функция комплексного переменного, обозначаемая как $f_\xi(z)$ и определенная как сумма ряда $\sum_{k=1}^\infty p(\xi = k)z^k$.*

Очевидно, $f_\xi(0) = 0$; $f'_\xi(0) = \sum_{a_i>0} p_i$; $f_\xi(1) = 1 - p(\xi = \infty)$, а в случае положительного математического ожидания приращения $f'_\xi(1)$ имеет смысл математического ожидания продолжительности игры. Для случаев, описанных выше, в [1] получены следующие формулы: $f_\xi(z) = \frac{p_1 z}{1-p_2 z}$ для «тривиального» и $f_\xi(z) = \frac{1-\sqrt{1-4p_1p_2z^2}}{2p_2 z}$ для «симметричного» случайного блуждания.

В работе [9] рассматривается задача, аналогичная сформулированной, для многомерных периодических решеток. Она возникает из физики кристаллов. Производящие функции там выводятся с помощью функций Грина.

Монография [10] посвящена важнейшей задаче страховой экономики — задаче о разорении. В ней рассматриваются случайные блуждания с непрерывным временем (положительные приращения равны единице и происходят периодически, но отрицательные распределены по величине и времени произвольным образом). На характеристические функции получены дифференциально-интегральные уравнения.

В [11] обсуждается связь между случайными блужданиями на полупрямой и ортогональными системами многочленов. В отличие от нашей задачи, случайные блуждания здесь неоднородные. Для их изучения используется так называемая формула Карлина-Мак-Грегора, дающая для вероятностей представление в виде интеграла по некоторой специальной мере.

В [12] рассматриваются случайные блуждания с произвольным распределением приращений и небольшим по модулю отрицательным математическим ожиданием приращения. Для распределения времени первого значения $\geqslant x$ получена асимптотическая оценка. Используется производящая функция моментов приращения.

В [13] обсуждается распределение числа рекордов (значений, больших всех предыдущих) за фиксированное число шагов симметричного целочисленного случайного блуждания. Производящая функция этого распределения оказалась трансцендентной.

Работа [14] посвящена двумерному случайному блужданию в четверти плоскости, в котором каждый шаг изменяет каждую координату не более чем на 1 и все возможные варианты шага равновероятны. В ней получены уравнения на производящую функцию трех переменных — число шагов, число достижений горизонтальной полуоси и число достижений вертикальной полуоси. Для некоторых случаев удается найти алгебраическое решение, для других — дифференциально-алгебраическое (в соотношении фигурируют производные по переменной, отвечающей за число шагов).

Для гексагональной решетки некоторые производящие функции и явные формулы для вероятностей получены в [15].

Для многомерной решетки и произвольных распределений приращения удается найти вероятность того, что 0 не лежит в выпуклой оболочке нескольких значений. В формуле присутствуют коэффициенты, заданные своей производящей функцией (см. [16]).

В [17] рассматривается задача о количестве точек, посещенных ровно k раз за n шагов случайного блуждания. Производящая функция вычисляется с применением теории графов.

Частный случай непосредственно нашей задачи рассмотрен в [18] ($n = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$). Получены явные формулы вероятностей, содержащие гипергеометрические функции, и выведена производящая функция для первого достижения произвольной точки.

В [19] указан метод решения нашей задачи, использующий многомерные ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Произведен расчет для случая из [18] и случая $n = 3$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$. Получены уравнения, являющиеся частными случаями нашего основного результата, и доказано, что производящие функции являются их наименьшими действительными решениями.

Мы выведем соотношения на производящие функции $f_\xi(z)$ для общих случайных блужданий более элементарными методами. Как видим, тема случайного блуждания активно развивается в последние десятилетия, а наш результат позволит применять в ней алгебро-геометрические методы, в частности, методы бирациональной геометрии.

2. Основной результат

2.1. Случай, допускающий полное исследование. Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть в определении случайного блуждания $n > 1$, $a_1 = 1$, $a_i \leqslant 0$, $1 < i \leqslant n$. Тогда, если положить $w = f_\xi(z)$, выполнено соотношение*

$$w = z \sum_{i=1}^{n} p_i w^{1-a_i}. \tag{2.1}$$

Иными словами, при подстановке $w = f_\xi(z)$ в (2.1) получается тождество.

