ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 37-57.

УДК 515.168.5

ЭТА-ИНВАРИАНТ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ С ПАРАМЕТРОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Н. ЖУЙКОВ, А.Ю. САВИН

Аннотация. На гладком замкнутом многообразии рассматривается семейство операторов вида линейной комбинации псевдодифференциальных операторов с параметром с периодическими коэффициентами. Такие семейства возникают при исследовании нелокальных эллиптических задач на многообразиях с изолированными особенностями и/или с цилиндрическими концами. Цель работы — построить η-инвариант для обратимых семейств и установить его свойства. Мы следуем подходу Мельроуза, который рассматривал η-инвариант как обобщение числа вращения, равного интегралу от следа логарифмической производной семейства. При этом η-инвариант Мельроуза равен регуляризованному интегралу регуляризованного следа логарифмической производной семейства. В нашей ситуации для регуляризации следа используется оператор разностного дифференцирования (вместо обычного дифференцирования у Мельроуза). Основным техническим результатом является тот факт, что оператор разностного дифференцирования осуществляет изоморфизм между пространствами функций с конормальной асимптотикой на бесконечности, что и позволяет определить регуляризованный след. Поскольку полученный регуляризованный след может возрастать на бесконечности, также вводится регуляризация для интеграла. Наша регуляризация интеграла включает операцию усреднения. Далее устанавливаются основные свойства η-инварианта. А именно, η-инвариант в смысле данной работы удовлетворяет логарифмическому свойству, а также является обобщением η-инварианта Мельроуза, т.е. совпадает с последним в случае обычных псевдодифференциальных операторов с параметром. Наконец, предъявляется формула для вариации η-инварианта при изменении семейства.

Ключевые слова: эллиптический оператор, оператор с параметром, эта-инвариант, разностное дифференцирование.

Mathematics subject classification: Primary 58J28; Secondary 58J40

1. Введение

Понятие η-инварианта было введено в знаменитой работе Атьи, Патоди и Зингера [4] для эллиптических самосопряженных псевдодифференциальных операторов (далее ПДО) на гладком замкнутом многообразии. Он является регуляризацией типа ζ-функции сигнатуры квадратичной формы, ассоциированной с рассматриваемым самосопряженным оператором, и по своему определению является спектральным инвариантом. Исследованию η-инвариантов, их обобщений и приложений посвящено большое количество работ (см., напр., работы [5], [6], [13], [18] и цитированную в них литературу). Отметим важное обобщение η-инварианта Атьи-Патоди-Зингера, найденное Мельроузом в [11]. А именно,

K.N. Zhuikov, A.Yu. Savin, Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса Молодая математика России и РФФИ (грант 19-01-00574).

Поступила 21 апреля 2021 г.

в цитированной работе было предложено рассматривать семейства $D(p)$ ПДО с параметром $p \in \mathbb{R}$ (по поводу таких семейств см. [1], [3]), и η-инвариант семейства определялся как специальная регуляризация числа вращения, представимого выражением

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(D^{-1}(p)\frac{dD(p)}{dp}\right)dp. \tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что семейство $D(p)$ является эллиптическим и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$. Заметим, что регуляризация в (1.1) требуется как для следа tr (поскольку он применяется к оператору $D^{-1}dD/dp$, след которого, вообще говоря, не определен), так и для интеграла (который, как правило, расходится на бесконечности). Мельроуз в [11] определил как регуляризованный след (используя дифференцирование семейства по параметру), так и регуляризованный интеграл (используя регуляризацию типа главного значения), исследовал свойства η-инварианта, в частности, показал, что η-инвариант Атьи-Патоди-Зингера совпадает с η-инвариантом некоторого семейства с параметром (см. также [9], [10]). В дальнейшем η-инвариант семейств использовался в формулах индекса на многообразиях с коническими точками (см. [8], [14]) как вклад в формулу индекса от особой точки; кроме этого, были определены η-формы [12].

