ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 3-16.

УДК 517.5

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ОБЛАСТЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

Аннотация. В областях евклидова пространства для пробных функций сконструированы и доказаны несколько новых интегральных неравенств типа Гальярдо-Ниренберга с явными константами. Эти неравенства справедливы в любой области, они являются нелинейными, подынтегральные функции содержат степени от модулей градиента и лапласиана пробной функции u, а также множители вида $f(|u(x)|)$, $f'(|u(x)|)$, где f — непрерывно дифференцируемая, неубывающая функция, $f(0) = 0$. В качестве весовых функций используются степени расстояния от точки до границы области, а также степени переменного гиперболического (конформного) радиуса.

Как применения универсальных неравенств типа Гальярдо-Ниренберга мы получаем новые интегральные неравенства типа Реллиха в плоских областях с равномерно совершенными границами. Для этих L_p-неравенств типа Реллиха установлены критерии положительности констант, получены явные двусторонние оценки этих констант в зависимости от евклидова максимального модуля области и от параметра $p \geq 2$. В доказательствах используются несколько числовых характеристик для областей с равномерно совершенными границами.

Ключевые слова: неравенство типа Гальярдо-Ниренберга, расстояние до границы, гиперболический радиус, равномерно совершенное множество.

Mathematics Subject Classification: 26D10, 33C20

1. Введение

Интегральные неравенства типа Гальярдо-Ниренберга (см. [1], [2], а также [3] и [4]) играют важную роль в теории пространств Соболева и их приложениях. Они оказываются справедливыми в областях, удовлетворяющих тем или иным функционально-геометрическим требованиям.

Нашей целью является конструирование и доказательство новых интегральных неравенств типа Гальярдо-Ниренберга для пробных функций $u \in C_0^2(\Omega)$ в n-мерных областях Ω. Интегралы в этих неравенствах будут содержать модули самой функции, ее лапласиана и градиента. Наша основная цель состоит в поиске специальных случаев, когда неравенства являются универсальными в том смысле, что они верны для любой области гиперболического типа и не содержат неизвестных констант.

Отметим, что мы пользуемся некоторыми идеями из теории неравенств типа Харди и Реллиха. В этой тематике получен ряд интересных результатов, историю развития которых можно проследить в работах [4]–[14], и, кроме того, накоплен большой арсенал полезных классов областей, в которых справедливы соответствующие интегральные неравенства.

В частности, доказаны несколько неравенств типа Харди, справедливых во всех областях фиксированной размерности, без каких-либо существенных ограничений на границу области. Такие неравенства будем называть универсальными. В качестве примера приведем два результата.

Предположим, что

$$n \geq 2, \quad p \in [1, \infty), \quad s \in (n, \infty).$$

F.G. Avkhadiev, Universal inequalities on domains in Euclidean space and their applications.

Работа поддержана РНФ (грант 18-11-00115).

Поступила 6 февраля 2022 г.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область (т.е. непустое, открытое, связное множество), $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Тогда корректно определено расстояние $\rho(x, \partial\Omega)$ от точки $x \in \Omega$ до границы этой области и для всех функций

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u \in C_0^1(\Omega),$$

справедливо следующее универсальное неравенство

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p \, dx}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} \geq \frac{(s-n)^p}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p \, dx}{\rho^s(x, \partial\Omega)}, \tag{1.1}$$

доказанное нами в статье [6]. Отметим, что существенным является требование $s - n > 0$.

Второй пример относится к случаю областей на плоскости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область на комплексной плоскости. Предположим, что эта область имеет не менее трех граничных точек. Как хорошо известно (см., например, [15]), такая область называется областью гиперболического типа, в ней можно определить метрику Пуанкаре с коэффициентом $\lambda(z, \Omega)$ и с гауссовой кривизной, равной

$$\kappa = \frac{\Delta \ln \lambda^{-1}(z, \Omega)}{\lambda^2(z, \Omega)} = -4, \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Обозначим $R(z, \Omega) := 1/\lambda(z, \Omega)$. Известно, что

$$\lambda(., \Omega) \in C^\infty(\Omega), \quad R(z, \Omega) \geq \rho(z, \partial\Omega) := \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus \Omega} |z - w| \quad \forall z \in \Omega.$$

Как доказано нами в статье [8], в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа для всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C_0^1(\Omega)$, справедливо следующее универсальное неравенство:

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{\rho(z, \partial\Omega)} \, dxdy \geq 2 \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{R^2(z, \Omega)} \, dxdy. \tag{1.2}$$

Отметим, что частный случай неравенства (1.1) для случая, когда

$$n = 2, \quad p = 1, \quad s \in (2, \infty), \quad \Omega \subset \mathbb{C}, \quad \Omega \neq \mathbb{C},$$

можно записать в виде следующего неравенства

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{\rho^{s-1}(z, \partial\Omega)} \, dxdy \geq (s-2) \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{\rho^s(z, \partial\Omega)} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Полезно сравнить неравенства (1.2) и (1.3) с двумя близкими неравенствами

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{\rho(z, \partial\Omega)} \, dxdy \geq c_2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{1.4}$$

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{R(z, \Omega)} \, dxdy \geq c_2^*(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{R^2(z, \Omega)} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Предполагаем, что постоянная $c_2(\Omega) \in [0, \infty)$ в неравенстве (1.4) и постоянная $c_2^*(\Omega) \in [0, \infty)$ в неравенстве (1.5) выбраны максимальными из возможных.

Неравенства (1.4) и (1.5) не являются универсальными (см., например, [8]), так как существуют области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа, для которых $c_2(\Omega) = c_2^*(\Omega) = 0$, т.е. существуют области, для которых эти неравенства не являются содержательными. С другой стороны, известно, что $c_2(\Omega) > 0$ и $c_2^*(\Omega) > 0$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей.