Доказательство. Получим рекуррентную формулу для $c_k = p(\xi = k)$. Ясно, что $c_1 = p_1$. Пусть теперь $k > 1$. Тогда $\eta_1 = a_i$, $i > 1$ с вероятностью p_i. Чтобы теперь достичь положительного результата 1, нужно пройти через $-a_i$ промежуточных значений $a_i + 1, \ldots, 0$, поэтому оставшиеся $k - 1$ шагов разбиваются на $1 - a_i$ слагаемых, каждое из которых можно интерпретировать как первое достижение выигрыша 1 по сравнению с предыдущим шагом. Так как шаги независимы, то, если разбиение имеет вид $k - 1 = k_1 + \ldots + k_{1-a_i}$, соответствующая вероятность равна $\Pi_{j=1}^{1-a_i} c_{k_j}$. Суммируя по всем возможным первым членам и разбиениям (порядок слагаемых разбиения, очевидно, существенен), получим соотношение

$$c_{k+1} = \sum_{i=2}^{n} \left(p_i \sum_{k_1,\ldots,k_{1-a_i} > 0; \sum_{j=1}^{1-a_i} k_j = k} \Pi_{j=1}^{1-a_i} c_{k_j} \right). \tag{2.2}$$

Осталось подставить ряд Тейлора $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ вместо w в соотношение (2.1), учесть, что $w^0 = 1$, и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z, убедиться, что рекуррентные соотношения (2.2) обращают это соотношение в тождество. □

Для дальнейшего исследования нам понадобятся такие понятия алгебраической геометрии, как алгебраическая кривая и рациональная кривая. Следуя [20] и используя стандартные обозначения $C[...]$ — кольцо полиномов от набора переменных внутри квадратных скобок с комплексными коэффициентами и $C(...)$ — поле рациональных функций от набора переменных внутри круглых скобок с комплексными коэффициентами, напомним их определения:

Определение 2.1. *Плоская алгебраическая кривая — это множество точек C^2, удовлетворяющих уравнению $P(x, y) = 0$, где x, y — декартовы координаты, $P \in C[x, y]$ — некоторый многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами. Степень многочлена называют также степенью соответствующей алгебраической кривой. Для некоторых степеней есть специальные названия, например, коника (степень 2), кубика (степень 3), квартика (степень 4), квинтика (степень 5). Если многочлен простой, то есть не раскладывается на непостоянные множители, говорят, что кривая неприводима, в противном случае говорят, что кривая, заданная многочленом, состоит из нескольких компонент, каждая из которых является кривой, заданной каким-то из его простых множителей.*

Определение 2.2. *Неприводимая плоская алгебраическая кривая называется рациональной, если существуют две рациональные функции одной переменной с комплексными коэффициентами $x(t), y(t) \in C(t)$, при подстановке в уравнение кривой обращающие его в тождество. При этом t называют рациональным параметром кривой.*

Определение 2.3. *Множество $\{(z, f(z))|z \in D(f)\} \subset C^2$, где $D(f)$ — область определения функции f, называется графиком функции f. Если функция мероморфна на области определения, говорят, что график является гладкой кривой. При этом прямая $\{(z_0 + t, f(z_0) + f'(z_0)t)|t \in C\}$ называется наклонной касательной к графику функции f в точке $z_0 \in D(f)$, не являющейся полюсом производной, а если $f'(z)$ имеет полюс в точке z_0, то прямая $\{(z_0, t)|t \in C\}$ называется вертикальной касательной к графику функции f в точке z_0.*

Из теоремы 2.1 следует, что график функции $f_\xi(z)$ является подмножеством плоской алгебраической кривой степени $2 - min\{a_2, \dots, a_n\}$, задаваемой уравнением (2.1). Эта кривая является неприводимой, так как каждому значению w соответствует не более одного значения z (иначе каждая компонента кривой дала бы свое соответствие $z(w)$), и рациональной с рациональным параметром w. Функция, обратная к производящей, является рациональной с числителем w.

