ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 17-22.

УДК 517.547.2

О НАИМЕНЬШЕМ ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ, О.В. ШЕРСТЮКОВА

Аннотация. Настоящая заметка написана по материалам доклада авторов на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». Обсуждается следующая задача. Пусть заданы нецелое число $\rho > 0$ и последовательность комплексных чисел Λ, имеющая конечную верхнюю ρ-плотность. Тогда, как известно из классической теоремы Линделефа, существует (отличная от тождественного нуля) целая функция f конечного типа при порядке ρ, для которой Λ является последовательностью (всех) нулей. Спрашивается, как сильно может измениться тип такой функции, если позволить ей помимо элементов из Λ иметь другие нули, причем произвольной кратности. Показаны возможности применения одной общей теоремы, доказанной по означенной задаче Б.Н. Хабибуллиным в 2009 году. С этой целью привлекаются результаты последнего времени, содержащие точные формулы для вычисления экстремального типа в классах целых функций с различными ограничениями на распределение нулей. Случай целого ρ обладает своей спецификой и в данной работе практически не рассматривается.

Ключевые слова: целая функция, последовательность нулей, подпоследовательность нулей, тип целой функции, экстремальная задача.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. Постановка задачи. Типичные результаты

Напомним некоторые специальные определения и факты. Используем стандартные характеристики роста целых функций (см., например, [1]). Пусть заданы последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности (среди точек λ_n могут быть и повторяющиеся), и число $\rho > 0$. Следуя [2], символом $\sigma(\Lambda, \rho)$ (соответственно $\sigma^*(\Lambda, \rho)$) обозначим точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, при которых Λ — *последовательность* (соответственно *подпоследовательность*) *всех нулей* для какой-либо отличной от тождественного нуля целой функции $f(\lambda)$, имеющей тип σ при порядке ρ. По определению считаем $\inf\emptyset = +\infty$, но в дальнейшем выбор порядка $\rho > 0$ и последовательности Λ производится так, чтобы данная вырожденная ситуация не реализовывалась.

В отправной для нас работе [2] (см., следствие 1 теоремы 1) показано, что

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \sigma(\Lambda, \rho) \leqslant (1 + I_\rho)\, \sigma^*(\Lambda, \rho), \tag{1.1}$$

где при целом ρ полагаем $I_\rho = +\infty$, а при нецелом ρ число I_ρ определено формулой

$$I_\rho \equiv \rho^2 \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\ln\Bigl(1 - 2t\cos\theta + t^2\Bigr) - \sum_{n=1}^{p} \frac{t^n}{n}\cos n\theta \right)^+ d\theta \right) \frac{dt}{t^{\rho+1}}. \tag{1.2}$$

G.G. Braichev, O.V. Sherstyukova, On the least type of an entire function with a given subsequence of zeros.

Поступила 4 апреля 2022 г.

Здесь приняты стандартные обозначения $p = [\rho]$ для целой части ρ и $a^+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \mathbb{R}$.

Оценка снизу в (1.1) очевидна и точна при любом значении $\rho > 0$ (см. [2, доказательство предложения 2]). Оценка сверху в (1.1) — ключевой результат, доказанный в [2] новым, нетрадиционным методом выметания, с использованием субгармонической техники. Весьма вероятно (но пока не доказано), что и эта оценка точна.

Сформулированный результат Б.Н. Хабибуллина допускает различные варианты конкретизации. Суть предлагаемого подхода коротко можно описать так. Экстремальное значение $\sigma(\Lambda, \rho)$ сильно зависит от индивидуальных свойств последовательности Λ, и адекватные термины для его точного вычисления в общей ситуации пока не найдены. Поэтому можно попытаться очертить промежуток локализации для $\sigma(\Lambda, \rho)$, если Λ попадает в некоторый класс последовательностей, описываемый естественными классическими характеристиками роста или сгущаемости. Оказывается, что при специальных геометрических и плотностных ограничениях на фиксированную последовательность Λ величина $\sigma(\Lambda, \rho)$, хотя и не может быть однозначно вычислена через заданные характеристики этой последовательности, но заключена в известных, точно выражаемых границах. Для многих ситуаций такие (неулучшаемые) границы найдены, в том числе — в серии работ последнего времени. Тем самым, возникает возможность в соответствующей части оценки (1.1) заменить величину экстремального типа $\sigma(\Lambda, \rho)$ подходящей минорантой (или мажорантой). Сосредоточим внимание на оценке сверху в (1.1) и поясним сказанное, выбирая последовательности Λ из различных естественных классов.