При сравнении неравенств (1.2), (1.4) и (1.5) необходимо учитывать, что гиперболический радиус $R(z, \Omega)$ и расстояние $\rho(z, \partial\Omega)$ от точки до границы области являются близкими величинами. С необходимыми указаниями литературы числовые характеристики областей с равномерно совершенными границами будут описаны ниже в пункте 3.

2. Универсальные неравенства типа Гальярдо-Ниренберга

Символом $C_0^2(\Omega)$ обозначим стандартное семейство дважды непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, компактные носители которых лежат в области Ω.

Через $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta u(x)$ будем обозначать градиент этой функции и ее евклидов лапласиан, соответственно.

Для векторов $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ пользуемся евклидовой нормой

$$|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$$

и скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Для определенности, отметим, что $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ — дифференциальный элемент объема в n-мерных интегралах вида $\int_\Omega F(x)\, dx$, а также

$$|\nabla u(x)| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2}, \qquad \Delta u(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}.$$

Наряду с этими обозначениями, в двумерном случае мы пользуемся также комплексной переменной $z = x + iy$ и дифференциальным элементом площади $dxdy$ в двойных интегралах (см. выше формулы в неравенствах (1.2), (1.3) и (1.5)).

Справедлива следующая теорема об универсальных неравенствах типа Гальярдо-Ниренберга в произвольных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $n \geq 2$. Предположим, что $p \in (1, \infty)$, $q = p/(p-1)$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, $g : \Omega \to (0, \infty)$ — непрерывная функция, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: $f \in C^1([0, \infty))$, $f(0) = 0$, $f'(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, \infty)$.*

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливы следующие неравенства:

$$\int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega f(|u(x)|)\, |\Delta u(x)|\, dx, \tag{2.1}$$

$$\int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2\, dx \leq \left(\int_\Omega \frac{f^q(|u(x)|)}{g^q(x)}\, dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega g^p(x)|\Delta u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \tag{2.2}$$

и

$$\int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{q\varepsilon^{q/p}} \int_\Omega \frac{f^q(|u(x)|)}{g^{q/p}(x)} dx + \frac{\varepsilon}{p} \int_\Omega g(x)|\Delta u(x)|^p dx. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для вещественнозначных функций

$$u \in C_0^2(\Omega), \quad v \in C^1(\Omega)$$

по формуле Грина имеем

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\, dx + \int_\Omega (\nabla v(x), \nabla u(x))\, dx = 0. \tag{2.4}$$

Определим функцию $v : \Omega \to \mathbb{R}$ равенством

$$v(x) = f(|u(x)|)\, sign(u(x)), \quad x \in \Omega.$$

Легко видеть, что $v = f(|u|)\, sign(u) \in C(\Omega)$. С учетом условий

$$u \in C_0^2(\Omega), \quad f \in C^1([0, \infty)), \quad f(0) = 0,$$

получаем, что $v = f(|u|)\, sign(u) \in C^1(\Omega)$, так как

$$\nabla|u(x)| = \nabla u(x)\, sign(u(x)), \quad x \in \Omega,$$

и

$$\nabla v(x) = f'(|u(x)|)\nabla|u(x)|\, sign(u(x)) = f'(|u(x)|)\nabla u(x), \quad x \in \Omega.$$

Но тогда

$$\int_\Omega (\nabla v(x), \nabla u(x))\, dx = \int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2\, dx$$

и из формулы Грина (2.4) следует равенство

$$\int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega f(|u(x)|)\,sign(u(x))\Delta u(x)\,dx = 0, \tag{2.5}$$

справедливое для всех функций $u \in C_0^2(\Omega)$.

В силу условий теоремы имеем: $f(t) \ge 0$ и $f'(t) \ge 0$ для всех $t \in [0,\infty)$. Поэтому тождество (2.5) влечет неравенство (2.1), справедливое для всех функций $u \in C_0^2(\Omega)$. Поскольку $g(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, то неравенство (2.1) можем записать в следующей форме:

$$\int_\Omega f'(|u(x)|)|\nabla u(x)|^2\,dx \le \int_\Omega \frac{f(|u(x)|)}{g(x)}\;\frac{|\Delta u(x)|}{(g(x))^{-1}}\,dx. \tag{2.6}$$

Оценивая сверху интеграл в правой части (2.6) с применением неравенства Гельдера, получаем неравенство (2.2).

Подынтегральную функцию интеграла в правой части (2.1) можно представить в виде

$$f(|u(x)|)\,|\Delta u(x)| = a^{p-1}b,$$

где

$$a^{p-1} = \frac{f(|u(x)|)}{\varepsilon^{1/p}\,g^{1/p}(x)}, \quad b = \varepsilon^{1/p}\,g^{1/p}(x)\,|\Delta u(x)|.$$

Имеем

$$\frac{1}{p-1} = \frac{q}{p}, \qquad \left(1-\frac{1}{p}\right)a^p = \frac{1}{q\,\varepsilon^{q/p}}\frac{f^q(|u(x)|)}{g^{q/p}(x)}, \qquad \frac{b^p}{p} = \frac{\varepsilon}{p}\,g(x)|\Delta u(x)|^p.$$

Для того, чтобы получить неравенство (2.3), достаточно оценить сверху подынтегральную функцию интеграла в правой части (2.1) с применением неравенства Юнга

$$a^{p-1}b \le \left(1-\frac{1}{p}\right)a^p + \frac{b^p}{p}$$

с учетом приведенных выше формул для $(1-1/p)\,a^p$ и b^p/p. Этим завершается доказательство теоремы 2.1. □

Отметим, что для случая $n = 2$, $f(t) = t^s$, $s \ge 1$, неравенство (2.1) и тождество (2.5) были обоснованы нами ранее в статье [9].