Продифференцировав соотношение (2.1) и подставив $w = z = 1$, находим математическое ожидание продолжительности игры. Оно равно $\frac{1}{M}$. Здесь $M = \sum_{i=1}^n p_i a_i$ — математическое ожидание выигрыша за ход. Этот результат является частным случаем следующего факта, упомянутого в [1]:

Теорема 2.2. *Математическое ожидание суммы случайного числа независимых одинаково распределенных слагаемых равно произведению математического ожидания числа слагаемых на математическое ожидание одного слагаемого.*

Находя в той же точке вторую производную

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\frac{dz}{dw}}\right), \tag{2.3}$$

можно вычислить и дисперсию продолжительности игры, которая оказывается равной $\frac{D}{M^3}$, где M то же, что выше, а $D = \sum_{i=1}^n p_i(a_i - M)^2$ — дисперсия выигрыша за ход.

2.2. Общий случай. Интересно рассмотреть задачу в общем случае. Сформулируем несколько достаточно очевидных утверждений:

Теорема 2.3. *Если все $a_i \leqslant 0$, то $f_\xi(z) = 0$.*

Доказательство. В указанном случае все η_i из определения 1.1 неположительны, а значит, достоверно $\xi = \infty$. Поэтому $P(\xi = n) = 0$ для любого натурального n, а значит, и $f_\xi(z) = 0$. □

Теорема 2.4. *Если все $a_i \geqslant 0$, то величина ξ имеет такое же распределение как при «тривиальном» случайном блуждании с $\tilde{p_2} = p_i$ при таком i, что $a_i = 0$, и $\tilde{p_2} = 0$, если все $a_i > 0$; $\tilde{p_1} = 1 - \tilde{p_2}$.*

Доказательство. В этом случае все $\eta_i \geqslant 0$, поэтому $\xi = min\{n|\eta_n > 0\} = min\{n|\eta_n \neq 0\}$. Это соответствует «тривиальному» случайному блужданию с вероятностью $\tilde{p_1}$ равной сумме вероятностей всех ненулевых значений приращения и $\tilde{p_2}$ равной вероятности нулевого значения приращения (если таковая есть). □

Далее будем считать, что существуют a_i разных знаков.

Теорема 2.5. *Если НОД всех a_i равен $d > 1$, то случайное блуждание с параметрами $n, p_i, \tilde{a}_i = a_i/d$ (назовем его редуцированным) имеет такое же распределение времени попадания на положительную полуось, как исходное.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для исходного процесса все $\eta_n \in dZ$ и линейная замена координат $x' = x/d$ на прямой переводит эту решетку в Z, а наше блуждание — в редуцированное. На положительность η_n данная замена координат не влияет, поэтому ξ переходит при ней в себя. □

Это означает, что без ограничения общности можно считать набор a_i взаимно простым в совокупности.

Рассмотрим пример, не охватываемый теоремой 2.1: $n = 4$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$.

Теорема 2.6. *Рекуррентные соотношения в данном примере выглядят следующим образом:*

$$\begin{cases} c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)}, \\ c_1^{(1)} = p_3, \\ c_1^{(2)} = p_4, \\ c_{k+1}^{(1)} = p_1(c_k^{(2)} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(1)} c_{k-j}^{(1)}) + p_2 c_k^{(1)}, \\ c_{k+1}^{(2)} = p_1 \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(1)} c_{k-j}^{(2)} + p_2 c_k^{(2)}. \end{cases}$$

Доказательство. В данном примере в момент окончания игры возможны два случая: $\eta_n = 1$ и $\eta_n = 2$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2.1. Например, если $\eta_1 = -1$, то достичь значения 1 можно либо сначала достигнув значения 0, либо минуя 0, а значения 2, только достигнув сначала значения 0. □

Следствие 2.1. *Производящая функция удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} f_\xi(z) = f_1(z) + f_2(z), \\ f_1(z) = z(p_1(f_2(z) + f_1^2(z)) + p_2 f_1(z) + p_3), \\ f_2(z) = z(p_1 f_1(z) f_2(z) + p_2 f_2(z) + p_4). \end{cases}$$

Выполнив некоторые преобразования, получим что график функции $f_\xi(z)$ является подмножеством плоской алгебраической кривой — квинтики

$$Aw^3z^2 + Bw^2z^2 + Cw^2z + Dwz^2 + Ewz + Fz^2 + w + Gz = 0, \tag{2.4}$$

где $A = p_1^2$, $B = p_1(2p_2 + p_3)$, $C = -2p_1$, $D = p_2 + p_1(p_3 - p_2 + 3p_4)$, $E = p_1 - p_2 - 1$, $F = (p_3 + p_4)(1 - p_1) - p_1 p_4$, $G = -(p_3 + p_4)$.