Цель данной работы состоит в том, чтобы определить η-инвариант для следующего класса семейств с параметром:

$$D(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p)e^{2\pi ikp} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X), \tag{1.2}$$

где X — гладкое замкнутое многообразие, $D_k(p)$ — семейство ПДО на многообразии X с параметром $p \in \mathbb{R}$. Предполагается, что операторы $D_k(p)$ быстро убывают при $k \to \infty$ (это условие точно формулируется ниже), что обеспечивает сходимость ряда в (1.2). Важность исследования семейств (1.2) обусловлена тем, что такие семейства получаются из операторов вида

$$B = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)T^k \colon C_c^\infty(X\times\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X\times\mathbb{R})$$

на бесконечном цилиндре $X \times \mathbb{R}$ после преобразования Фурье по переменной t, где B_k — ПДО с постоянными коэффициентами по переменной t, а $Tu(x,t) = u(x,t-2\pi)$ — оператор сдвига (см. [16], [17]).

Также семейства вида (1.2) возникают в условиях эллиптичности ПДО со сдвигами на многообразиях с коническими точками (см. [2]). Мы определяем η-инвариант семейств вида (1.2) и получаем его основные свойства. Применение к теории индекса планируется рассмотреть в другом месте.

Надо отметить, что для семейств вида (1.2) мы не можем применить регуляризацию Мельроуза из [11]. Дело в том, что регуляризация Мельроуза основана на следующем факте: порядок ПДО с параметром падает при дифференцировании семейства по параметру (после этого регуляризованный след Мельроуза получается повторным интегрированием следа от производной семейства). Однако, при дифференцировании семейства (1.2) по параметру порядок семейства, как правило, не падает. Поэтому нам необходимо было дать другую регуляризацию. Оказалось, что регуляризованный след можно определить, если вместо дифференцирования использовать разностное дифференцирование

$$D(p) \longmapsto D(p+1) - D(p),$$

а вместо интегрирования использовать разностное интегрирование

$$D(p) \longmapsto D(p) + D(p-1) + D(p-2) + \ldots .$$

Мы определяем регуляризованный след семейств (1.2) как элемент пространства гладких функций $f(p)$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p) \sim \sum_{j \leqslant N} c_j^{\pm}(p) p^j + \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} d_k^{\pm}(p) p^k \ln |p| \quad \text{при } p \to \pm\infty \tag{1.3}$$

с гладкими периодическими коэффициентами $c_j^{\pm}(p)$, $d_k^{\pm}(p)$. Здесь и всюду далее под периодическими функциями подразумеваются периодические функции с периодом 1. Далее определяется регуляризованный интеграл для функций с асимптотикой вида (1.3). Пользуясь так определенными регуляризованными следом и интегралом, мы вводим понятие η-инварианта семейств вида (1.2) и устанавливаем его основные свойства. В частности, показано, что в случае обычных ПДО с параметром (т.е. когда $D_k(p) = 0$ при всех $k \neq 0$ в (1.2)) η-инвариант в смысле настоящей работы равен η-инварианту Мельроуза.

Остановимся кратко на содержании работы. Сначала мы напоминаем в §2 определение ПДО с параметром и топологии Фреше на пространстве таких операторов. Топология Фреше используется в §3 при описании условий на коэффициенты в ряде (1.2), при выполнении которых ряд сходится. Также в §3 устанавливаются условия обратимости элементов в алгебре семейств вида (1.2). В §4 показано, что оператор разностного дифференцирования переводит пространство функций с асимптотическим разложением (1.3) в себя, является сюръективным, а его ядро состоит из периодических функций (это — основной технический результат данной работы). Этот результат позволяет определить регуляризованный след семейств вида (1.2) в §5. Затем мы определяем регуляризованный интеграл в §6 и, наконец, даем определение η-инварианта в §7. Также в §7 устанавливается логарифмическое свойство η-инварианта и получена формула для вариации η-инварианта при изменении семейства.

2. Топология Фреше на пространстве ПДО с параметром

В данной работе используются классические ПДО с параметром на гладком замкнутом многообразии (см., напр., [3], [7]). Более точно, мы используем классические ПДО с параметром из [7, п. 7.2.2] на гладком замкнутом многообразии X. Пространство таких операторов порядка $\leqslant m$ будем обозначать через $\Psi_p^m(X)$. Напомним определение топологии Фреше на пространстве $\Psi_p^m(X)$ (см., напр., [7], [10]).