Полагая $f(t) = \operatorname{arctg} t$ и $f(t) = t/(1+t)$ в (2.1) и учитывая простые неравенства $\operatorname{arctg} t \le \pi/2$, $t/(1+t) \le 1$ для $t \in [0,\infty)$, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Предположим, что $n \ge 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{1+u^2(x)}\,dx \le \frac{\pi}{2}\int_\Omega |\Delta u(x)|\,dx$$

и

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{(1+|u(x)|)^2}\,dx \le \int_\Omega |\Delta u(x)|\,dx.$$

Далее нам потребуются функция расстояния

$$\rho(x,\partial\Omega) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) := \inf_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|x-y|, \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, такая, что $\Omega \ne \mathbb{R}^n$. Функция расстояния $\rho(.,\partial\Omega)$ достаточно хорошо изучена (см., например, [7], [16]–[19]). В частности, для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \ne \mathbb{R}^n$, функция расстояния удовлетворяет следующему условию Липшица

$$|\rho(x,\partial\Omega) - \rho(y,\partial\Omega)| \le |x-y|, \quad \forall x,y \in \Omega.$$

Следовательно, по теореме Радемахера [16] эта функция является дифференцируемой почти всюду в области Ω. Отметим (см., например, [7], гл. 2), что $|\nabla\rho(x,\partial\Omega)| = 1$ почти всюду в Ω.

Функция расстояния $\rho(x,\partial\Omega)$ и ее свойства часто используются при формировании классов областей, в которых справедливы те или иные теоремы вложения в различных пространствах Соболева (см. например, работы [3], [4], [7], [20]).

Следствие 2.2. *Предположим, что $\rho(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ до границы области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [2,\infty)$, $q = p/(p-1)$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,\infty)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int_\Omega |u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2\,dx \leq \frac{q}{p}\left(\int_\Omega \frac{|u(x)|^p\,dx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}\right)^{1/q}\left(\int_\Omega \frac{|\Delta u(x)|^p\,dx}{\rho^{s(1-p)}(x,\partial\Omega)}\right)^{1/p} \tag{2.7}$$

и

$$\int_\Omega |u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{p\varepsilon^{q/p}}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p\,dx}{\rho^s(x,\partial\Omega)} + \frac{q\varepsilon}{p^2}\int_\Omega \frac{|\Delta u(x)|^p dx}{\rho^{-sp/q}(x,\partial\Omega)}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Неравенство (2.2) влечет (2.7) в случае, когда

$$f(t) = t^{p-1}, \quad g(x) = \rho^{s/q}(x,\partial\Omega).$$

Неравенство (2.8) соответствует (2.3) для $f(t) = t^{p-1}$, $\quad g(x) = \rho^{sp/q}(x,\partial\Omega)$. □

Следствие 2.3. *Предположим, что $\rho(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ до границы области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\varepsilon \in (0,\infty)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |u(x)|^n|\nabla u(x)|^2 dx \leq A\int_\Omega \rho(x,\partial\Omega)|\nabla u(x)|^{n+2}\,dx + B\int_\Omega \rho^{(n-1)^2}(x,\partial\Omega)|\Delta u(x)|^{n+2}dx, \tag{2.9}$$

где

$$A = \frac{(n+2)^{n+1}}{\varepsilon^{1/(n+1)}}, \quad B = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)}.$$

Доказательство. Полагая $s = n+1$, $p = n+2$ в неравенстве (1.1), получаем

$$\int_\Omega \rho(x,\partial\Omega)|\nabla u(x)|^{n+2}\,dx \geq \frac{1}{(n+2)^{n+2}}\int_\Omega \frac{|u(x)|^{n+2}\,dx}{\rho^{n+1}(x,\partial\Omega)}.$$

Это неравенство и неравенство (2.8) при $s = n+1$, $p = n+2$ влекут (2.9). □

В двумерном случае на основании теоремы 2.1 можно получить новые конформно инвариантные интегральные неравенства в областях гиперболического типа. Напомним, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является областью гиперболического типа тогда и только тогда, когда она имеет не менее трех граничных точек.

Будем пользоваться комплексной переменной $z = x + iy$ и символом $\mathbb{C}$ для обозначения плоскости переменной z. Как известно, в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа определена метрика Пуанкаре с коэффициентом $\lambda(z,\Omega)$ с гауссовой кривизной, равной $\kappa = -4$. Нам потребуется гиперболический (конформный) радиус, определяемый формулой

$$R(z,\Omega) = \frac{1}{\lambda(z,\Omega)}, \quad z = x+iy \in \Omega \subset \mathbb{C}.$$

Известно, что $R(.,\Omega) \in C^\infty(\Omega)$, $R(z,\Omega) \geq \rho(z,\partial\Omega)$ в любой точке $z \in \Omega$ (см., например, [21]).

Следствие 2.4. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ является областью гиперболического типа, $R(z,\Omega)$ — гиперболический радиус этой области в точке $z \in \Omega$, $p \in [2,\infty)$, $q = p/(p-1)$, $\varepsilon \in (0,\infty)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливы конформно инвариантные неравенства:*

$$\iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy \leq \frac{q}{p}\left(\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1/q}\left(\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)}\right)^{1/p} \tag{2.10}$$

и

$$\iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2 dxdy \leq \frac{1}{p\varepsilon^{q/p}}\int_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{q\varepsilon}{p^2}\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Неравенство (2.10) вытекает из неравенства (2.2) в случае, когда

$$f(t) = t^{p-1}, \quad g(z) = R^{2/q}(z,\Omega).$$

Неравенство (2.11) равносильно (2.3) при $f(t) = t^{p-1}$, $\quad g(z) = R^{2p/q}(z,\Omega)$. □