Теорема 2.7. *Если $p_1 > 0$ и $p_4 > 0$, квинтика (2.4) неприводима и рациональна.*

Доказательство. Заменой координат $\left(t = \frac{P(w)z+Q(w)}{w-1}, w\right)$, где P, Q — некоторые полиномы, эта квинтика переводится в конику вида $t^2 = kw+l$ с некоторыми коэффициентами k, l (полиномы и коэффициенты зависят от значений p_i, причем, если $p_1 > 0$ и $p_4 > 0$, то $P \neq 0$ и $k \neq 0$), при этом она имеет лишь конечное число особых относительно вышеуказанной замены координат точек, поэтому она неприводима, так как количество компонент в старых и новых координатах совпадает, а коника $t^2 = kw + l$ неприводима. Из замены также следует, что t является рациональным параметром нашей кривой. □

В общем случае идея та же, но уравнений больше, они имеют больше слагаемых большей степени, и хотя из этой системы можно вывести полиномиальное соотношение на $z, w = f(z)$, но соответствующий многочлен имеет большую степень даже при небольших по модулю a_i, и вопрос, является ли соответствующая плоская алгебраическая кривая рациональной, остается открытым. Можно сказать только следующее:

Теорема 2.8. *Плоская алгебраическая кривая, содержащая график функции $f_\xi(z)$ для случайного блуждания с параметрами $p_1, a_1, \ldots, p_n, a_n$, обладает следующими свойствами:*

1) Линейная часть уравнения кривой имеет вид $w - z\sum_{a_i>0} p_i$, дальше идут слагаемые степени 2 и выше;

2) Кривая проходит через точку $w = z = 1$;

3) При $M > 0$ имеется в этой точке наклонная касательная $w - 1 = k(z - 1)$, где $\frac{1}{M} \leqslant k \leqslant \frac{max\{a_1,\ldots,a_n\}}{M}$, а в «критическом» случае $M = 0$ — вертикальная касательная $z = 1$. Здесь M такое же как в разделе 2.1.

Доказательство. 1) Линеаризуя систему уравнений (за линейную часть «отвечает» база рекурсии) (2.1), получим

$$\begin{cases} f_\xi(z) = \sum_{j=1}^{max\{a_1,\ldots,a_n\}} f_j(z), \\ f_j(z) = zp_{i_j}, \end{cases}$$

где i_j выбирается так, чтобы $a_{i_j} = j$, а если такого индекса не существует, то считается $p_{i_j} = 0$. Подставляя в первое уравнение системы все остальные, получим линеаризованное уравнение кривой.

2) Рассмотрим задачу с фиксированными a_i и переменными p_i. Уравнение кривой будет представлять собой многочлен от $z, w, p_1, \ldots, p_n$. Подставим в него $w = z = 1$. Получим многочлен $Q(p_1, \ldots, p_n)$ от n вещественных переменных, равный нулю на многограннике $\{p_i \geqslant 0, \sum_i p_i a_i \geqslant 0\}$ на гиперплоскости $\sum_i p_i = 1$, так как в этом случае $f_\xi(1) = 1$ (см. раздел 1.2). Отсюда следует, что внутри ортогональной проекции данного многогранника на гиперплоскость $p_1 = 0$ все производные многочлена $n-1$ переменной, полученного подстановкой $p_1 = 1 - p_2 - \ldots - p_n$ в Q, равны нулю. Поэтому он сам тождественно равен нулю, откуда $Q = 0$ на всей гиперплоскости $\sum_i p_i = 1$. Это и означает, что при любых возможных p_i точка $w = z = 1$ лежит на соответствующей кривой.