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}, V)$ будем обозначать пространство Шварца функций на прямой $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве Фреше V, т.е. функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left\| \left(\frac{d}{dp} \right)^k f(p) \right\|_j \leqslant C_{jkN} (1 + p^2)^{-N}, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|_j$ пробегает все полунормы пространства Фреше V, число $N \geqslant 0$, а константа зависит только от j, k и N. Аналогично определяется пространство $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, V)$ быстро убывающих последовательностей элементов из V. В этом случае используется оценка (2.1) только при $k = 0$. Элементы из $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, V)$ будем называть *быстро убывающими последовательностями.*

1. Сначала зафиксируем структуры пространства Фреше на следующих линейных пространствах:

- $\Psi_p^{-\infty}(X) \subset \Psi_p^m(X)$ — подпространстве сглаживающих операторов с параметром. Сопоставляя сглаживающему оператору $D(p)$ его ядро Шварца, обозначаемое через $K_D(x, y, p)$, получаем биективное отображение

$$\begin{aligned} \Psi_p^{-\infty}(X) &\longrightarrow \mathcal{S}\big(\mathbb{R}, C^\infty(X \times X)\big), \\ D(p) &\longmapsto K_D(x, y, p). \end{aligned} \tag{2.2}$$

- $S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ — пространстве классических символов в $\mathbb{R}^n$ порядка $\leqslant m$ с параметром. На этом пространстве определена структура пространства Фреше. Здесь подразумеваются условия на гладкость по параметру p из [7, п. 7.2.2], а именно, символ $a = a(x,\xi,p) \in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет оценкам
$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\gamma\right| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(1+|p|+|\xi|)^{m-|\beta|-\gamma}$$
для всех мультииндексов α, β и чисел $\gamma \geqslant 0$ и имеет асимптотическое разложение $a \sim a_m + a_{m-1} + \ldots$ в ряд, где члены ряда $a_k(x,\xi,p)$ являются гладкими функциями, однородными по паре (ξ,p) степени k при $|\xi|^2+p^2 \geqslant 1$.

2. Ниже мы покажем, что структура пространства Фреше на $\Psi^m_p(X)$ определяется в терминах структур из п. 1. Чтобы это показать, зафиксируем следующие объекты:

- конечное покрытие $X = \bigcup_j \mathcal{U}_j$ многообразия X координатными картами
$$\mathcal{U}_j \simeq \Omega_j \subset \mathbb{R}^n,$$
где Ω_j — некоторая область;
- разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}$ на X, подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_j\}$, т.е.
$$\varphi_j \in C^\infty(X), \quad \varphi_j(x) \geqslant 0\ \forall x \in X, \quad \operatorname{supp}\varphi_j \subset \mathcal{U}_j, \quad \sum_j \varphi_j(x) \equiv 1;$$
- срезающие функции $\{\psi_j(x)\}$:
$$\psi_j \in C^\infty(X), \quad \operatorname{supp}\psi_j \subset \mathcal{U}_j, \quad \psi_j(x) \equiv 1 \text{ в окрестности множества } \operatorname{supp}\varphi_j;$$
- срезающую функцию $\chi(x,y)$:
$$\chi \in C^\infty(X \times X), \quad \chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \operatorname{dist}(x,y) < \varepsilon, \\ 0, & \operatorname{dist}(x,y) > 2\varepsilon \end{cases}$$
для некоторого $\varepsilon > 0$, где dist — функция расстояния на $X \times X$.