Следствие 2.5. *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *является односвязной или двусвязной областью гиперболического типа,* $R(z,\Omega)$ *— гиперболический радиус этой области в точке* $z \in \Omega$, $p \in [2,\infty)$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^2(\Omega)$ *справедливы следующие конформно инвариантные неравенства:*

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)} \geq \frac{4^p(p-1)^p}{p^{2p}} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)} \tag{2.12}$$

и

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)} \geq \frac{4^{p-1}(p-1)^p}{p^{2(p-1)}} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2 dxdy. \tag{2.13}$$

Доказательство. Необходимо указать, что при $p = 2$ неравенство (2.12) было обосновано нами в статье [9].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная или двусвязная область гиперболического типа. Тогда, как известно (см., например, [5], [8], [9]), справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2\,dxdy \geq \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2\,dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Если $p > 2$, то нетрудно убедиться в том, что $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$. Поэтому мы можем заменить $u(z)$ функцией $|u(z)|^{p/2}$ в неравенстве (2.14). В результате будем иметь неравенство

$$\frac{p^2}{4} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy \geq \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Из (2.10), (2.14) и (2.15) следует, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leq \left(\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1-1/p} \left(\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Очевидно, это неравенство влечет (2.12).

Далее, с применением неравенств (2.10), (2.14) и (2.15) получаем, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$(p-1) \iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2 dxdy \leq \left(\frac{p^2}{4} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2 dxdy\right)^{1-1/p} \left(\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p dxdy}{R^{2-2p}(z,\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Это неравенство влечет (2.13), что и требовалось доказать. □

Пример 2.1. *Пусть* $D' = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *— круг с выколотым центром. Хорошо известно, что* $R(z,D') = 2|z|\ln(1/|z|)$ *для этой двусвязной области. В силу неравенств (2.12) и (2.13) для любого* $p \in [2,\infty)$ *и любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^2(D')$ *будем иметь следующие неравенства:*

$$\iint_{0<|z|<1} \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{|z|^{2-2p}\ln^{2-2p}(1/|z|)} \geq \frac{(p-1)^p}{p^{2p}} \iint_{0<|z|<1} \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{|z|^2\ln^2(1/|z|)}$$

и

$$\iint_{0<|z|<1} \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{|z|^{2-2p}\ln^{2-2p}(1/|z|)} \geq \frac{(p-1)^p}{p^{2(p-1)}} \iint_{0<|z|<1} |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2 dxdy.$$

3. Неравенства в областях с равномерно совершенными границами

В геометрической теории функций имеется около 15 различных определений и критериев равномерной совершенности множеств. Поэтому необходимо привести те определения и характеристики, которыми мы пользуемся. Нас будут интересовать три числовых характеристики областей с равномерно совершенными границами. А именно, нам потребуются известные определения максимальных модулей $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$ для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, а также величины

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z\in\Omega} \frac{\rho(z,\partial\Omega)}{R(z,\Omega)}$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

Символом $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначим расширенную комплексную плоскость, т.е. риманову сферу. Рассмотрим область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее двух точек.

Как известно, если $\Omega_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ является двусвязной областью, то она может быть конформно и однолистно отображена на некоторое концентрическое кольцо вида

$$A(\Omega_2) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}, \quad 0 \leq a < b \leq \infty.$$

Напомним, что для такой двусвязной области Ω_2 конформный модуль определяется равенством

$$M(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \in (0, \infty]$$

с естественным соглашением о том, что $M(\Omega_2) = \infty$ в случае, когда $a = 0$ или $b = \infty$.

Приведем определение конформного максимального модуля $M(\Omega)$ для области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Определение 3.1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ является областью, граница которой содержит не менее двух точек. Конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ определяется следующим образом.*

1) Если Ω является односвязной областью, то полагаем $M(\Omega) = 0$.

2) Если Ω — двусвязная область, то $M(\Omega)$ равен конформному модулю этой двусвязной области, т.е.

$$M(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \in (0, \infty],$$

в предположении, что область Ω является конформно эквивалентной концентрическому кольцу $\{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}, \quad 0 \leq a < b \leq \infty$.

3) Если область Ω является многосвязной, то полагаем

$$M(\Omega) := \sup_{\Omega_2} M(\Omega_2),$$

где точная верхняя граница берется по всем двусвязным областям Ω_2, таким, что $\Omega_2 \subset \Omega$ и Ω_2 разделяет границу области Ω, т.е. множество $\overline{\Omega} \setminus \Omega_2$ не является связным.

В статье А.Ф. Бирдона и Х. Поммеренке [22] доказано, что

$$M(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow \alpha(\Omega) > 0 \tag{3.1}$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

Нетрудно видеть, что конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ является конформно инвариантной характеристикой области. Вычисления или оценки $M(\Omega)$ представляют собой трудную задачу. С точки зрения оценок является значительно простой величина $M_0(\Omega)$, которую мы называем евклидовым максимальным модулем.

Для определения евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ нам потребуется множество $\mathbb{A}nn(\Omega)$ концентрических колец

$$A = A(z_0; a, b) := \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\},$$

обладающих следующими свойствами:

1) кольцо $A(z_0; a, b)$ лежит в области Ω, причем $0 < a < b < \infty$;

2) центры колец z_0 лежат на границе области, т.е. на множестве $\partial\Omega$;

3) кольцо $A(z_0; a, b)$ разделяет границу области Ω, т.е. каждая из двух областей

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < a\}, \quad \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_0| > b\}$$

содержит хотя бы одну граничную точку области Ω.

Очевидно, множество $\mathbb{A}nn(\Omega)$ может быть и пустым множеством.

Определение 3.2. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ является областью, граница которой содержит не менее двух точек. Пусть $\mathbb{A}nn(\Omega)$ означает введенное выше множество колец. Евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ определяется следующим образом.*

1) Если $\mathbb{A}nn(\Omega) = \emptyset$, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$.