Здесь мы рассмотрим практически важный случай $\rho \in (0, 1)$, хотя обширная теоретическая база имеется и в случае $\rho > 1$. Считаем сейчас, что Λ — *положительная* последовательность конечной верхней ρ-плотности

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta > 0.$$

Тогда величина $\sigma(\Lambda, \rho)$, определенная выше, будет равна типу (при порядке ρ) конкретного канонического произведения

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

а коэффициент $1 + I_\rho$ из формулы (1.2) упрощается к виду (см. [2, теорема 1])

$$1 + I_\rho = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^\rho\, \Gamma(1 - \rho/2)} \equiv B(\rho), \tag{1.4}$$

где Γ — гамма-функция. Привлекая теперь точное неравенство из работы А.Ю. Попова [3]

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geqslant \beta \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho} \equiv \beta\, C(\rho), \qquad \rho \in (0, 1), \tag{1.5}$$

извлекаем из (1.1), (1.2), (1.4) следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть $\rho \in (0,\, 1)$ и $D(\rho) \equiv C(\rho)/B(\rho)$ с величинами $B(\rho)$, $C(\rho)$, определенными в соотношениях* (1.4), (1.5) *соответственно. Тогда справедлива оценка*

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, D(\rho),$$

действующая для любой последовательности положительных чисел Λ с фиксированным значением верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$.

Такой комбинированный результат является простейшим на указанном пути. Рассмотрим более сложную ситуацию, когда при фиксированном $\rho \in (0,\, 1)$ выбранная последовательность положительных чисел Λ имеет заданные верхнюю и нижнюю ρ-плотности

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta > 0, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \alpha \in [0,\, \beta]. \tag{1.6}$$

Тогда, как показано В.Б. Шерстюковым [4], справедливо точное неравенство

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, C(k,\, \rho),$$

где для компактности записи введено обозначение

$$C(k,\, \rho) \equiv \frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{ak^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\, x^{-\rho}}{x+1}\, dx, \qquad k = \alpha/\beta. \tag{1.7}$$

Отсюда по изложенной схеме выводим следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть $\rho \in (0,\, 1)$ и $D(k,\, \rho) \equiv C(k,\, \rho)/B(\rho)$ с величинами $B(\rho)$, $C(k,\, \rho)$, определенными в соотношениях* (1.4), (1.7) *соответственно. Тогда справедлива оценка*

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, D(k,\, \rho),$$

действующая при $k = \alpha/\beta$ для любой последовательности положительных чисел Λ с фиксированными значениями верхней и нижней ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha \in [0,\, \beta]$.

Завершим начатую серию утверждений наиболее общим фактом подобного рода. Для этого потребуется напомнить понятие ρ-шага положительной последовательности

$$h_\rho(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \left(\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho\right)$$

и учесть неравенство $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)\, h_\rho(\Lambda) \leqslant 1$.

Пусть, по-прежнему, $\rho \in (0,\, 1)$, и известны как плотностные характеристики (1.6) последовательности положительных чисел Λ, так и ее ρ-шаг $h_\rho(\Lambda) = h \in [0,\, 1/\beta]$. Сохраним обозначение $k = \alpha/\beta$ и дополнительно введем новые вспомогательные параметры

$$s = 1 - \beta h \in [0,\, 1], \qquad \nu = \frac{1 - \alpha h}{1 - \beta h} = \frac{1 - (1-s)k}{s} \in [1,\, +\infty]. \tag{1.8}$$