3. Определим теперь топологию Фреше на пространстве $\Psi^m_p(X)$. Рассмотрим элемент $A \in \Psi^m_p(X)$ с ядром Шварца $K_A(x,y)$. Рассмотрим разложение
$$A = B + C, \tag{2.3}$$
где ядро Шварца оператора B равно $K_A(x,y)\chi(x,y)$, а ядро Шварца оператора C равно $K_A(x,y)\big(1-\chi(x,y)\big)$. Из свойств алгебры ПДО с параметром следует, что оператор $C \in \Psi^{-\infty}_p(X)$. Рассмотрим теперь оператор B. Если число $\varepsilon > 0$, входящее в определение функции χ, выбрать достаточно малым, то будут выполнены равенства
$$B = B \cdot \sum_j \varphi_j = \sum_j \psi_j B \varphi_j. \tag{2.4}$$
Оператор $B_j = \psi_j B \varphi_j$ является собственным ПДО с параметром в карте $\mathcal{U}_j \simeq \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому он однозначно определяется своим полным символом
$$\sigma(B_j) = e^{-ix\xi}(B_j e^{ix\xi}) \in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$
Итак, счетный набор полунорм, определяющих топологию Фреше на пространстве $\Psi^m_p(X)$, для оператора $A \in \Psi^m_p(X)$ определяется так:

- берутся значения всех полунорм для оператора $C \in \Psi^{-\infty}_p(X)$ из (2.3);
- берутся значения всех полунорм для полных символов $\sigma(B_j) \in S^m_{cl,p}(\mathbb{R}^n)$ из (2.5).

Можно проверить, что топологии Фреше, отвечающие разным начальным данным в п. 2, эквивалентны.

3. Алгебра операторов с параметром

Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Psi_p^{m-1}(X) \longrightarrow \Psi_p^m(X) \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{pr}}} C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R})\big) \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

где T^*X — кокасательное расслоение многообразия X, $S(E)$ — сферическое расслоение векторного расслоения E, а σ_{pr} — отображение взятия главного символа ПДО с параметром. Правое обратное отображение для отображения σ_{pr} в (3.1) строится явно. Более точно, рассмотрим функцию $a(x,\xi,p) \in C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}))$. Продолжая данную функцию по однородности степени m на пространство $T^*X \oplus \mathbb{R}$ и умножая на срезающую функцию, получаем главный символ $\widetilde{a}$, однородный степени m на бесконечности в $T^*X \oplus \mathbb{R}$. Определим непрерывное отображение

$$\begin{aligned} C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R})\big) &\longrightarrow \Psi_p^m(X),\\ a &\longmapsto \widehat{a} = \sum_j \psi_j \widehat{a} \varphi_j, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где функции $\{\psi_j, \varphi_j\}$ определены в §1, а $\widehat{a}$ — квантование символа $\widetilde{a}$ в карте $\mathcal{U}_j$. Отображение (3.2) есть непрерывное отображение пространств Фреше, и оно является правым обратным к отображению главного символа.

Рассмотрим факторпространство

$$\Phi_p^m(X) = \mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^m(X)\big)/L$$

пространства Фреше $\mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^m(X)\big)$ быстро убывающих последовательностей операторов из $\Psi_p^m(X)$ по замкнутому подпространству

$$L = \Big\{\{D_k(p)\} \in \mathcal{S}\big(\mathbb{Z}, \Psi_p^m(X)\big) \Big| D_k \in \Psi_p^{-\infty}(X),\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} = 0,\ \forall p \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Корректно определена композиция

$$\begin{aligned} \Phi_p^m(X) \times \Phi_p^\ell(X) &\longrightarrow \Phi_p^{m+\ell}(X),\\ \{D_k(p)\}, \{D'_k(p)\} &\longmapsto \left\{ \sum_{k_1+k_2=k} D_{k_1}(p) D'_{k_2}(p) \right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Произвольному элементу $D = \{D_k(p)\} \in \Phi_p^m(X)$ сопоставим оператор

$$D(p) = \sum_k D_k(p) e^{2\pi i k p} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X). \tag{3.4}$$

Очевидно, что этот оператор корректно определен, т.е. если $D \in L$, то $D(p) \equiv 0$. Далее элементы пространства $\Phi_p^m(X)$ будем записывать в виде (3.4). В этих обозначениях умножение (3.3) отвечает просто композиции операторов (3.4). Введем обозначение $\Phi_p(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Phi_p^m(X)$.