2) Если $\mathbb{A}nn(\Omega)$ не является пустым множеством, то полагаем

$$M_0(\Omega) := \sup_{A \in \mathbb{A}nn(\Omega)} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (A = A(z_0; a, b)).$$

Определение $M_0(\Omega)$ не связано с конформными отображениями, и можно показать, что евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ не является конформно инвариантной величиной в общем случае.

Из приведенных определений легко следует, что $0 \le M_0(\Omega) \le M(\Omega)$. Л. Карлесон и Т.У. Гамелин [23] указали следующее замечательное свойство максимальных модулей $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$:

$$M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow M(\Omega) < \infty. \tag{3.2}$$

Если $M_0(\Omega) < \infty$, то следуя Х. Поммеренке [24] мы будем говорить, что граница области Ω является равномерно совершенным множеством. В силу (3.2) условие $M_0(\Omega) < \infty$ можно заменить равносильным условием $M(\Omega) < \infty$.

Отметим, что эквивалентность (3.2) уточнялась в ряде работ. В частности, в книге автора и К.-Й. Вирца [21] доказано, что

$$M_0(\Omega) \le M(\Omega) \le M_0(\Omega) + \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее двух точек.

В недавней статье [25] А. Голберга, Т. Сугавы и М. Вуоринена можно найти обобщение неравенств (3.3) на многомерный случай, а также ряд других определений равномерно совершенных множеств. Если $\infty \in \Omega$, то справедлив следующий аналог неравенства (3.3):

$$M_0(\Omega) \le M(\Omega) \le 2M_0(\Omega) + 1, \quad \infty \in \Omega,$$

для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее двух точек (см. [8]).

Пусть $p \in [2, \infty)$. В области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \ne \mathbb{C}$, для функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ рассмотрим следующее неравенство типа Реллиха

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)} \ge C_p^*(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^2(\Omega), \tag{3.4}$$

где $\rho(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z = x + iy \in \Omega$ до границы этой области, постоянная $C_p^*(\Omega)$ определена как наибольшая постоянная, возможная на этом месте, т.е.

$$C_p^*(\Omega) := \inf_{u \in C_0^2(\Omega), u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega \rho^{2p-2}(z, \partial\Omega) \, |\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\iint_\Omega \rho^{-2}(z, \partial\Omega) |u(z)|^p \, dxdy} \in [0, \infty).$$

В следующей теореме представим явные оценки снизу для постоянной $C_p^*(\Omega)$ в областях $\Omega \subset \mathbb{C}$, имеющих равномерно совершенные границы.

Теорема 3.1. *Предположим, что $p \in [2, \infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область. Тогда справедливы следующие утверждения:*

если Ω — односвязная область с равномерно совершенной границей, то

$$C_p^*(\Omega) \ge \frac{(p-1)^p}{4^p p^{2p}}; \tag{3.5}$$

если Ω — двусвязная область с равномерно совершенной границей, то

$$C_p^*(\Omega) \ge \frac{(p-1)^p}{p^{2p} \left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\,\right)^{2p}}; \tag{3.6}$$

если Ω — произвольная область с равномерно совершенной границей, то

$$C_p^*(\Omega) \ge \frac{(p-1)^p}{4^p p^{2p} \left(\pi M_0(\Omega) + c_0\right)^{4p}}, \tag{3.7}$$

где

$$c_0 = \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} < 3 + \sqrt{2},$$

Γ — гамма функция Эйлера.

Доказательство. Для области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, при $n = 2$, $q = p/(p-1)$ и $s = 2$ из неравенства (2.7) следует, что

$$\iint_\Omega |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \leq \frac{q}{p} \left(\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \right)^{1/q} \left(\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)} \right)^{1/p} \forall u \in C_0^2(\Omega). \quad (3.8)$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная область с равномерно совершенной границей. Тогда, как доказал А. Анкона [5], справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \frac{1}{16} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2 \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (3.9)$$

Если $p > 2$, то $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$. Заменяя $u(z)$ функцией $|u(z)|^{p/2}$ в неравенстве (3.9), получаем

$$\frac{p^2}{4} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \frac{1}{16} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Из неравенств (3.8), (3.9) и (3.10) следует, что

$$\frac{p-1}{4p^2} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leq \left(\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \right)^{1/q} \left(\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)} \right)^{1/p} \quad \forall u \in C_0^2(\Omega).$$

Поэтому для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, справедливо неравенство

$$\frac{(p-1)^p}{4^p p^{2p}} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leq \iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)}.$$

Отсюда следует неравенство (3.5) в силу определения постоянной $C_p^*(\Omega)$ как максимальной из возможных в неравенстве (3.4).

Докажем (3.6). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — двусвязная область с равномерно совершенной границей. Как доказано нами в [10], в этом случае справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \frac{1}{4\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^2} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2 \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Как и в предыдущем случае, получаем, что для любого $p \in [2, \infty)$

$$\frac{p^2}{4} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \frac{1}{4\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^2} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Комбинируя (3.8) и (3.11), получаем, что для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, справедливо неравенство

$$\frac{(p-1)^p}{p^{2p}\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^{2p}} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leq \iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)}.$$

Это неравенство влечет (3.6) в силу определения постоянной $C_p^*(\Omega)$.