В данном случае, сочетая цитированный результат Б.Н. Хабибуллина с точной оценкой из работ О.В. Шерстюковой (см. [5], [6]), а именно,

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, C(k,\, s,\, \rho),$$

где

$$C(k,\, s,\, \rho) \equiv \frac{\pi\, k}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \left\{ \int\limits_{a\, k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\, x^{-\rho}}{x+1}\, dx + \frac{s}{1-s} \int\limits_{a}^{a\, \nu^{1/\rho}} \frac{\nu\, x^{-\rho} - a^{-\rho}}{x+1}\, dx \right\}, \tag{1.9}$$

приходим к такому утверждению.

Теорема 1.3. *Пусть $\rho \in (0,\, 1)$ и $D(k,\, s,\, \rho) \equiv C(k,\, s,\, \rho)/B(\rho)$ с величинами $B(\rho)$, $C(k,\, s,\, \rho)$, определенными в соотношениях* (1.4), (1.9) *соответственно. Тогда справедлива оценка*

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, D(k,\, s,\, \rho),$$

действующая для любой последовательности положительных чисел Λ с фиксированными значениями верхней и нижней ρ-плотностей $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha \in [0,\, \beta]$, *а также ρ-шага $h_\rho(\Lambda) = h \in [0,\, 1/\beta]$. Здесь $k = \alpha/\beta$, а параметры s и ν определяются по формуле* (1.8).

За дополнительными подробностями, связанными с интерпретацией величины (1.9) в «предельных» случаях $s = 0$ и $s = 1$, мы отсылаем к [6].

2. Дополнительные комментарии

Теоремы 1.1–1.3, очевидно, сохранят силу, если требование положительности Λ заменить более общим: Λ расположена на одном луче. Кроме того, результаты подобного характера можно получать как для $\rho > 1$, так и для других ситуаций локализации последовательности Λ (например — в угле), причем в терминах не только обычных, но и усредненных плотностей последовательности. Так, привлекая один из результатов работы [7], получим для $\rho \in (0,\, 1)$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ оценку

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geqslant \beta^*\, \rho\, e\, C(\rho).$$

Множитель $C(\rho)$ тот же, что и в (1.5), а β^* — значение усредненной верхней ρ-плотности последовательности Λ, т. е.

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r^\rho} \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt = \beta^*,$$

где $n_\Lambda(t)$ — считающая функция Λ (количество элементов λ_n, попавших в промежуток $(0,\, t]$).

Это открывает новые возможности по применению оценки (1.1), в том числе — к известной задаче о радиусе круга полноты системы экспонент с показателями, расположенными на заданном множестве. Теоретическая основа для подобных приложений заложена в большом цикле работ (см., например, [7]–[9]).

Напомним еще, что для любого целого $\rho > 0$ возможна ситуация, когда $\sigma(\Lambda, \rho) = +\infty$, но при этом величина $\sigma^*(\Lambda, \rho)$ конечна. Как указано в [2, § 2], последние соотношения выполнены для последовательности Λ положительных чисел $\lambda_n = \big(n/\Delta\big)^{1/\rho}$, где $n \in \mathbb{N}$, с произвольными параметрами $\Delta > 0$, $\rho \in \mathbb{N}$. В этом примере последовательность Λ *измерима*, т.е. имеет обычную ρ-плотность

$$\Delta_\rho(\Lambda) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \Delta,$$

а ее усредненная ρ-плотность, как несложно проверить, равна

$$\Delta_\rho^*(\Lambda) \equiv \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^\rho} \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt = \frac{\Delta_\rho(\Lambda)}{\rho} = \frac{\Delta}{\rho}.$$

С другой стороны, для любого нецелого $\rho > 0$ и измеримой (при данном показателе ρ) положительной последовательности Λ с ρ-плотностью Δ (усредненной ρ-плотностью Δ^*) справедливо равенство

$$\sigma(\Lambda, \rho) = \frac{\pi\Delta}{|\sin \pi\rho|} = \frac{\pi\rho\, \Delta^*}{|\sin \pi\rho|}.$$