Определение 3.1. *Определим отображение*

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{\mathrm{pr}} \colon \Phi_p^m(X) &\longrightarrow C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big),\\ D(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p) e^{2\pi i k p} &\longmapsto \overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}(D(p)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_{\mathrm{pr}}(D_k)(x,\xi,p) z^k. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $z = e^{i\varphi}$. Функция $\overline{\sigma}_{\mathrm{pr}}(D(p)) \in C^\infty\big(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\big)$ называется главным символом оператора с параметром $D(p)$.

Отображение (3.5) корректно определено, поскольку символ семейств со сглаживающими коэффициентами тождественно равен нулю.

Предложение 3.1. *Имеет место точная последовательность алгебр*

$$0 \longrightarrow \Phi_p^{-1}(X) \longrightarrow \Phi_p^0(X) \xrightarrow{\overline{\sigma}_{\rm pr}} C^\infty\bigl(S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1\bigr) \longrightarrow 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. 1. Докажем, что $\overline{\sigma}_{\rm pr}$ — гомоморфизм. Пусть $D', D'' \in \Phi_p^0(X)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{\rm pr}(D'D'') &= \overline{\sigma}_{\rm pr}\left[\left(\sum_j D'_j(p)e^{2\pi ijp}\right)\left(\sum_k D''_k(p)e^{2\pi ikp}\right)\right]\\
&= \overline{\sigma}_{\rm pr}\left(\sum_j\sum_k D'_j(p)D''_k(p)e^{2\pi i(j+k)p}\right) = \sum_{j,k}\sigma_{\rm pr}(D'_jD''_k)(x,\xi,p)z^{j+k}\\
&= \left(\sum_j \sigma_{\rm pr}(D'_j)(x,\xi,p)z^j\right)\left(\sum_k \sigma_{\rm pr}(D''_k)(x,\xi,p)z^k\right) = \overline{\sigma}_{\rm pr}(D')\overline{\sigma}_{\rm pr}(D'').
\end{aligned}$$

2. Докажем, что $\overline{\sigma}_{\rm pr}$ — сюръекция. Пусть дана функция $\overline{a}(x,\xi,p,z) \in C^\infty(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1)$. Ее разложение в ряд Фурье по переменной z имеет вид $\overline{a} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$, где $a_k = a_k(x,\xi,p)$ — быстро убывающие при $k \to \infty$ функции из пространства Фреше $C^\infty(S(T^*X \oplus \mathbb{R}))$. Из вышесказанного следует, что для соответствующего семейства операторов имеем $\widehat{a}_k \to 0$ в пространстве $\Psi_p^0(X)$ при $k \to \infty$, поэтому корректно определен оператор

$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{a}_k e^{2\pi ikp} \in \Phi_p^0(X),$$

причем отображение $\overline{a} \mapsto A$ является непрерывным отображением пространств Фреше $C^\infty(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1) \to \Phi_p^0(X)$ и представляет собой правое обратное отображение к отображению $\overline{\sigma}_{\rm pr}$.

3. Точность последовательности (3.6) в членах $\Phi_p^{-1}(X)$ и $\Phi_p^0(X)$ следует из определений. □

Теорема 3.1. *Оператор с параметром $D(p) \in \Phi_p^0(X)$ обратим в алгебре $\Phi_p^0(X)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D)(x,\xi,p,z)$ обратим при всех $(x,\xi,p,z) \in S(T^*X \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1$;*
2. *оператор $D(p)\colon L^2(X) \to L^2(X)$ обратим при всех $p \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть элемент $D(p)$ обратим в алгебре $\Phi_p^0(X)$, т.е. существует обратный элемент $R(p) = D^{-1}(p) \in \Phi_p^0(X)$. Тогда главный символ их композиции равен

$$\overline{\sigma}_{\rm pr}(DR) = \overline{\sigma}_{\rm pr}(D)\overline{\sigma}_{\rm pr}(R) = 1.$$

Отсюда следует, что главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D)$ обратим. Очевидно также, что в этом случае оператор $D(p)$ обратим при всех $p \in \mathbb{R}$.