Остается доказать неравенство (3.7). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — произвольная область с равномерно совершенной границей. Как доказано нами (см. [6] и [8]), в этом случае справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \alpha^4(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2 \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Следовательно, для любого $p \in [2, \infty)$

$$\frac{p^2}{4} \iint_\Omega |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \geq \alpha^4(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (3.12)$$

Далее нам потребуется уточненная оценка А.Ф. Бирдона и Х. Поммеренке (см. [22] и [21]):

$$\alpha(\Omega) \geq \frac{1}{2\pi M_0(\Omega) + 2c_0}. \quad (3.13)$$

Комбинируя (3.8), (3.12) и (3.13), получаем, что для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, справедливо неравенство

$$\frac{(p-1)^p}{4^p p^{2p}\,(\pi M_0(\Omega)+c_0)^{4p}} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)} \le \iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{\rho^{2-2p}(z,\partial\Omega)}.$$

Отсюда и следует неравенство (3.7). Этим завершается доказательство теоремы. □

Очевидно, конформный максимальный модуль $M(\Omega)=0$ тогда и только тогда, когда Ω является односвязной областью, конформно эквивалентной единичному кругу.

Следующий пример из нашей статьи [13] показывает, что евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ может быть равным нулю и для многосвязных областей.

Пример 3.1. *Пусть $\mathbb{K}$ — классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0,1]$, и пусть*

$$\Omega_0 := \{x+iy\in\mathbb{C} : |x|<\infty, |y|<1\}.$$

Рассмотрим следующую многосвязную область

$$\Omega(\mathbb{K}) = \Omega_0 \setminus \{x+iy\in\mathbb{C} : x\in\mathbb{K}, |y|\le 3/4\}.$$

Тогда $M_0(\Omega(\mathbb{K}))=0$, так как $\mathbb{A}nn(\Omega(\mathbb{K}))=\emptyset$.

Нетрудно видеть, что имеется широкое семейство областей $\Omega\subset\mathbb{C}$, обладающих свойством $M_0(\Omega)=0$. Поэтому неравенство (3.4), соответствующее этому важному случаю, выделим в качестве следствия.

Следствие 3.1. *Предположим, что $p\in[2,\infty)$ и $\Omega\subset\mathbb{C}$ — область с равномерно совершенной границей. Если евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)=0$, то для любой вещественнозначной функции $u\in C_0^2(\Omega)$*

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{\rho^{2-2p}(z,\partial\Omega)} \ge \frac{4^{3p}\pi^{8p}(p-1)^p}{p^{2p}\Gamma^{16p}(1/4)} \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p\,dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)},$$

где Γ — гамма функция Эйлера.

4. Критерии положительности $C_p^*(\Omega)$ и $C_p^{**}(\Omega)$ с любым $p\in[2,\infty)$

В статье [26] нами доказан критерий положительности $C_2^*(\Omega)$. В следующей теореме мы распространяем этот критерий на константу $C_p^*(\Omega)$ с любым $p\ge 2$.

Теорема 4.1. *Предположим, что $p\in[2,\infty)$ и $\Omega\subset\mathbb{C}$ — область, $\Omega\ne\mathbb{C}$. Тогда*

$$M_0(\Omega)<\infty \Longleftrightarrow C_p^*(\Omega)>0,$$

т.е. постоянная $C_p^*(\Omega)$ — положительное число тогда и только тогда, когда граница области $\Omega\subset\mathbb{C}$ является равномерно совершенным множеством.

Доказательство. Как следствие теоремы 3.1 получаем положительность $C_2^*(\Omega)$ для области с равномерно совершенной границей. Поэтому нам достаточно доказать лишь обратную импликацию, т.е. доказать, что

$$C_p^*(\Omega)>0 \Longrightarrow M_0(\Omega)<\infty.$$

Пусть $C_p^*(\Omega)>0$. Обозначим

$$\sigma_p^* := \frac{\int_0^\pi |v_0(t)|^p\,dt}{\int_0^\pi |v_0''(t)|^p\,dt},$$

где $v_0:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ — фиксированная функция $v_0\in C_0^2(0,\pi)$, такая, что $\sigma_p^*\in(0,\infty)$. Докажем, что

$$M_0(\Omega)\le m := \frac{1}{2(\sigma_p^*\,C_p^*(\Omega))^{1/(2p)}}.$$

Предположим обратное, т.е. предположим, что $M_0(\Omega)\in(m,\infty]$. Тогда в силу определения евклидова максимального модуля существует кольцо

$$A_0=\{z\in\mathbb{C} : a<|z-z_0|<b\}\subset\Omega,$$

такое, что $z_0 \in \partial\Omega$, $0 < a < b < \infty$ и

$$m < M(A_0) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} < M_0(\Omega). \tag{4.1}$$

Так как $z_0 \in \partial\Omega$, то $\rho(z, \partial\Omega) \le |z - z_0|$ для любой точки $z \in \Omega$. Поэтому из (3.4) следует, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(A_0)$ справедливо неравенство

$$\iint_{A_0} |z - z_0|^{2p-2} |\Delta u(z)|^p \, dxdy \ge C_p^*(\Omega) \iint_{A_0} \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{|z - z_0|^2}. \tag{4.2}$$

Введем полярные координаты с центром в точке $z_0 \in \partial\Omega$ и перейдем в интегралах неравенства (4.2) к этим полярным координатам. Одновременно сузим семейство рассматриваемых функций, а именно, будем рассматривать лишь радиальные функции, определяемые равенствами

$$u(z) = u_h(z) \equiv u_h(z_0 + |z - z_0|) =: h(r), \quad r = |z - z_0| \in (a, b),$$

где $h \in C_0^2(a, b)$, следовательно, $u_h \in C_0^2(A_0)$.