Именно по такой формуле однозначно вычисляется тип канонического произведения (1.3) как функции вполне регулярного роста нецелого порядка ρ. Но даже в такой «правильной» ситуации мы не можем точно выразить через ρ-плотность Δ (усредненную ρ-плотность Δ^*) величину $\sigma^*(\Lambda, \rho)$, заключенную согласно (1.1), (1.2) в границах

$$\frac{\pi\rho\,\Delta^*}{(1+I_\rho)\,|\sin\pi\rho|} \equiv \frac{\pi\Delta}{(1+I_\rho)\,|\sin\pi\rho|} \leqslant \sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \frac{\pi\Delta}{|\sin\pi\rho|} \equiv \frac{\pi\rho\,\Delta^*}{|\sin\pi\rho|}.$$

При $\rho \in (0,\, 1)$ эти границы принимают вид

$$\frac{\pi\rho\,\Delta^*}{B(\rho)\,\sin\pi\rho} \equiv \frac{\pi\Delta}{B(\rho)\,\sin\pi\rho} \leqslant \sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} \equiv \frac{\pi\rho\,\Delta^*}{\sin\pi\rho}$$

с коэффициентом $B(\rho)$ из формулы (1.4).

Обсудим, наконец, коротко одну ситуацию, когда

$$\sigma(\Lambda, \rho) = \sigma^*(\Lambda, \rho), \tag{2.1}$$

т. е. когда левая часть (1.1) превращается в равенство. Для любого $\rho > 0$ соотношение (2.1) будет выполнено, если Λ есть последовательность нулей целой функции вполне регулярного роста при порядке ρ с постоянным индикатором (см. доказательство предложения 2 в работе [2]). Такая последовательность заведомо не может располагаться на одном луче. Однако, как показано недавно одним из авторов (работа готовится к печати), имеется общий подход к построению порождающей функции, нулевое множество которой образует последовательность Λ со свойством (2.1). Пусть целая функция

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

обладает измеримой (при показателе $\rho > 0$) последовательностью нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и логарифмически выпуклой последовательностью модулей тейлоровских коэффициентов $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, причем

$$\sqrt[n]{|f_n\,\lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Тогда f является функцией вполне регулярного роста при порядке ρ с индикатором, тождественно равным $\sigma(\Lambda, \rho)$, что и обеспечивает выполнение равенства (2.1). Подобные функции играют заметную роль в теории и приложениях (см. по этому поводу недавний обзор [8, раздел 2] и указанные там библиографические ссылки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.P. Boas. *Entire Functions.* Academic Press Inc., New York, 1954.
2. Б.Н. Хабибуллин. *Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции* // Матем. сб. **200**:2, 129–158 (2009).
3. А.Ю. Попов. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1, 31–36 (2005).
4. Г.Г. Брайчев, В.Б. Шерстюков. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. **75**:1, 3–28 (2011).
5. О.В. Шерстюкова. *Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага* // Уфимск. матем. журн. **4**:1, 161–165 (2012).
6. О.В. Шерстюкова. *Задача о наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с положительными нулями заданных плотностей и шага* // Уфимск. матем. журн. **7**:4, 146–154 (2015).
7. Г.Г. Брайчев. *Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // Матем. сб. **203**:7, 31–56 (2012).

8. Г.Г. Брайчев, В.Б. Шерстюков. *Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах* // Фундамент. и прикл. матем. **22**:1, 51–97 (2018).
9. G.G. Braichev, V.B. Sherstyukov. *On Indicator and Type of an Entire Function with Roots Lying on a Ray* // Lobachevskii Journal of Math. **43**:3, 1288–1298 (2022).

Георгий Генрихович Брайчев,
Московский педагогический государственный университет (МПГУ),
ул. Краснопрудная, 14,
107140, г. Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru

Ольга Владимировна Шерстюкова,
ГБОУ Школа № 1579,
Каширское шоссе, 55, корп. 7,
115211, г. Москва, Россия
E-mail: sherov73@mail.ru