3) Из утверждения 2.2 следует, что произведение M на математическое ожидание величины ξ, имеющее смысл при $M > 0$ и равное в этом случае $f'_\xi(1)$, равно математическому ожиданию η_n в момент окончания игры. Последняя величина принимает значения от 1 до $max\{a_1, \ldots, a_n\}$, следовательно, на отрезке между этими значениями находится и ее математическое ожидание. Отсюда получаем оценку на угловой коэффициент касательной к графику функции $f_\xi(z)$ в точке $(1, f_\xi(1) = 1)$, равный значению производной функции в этой точке. Эта касательная является и одной из касательных к нашей кривой в данной точке. Случай $M = 0$ получается предельным переходом $M \to +0$ (как уже отмечалось выше, уравнение кривой полиномиально, а значит, непрерывно зависит от p_i). $\square$

Благодарности

Автор благодарен профессору Г.Г. Амосову за ценные советы и замечания при написании и оформлении данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1.* М.: Мир. 1964.
2. Дж.Фон Нейман, О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука. 1944.
3. T. Shelling. *The Strategy of Conflict.* Harvard University. 2005.
4. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Физическая кинетика.* М.: Наука. 1979.
5. А.Д. Вентцель. *Курс теории случайных процессов.* М.: Наука. 1996.
6. Б.В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей.* М.: Наука. 1988.
7. И.И. Гильман, А.В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов.* М.: Наука. 1977.

8. Н.П. Семерикова, А.А. Дубков, А.А. Харчева. *Ряды аналитических функций*. Нижний Новгород: ННГУ. 2016.
9. E. Montroll, G. Weiss. *Random Walks on Lattices* // J. Math. Phys. **6**:2 (1965).
10. S. Asmussen, H. Albrecher. *Ruin Probabilities*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2010.
11. A. Branquinho, A. Foulquie-Moreno, M. Manas, C. Alvarez-Fernandes, J.E. Fernandes-Dias. *Multiple Orthogonal Polynomials and Random Walks*. ArXiv: Math.CA. 2103.13715. 2021.
12. O. Busani, T. Seppalainen. *Bound of a Running Maximum of a Random Walk with Small Drift*. ArXiv: Math.PR. 2010.08767. 2020.
13. P. Mounaix, S.N. Majumdar, G. Schehr. *Statistic of the Number of Records for Random Walks and Levi Flights on a 1D Lattice* // J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 415003 (2020).
14. N.R. Beaton, A.L. Owczarek, A. Rechnitzer. *Exact Solution of some Quarter Plane Walks with Interacting Boundaries* // The Electronic Journal of Combinatorics. **26**:3, 38 pp. (2019).
15. A. Di Crescenzo, C. Macci, B. Martinucci, S. Spina. *Analysis of Random Walks on a Hexagonal Lattice* // IMA Journal of Applied Mathematics. **84**:6, 1061–1081 (2019).
16. Z. Kabluchko, V. Vysotsky, D. Zaporozhets. *A Multidimensional Analogue of the Arcsine Law for the Number of Positive Terms in a Random Walk* // Bernoulli. **25**:1, 521–548, (2019).
17. D. Hoef. *Distribution of the k-Multiple Point Range in the Closed Simple Random Walk* // Markov Process. Related Fields. **12**, 537–560, (2006).
18. K. Yamamoto. *Hypergeometric Solution to a Gambler's Ruin Problem with a Nonzero Halting Probability* // International Journal of Statistical Mechanics. 831390, 9 pp. (2013).
19. H. Wang. *On Total Progeny of Multitype Galton-Watson Process and the First Passage Time of Random Walk with Bounded Jumps* // Acta Mathematica Sinica, English Series. **30**:12, 2161–2172 (2014).
20. М. Рид. *Алгебраическая геометрия для всех*. Пер. с англ. Б. З. Шапиро. М.: Мир. 1991.

Станислав Владимирович Гришин
МФТИ, Лаборатория алгебраической геометрии и гомологической алгебры,
Институтский пер., 9,
141701, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: st.grishin98@yandex.ru