Простые вычисления показывают, что

$$\Delta u_h(z) = \Delta h(r) = h''(r) + h'(r)/r$$

и неравенство (4.2) для функций $u = u_h \in C_0^2(A_0)$ равносильно следующему соотношению

$$\int_a^b |rh''(r) + h'(r)|^p \, r^{p-1} \, dr \ge C_p^*(\Omega) \int_a^b \frac{|h(r)|^p}{r} dr \quad \forall h \in C_0^2(a, b). \tag{4.3}$$

Преобразуем интегралы в этом неравенстве с помощью новой замены переменных. А именно, введем функции $v \in C_0^2(0, \pi)$, определяемые равенствами $v(t) = h(r)$, где

$$r = b \, e^{-2M(A_0)\, t}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Непосредственные вычисления приводят к неравенству

$$\frac{1}{2^{2p} M^{2p}(A_0)} \int_0^\pi |v''(t)|^p \, dt \ge C_p^*(\Omega) \int_0^\pi |v(t)|^p dt \quad \forall v \in C_0^2(0, \pi),$$

равносильному (4.3). Следовательно, имеем неравенство

$$\frac{1}{2^{2p} M^{2p}(A_0)} \ge \sigma_p^* \, C_p^*(\Omega),$$

поэтому

$$M(A_0) \le \frac{1}{2\,(\sigma_p^* \, C_p^*(\Omega))^{1/(2p)}} = m,$$

где число m удовлетворяет неравенствам (4.1).

Получили противоречие.

Этим и завершается доказательство теоремы 4.1. □

Пример 4.1. *Пусть $D' = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ — круг с выколотым центром. Легко видеть, что $M_0(D') = \infty$. Тогда $C_p^*(D') = 0$ по теореме 4.1. Это означает, что для любого $p \in [2, \infty)$ и любого числа $\varepsilon \in (0, \infty)$ существует вещественнозначная функция $u \in C_0^2(D')$, для которой имеет место неравенство*

$$\iint_{0<|z|<1} \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{(\min\{|z|, 1 - |z|\})^{2-2p}} < \varepsilon \iint_{0<|z|<1} \frac{|u(z)|^p \, dxdy}{(\min\{|z|, 1 - |z|\})^2}.$$

Введем еще одну характеристику области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а именно, определим постоянную $C_p^{**}(\Omega)$, родственную к постоянной $C_p^*(\Omega)$.

Пусть снова $p \in [2, \infty)$. В области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \ne \mathbb{C}$, для вещественнозначных функций $u \in C_0^2(\Omega)$ рассмотрим следующий аналог неравенства (3.4):

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p \, dxdy}{\rho^{2-2p}(z, \partial\Omega)} \ge C_p^{**}(\Omega) \iint_\Omega |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega), \tag{4.4}$$

где постоянная $C_p^{**}(\Omega)$ определена как наибольшая постоянная, возможная на этом месте, т.е.

$$C_p^{**}(\Omega) := \inf_{u\in C_0^2(\Omega), u\not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega \rho^{2p-2}(z,\partial\Omega)\,|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{\iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy} \in [0,\infty).$$

Теорема 4.2. *Предположим, что $p\in[2,\infty)$ и $\Omega\subset\mathbb{C}$ — область, $\Omega\neq\mathbb{C}$. Тогда*

$$M_0(\Omega)<\infty \Longleftrightarrow C_p^{**}(\Omega)>0,$$

т.е. постоянная $C_p^{**}(\Omega)$ — положительное число тогда и только тогда, когда граница области $\Omega\subset\mathbb{C}$ является равномерно совершенным множеством.

В частности, справедливы неравенства

$$C_p^{**}(\Omega)\geq (p-1)(C_p^*(\Omega))^{1-1/p}>0 \tag{4.5}$$

в любой области $\Omega\subset\mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей.

Доказательство. Пусть $p\in[2,\infty)$, и пусть $M_0(\Omega)<\infty$. Тогда $C_p^*(\Omega)>0$ по теореме 3.1. В силу (3.4) и (3.8) для $q=p/(p-1)$, имеем

$$\iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy \leq \frac{q}{p}\left(\frac{1}{C_p^*(\Omega)}\right)^{1/q}\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{\rho^{2-2p}(z,\partial\Omega)} \quad \forall u\in C_0^2(\Omega).$$

Поэтому

$$(p-1)(C_p^*(\Omega))^{1-1/p}\iint_\Omega |u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy \leq \iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p\,dxdy}{\rho^{2-2p}(z,\partial\Omega)} \quad \forall u\in C_0^2(\Omega),$$

что влечет оценку (4.5) с учетом определения постоянной $C_p^{**}(\Omega)$ как максимальной постоянной в неравенстве (4.4). Таким образом, постоянная $C_p^{**}(\Omega)$ является положительным числом для любой области $\Omega\subset\mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей.

Итак, нам остается доказать лишь обратную импликацию

$$C_p^{**}(\Omega)>0 \Longrightarrow M_0(\Omega)<\infty.$$

Докажем этот факт, пользуясь той же схемой, которая была использована в доказательстве предыдущей теоремы.

Пусть $C_p^{**}(\Omega)>0$. Обозначим

$$\sigma_p^{**} := \frac{\int_0^\pi |v_0(t)|^{p-2}|v_0'(t)|^2\,dt}{\int_0^\pi |v_0''(t)|^p\,dt},$$

где $v_0:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ — фиксированная функция $v_0\in C_0^2(0,\pi)$, такая, что $\sigma_p^{**}\in(0,\infty)$. Докажем от противного неравенство

$$M_0(\Omega)\leq m_1 := \frac{1}{2\,(\sigma_p^{**}\,C_p^{**}(\Omega))^{1/(2p-2)}}.$$

Предположим, что $M_0(\Omega)\in(m_1,\infty]$. В силу определения евклидова максимального модуля существует кольцо

$$A_0=\{z\in\mathbb{C}: a<|z-z_0|<b\}\subset\Omega,$$

обладающее свойствами: точка $z_0\in\partial\Omega$, справедливы неравенства $0<a<b<\infty$ и

$$m_1<M(A_0):=\frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{b}{a}<M_0(\Omega). \tag{4.6}$$

Поскольку точка $z_0\in\partial\Omega$, то имеет место неравенство $\rho(z,\partial\Omega)\leq|z-z_0|$ для любой точки $z\in\Omega$. Поэтому из неравенства (4.4) вытекает, что для любой вещественнозначной функции $u\in C_0^2(A_0)$ справедливо неравенство

$$\iint_{A_0}|z-z_0|^{2p-2}|\Delta u(z)|^p\,dxdy \geq C_p^{**}(\Omega)\iint_{A_0}|u(z)|^{p-2}|\nabla u(z)|^2\,dxdy. \tag{4.7}$$

Далее мы упростим это неравенство дважды.

Во-первых, перейдем в интегралах неравенства (4.7) к полярным координатам с центром в точке $z_0 \in \partial\Omega$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы сузим семейство рассматриваемых функций. Снова будем рассматривать лишь радиальные функции, определяемые формулами

$$u(z) = u_h(z) \equiv u_h(z_0 + |z - z_0|) =: h(r), \quad r = |z - z_0| \in (a, b),$$

где $h \in C_0^2(a, b)$, поэтому $u_h \in C_0^2(A_0)$.

Поскольку $\nabla u_h(z) = \nabla h(r) = h'(r)$ и $\Delta u_h(z) = \Delta h = h''(r) + h'(r)/r$, то неравенство (4.7) для функций $u = u_h \in C_0^2(A_0)$ приобретает форму

$$\int_a^b |rh''(r) + h'(r)|^p\, r^{p-1}\, dr \geq C_p^{**}(\Omega) \int_a^b |h(r)|^{p-2}|h'(r)|^2 r\, dr \quad \forall h \in C_0^2(a, b). \tag{4.8}$$

Снова упростим это неравенство, преобразуя интегралы с помощью новой замены переменных. Определим функции $v \in C_0^2(0, \pi)$ равенствами $v(t) = h(r)$, где

$$r = b\, e^{-2M(A_0)\, t}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Непосредственными вычислениями получаем, что неравенство (4.8) равносильно следующему неравенству

$$\frac{1}{2^{2p-2}M^{2p-2}(A_0)} \int_0^\pi |v''(t)|^p\, dt \geq C_p^{**}(\Omega) \int_0^\pi |v(t)|^{p-2}|v'(t)|^2\, dt \quad \forall v \in C_0^2(0, \pi).$$

Следовательно, имеем неравенство

$$\frac{1}{2^{2p-2}M^{2p-2}(A_0)} \geq \sigma_p^{**}\, C_p^{**}(\Omega),$$

что противоречит (4.6). Этим и завершается доказательство теоремы 4.2. □

Благодарности

Автор благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Gagliardo. *Ulteriori propriet'a di alcune classi di funzioni in pi'u variabili* // Ricerche Mat. **8**, 24-51 (1959).
2. L. Nirenberg. *On elliptic partial differential equations* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Sci. Fis. Mat. Ser. 3 **13**, 115–162 (1959).
3. О.В. Бесов. *Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях* // Матем. сб. **201**:12, 69–82 (2010).
4. V.G. Maz'ya. *Sobolev Spaces*. Berlin: Springer. 1985.
5. A. Ancona. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$ // J. London Math. Soc (2). **34**:2, 274–290 (1986).
6. F.G. Avkhadiev. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. **21**, 3–31 (2006).
7. A.A. Balinsky, W.D. Evans and R.T. Lewis. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*. Universitext. Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer. 2015.
8. Ф.Г. Авхадиев. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Матем. сборник. **206**:2, 3–28 (2015).
9. Ф.Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **142**, 28–41 (2017).
10. F.G. Avkhadiev. *Euclidean maximum moduli of plane domains and their applications* // Complex Variables and Elliptic Equations. **64**:11, 1869–1880 (2019).
11. M. Ruzhansky, D. Suragan. *Hardy Inequalities on Homogeneous Groups*. Progress in Mathematics, 327. Birkhauser, 2019.
12. D.W. Robinson. *Hardy and Rellich inequalities on the complement of convex sets* // J. Aust. Math. Soc. **108**:1, 98–119 (2020).
13. F. Avkhadiev. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincaré-Friedrichs inequalities* // Anal. Math. Phys. **11**, 134. 1–20 (2021).

14. Ф.Г. Авхадиев. *Неравенства типа Харди, содержащие градиент функции расстояния* // Уфимск. матем. журн. 2021. **13**:3, 3–16 (2021).
15. L.V. Ahlfors. *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory.* New-York: McGraw - Hill. 1973.
16. H. Rademacher. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit I* // Math. Ann. **89**:4, 340–359 (1919).
17. H. Federer. *Geometric measure theory.* New York: Springer. 1969.
18. D.H. Armitage, U. Kuran. *The convexity and the superharmonicity of the signed distance function* // Proc. Amer. Math. Soc. **93**:4, 598–600 (1985).
19. C. Mantegazza, A.C. Mennucci. *Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds* // Appl. Math. Optim. **47**, 1–25 (2003).
20. А.И. Назаров, С.В. Поборчий. *Неравенство Пуанкаре и его приложения: учебное пособие*, СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 2012.
21. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag. 2009.
22. A.F. Beardon, C. Pommerenke. *The Poincaré metric of plane domains* // J. London Math. Soc. (2). **18**, 475—483 (1978).
23. L. Carleson, T.W. Gamelin. *Complex dynamics.* New York: Springer. 1993.
24. C. Pommerenke. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric* // Arch. Math. **32**, 192—199 (1979).
25. A. Golberg, T. Sugawa, M. Vuorinen. *Teichmüller's theorem in higher dimensions and its applications* // Comput. Methods Funct. Theory. **20**:3-4, 539–558 (2020).
26. F.G. Avkhadiev. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. **442**, 469–484 (2016).

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 г. Казань, Россия
E-mail: `avkhadiev47@mail.ru`