2. Достаточность. Пусть главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D)$ обратим. Тогда обратный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D)^{-1}$ является гладкой функцией и поэтому представляется рядом по степеням переменной z (см. (3.5)) с быстро убывающими коэффициентами. Определим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Psi_p^{-\infty}(X) \longrightarrow \Psi_p^0(X) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}_p(X) \longrightarrow 0,$$

где σ — отображение взятия полного символа, а $\mathcal{S}_p(X) \stackrel{\rm def}{=} \Psi_p^0(X)/\Psi_p^{-\infty}(X)$ — алгебра полных символов. Алгебра $\mathcal{S}_p(X)$ является пространством Фреше. Нетрудно показать, что получаемая топология Фреше на $\mathcal{S}_p(X)$ порождается следующими полунормами: в локальной карте на многообразии элементу $D(p) \in \Psi_p^0(X)$ сопоставляются однородные компоненты $d_k(x,\xi,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n)$, $k \leqslant 0$, его полного символа в локальных картах, и получаются полунормы

$$D(p) \longmapsto \max_{(x,\xi,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_p^\gamma d_k(x,\xi,p)\right|,$$

где α, β — мультииндексы, а $\gamma \geqslant 0$. Отсюда, в частности, следует, что последовательность полных символов из $\mathcal{S}_p(X)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности ее однородных компонент порядка k при всех $k \leqslant 0$. Теперь определим полный символ оператора $D(p) \in \Phi_p^0(X)$ формулой

$$\overline{\sigma}(D) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(D_k) z^k \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X)).$$

Здесь ряд сходится и определяет гладкую функцию, поскольку последовательность D_k быстро убывает при $k \to \infty$. Получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Psi_p^{-\infty}(X) \longrightarrow \Phi_p^0(X) \xrightarrow{\overline{\sigma}} C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X)) \longrightarrow 0,$$

где $\overline{\sigma}$ — отображение взятия полного символа.

Лемма 3.1. *Пусть главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D)$ оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^0(X)$ обратим в алгебре $C^\infty(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1)$. Тогда его полный символ $\overline{\sigma}(D)$ обратим в алгебре $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X))$.*

Доказательство. Пусть $d = \overline{\sigma}(D)$ — полный символ оператора с параметром $D(p)$. Поскольку главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(d)$ обратим, то существует главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(r)$, где $r \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X))$, причем $\overline{\sigma}_{\rm pr}(r) = \overline{\sigma}_{\rm pr}(d)^{-1}$. Тогда имеем

$$\overline{\sigma}_{\rm pr}(dr) = 1 \Longrightarrow \overline{\sigma}_{\rm pr}(1-dr) = 0 \Longrightarrow 1 - dr \in \Phi_p^{-1}(X)/\Psi_p^{-\infty}(X).$$

Обозначая $c = 1 - dr$, получаем $dr = 1 - c$. При этом символ $(1-c)$ обратим: обратный к символу $(1-c)$ есть ряд Неймана

$$(1-c)^{-1} \stackrel{\rm def}{=} 1 + c + c^2 + c^3 + \cdots.$$

Этот ряд является сходящимся в пространстве Фреше $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X))$, поскольку порядок символа c не превышает -1. Определим элемент

$$d^{-1} = \sum_{j\geqslant 0} rc^j.$$

Тогда имеем $dd^{-1} = dr(1-c)^{-1} = (1-c)(1-c)^{-1} = 1$. Осталось доказать справедливость равенства $d^{-1}d = 1$. Имеем

$$d^{-1}d = r\Bigl(\sum_{j\geqslant 0} c^j\Bigr)d = \sum_{j\geqslant 0} r(1-dr)^j d = \sum_{j\geqslant 0} (1-rd)^j rd = (rd)^{-1}rd = 1.$$

Лемма доказана. □

Применяя лемму 3.1, получаем, что полный символ $\overline{\sigma}(D)$ обратим в алгебре $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathcal{S}_p(X))$. Поэтому существует такой оператор с параметром $B(p)$, что $\overline{\sigma}(B) = \overline{\sigma}(D)^{-1}$, в частности, $B(p)$ — эллиптический оператор с параметром. Из [2, Следствие 5.1] следует, что оператор $B(p)$ фредгольмов при всех p и существует такая константа $M > 0$, что оператор $B(p)$ обратим при всех p, удовлетворяющих неравенству $|p| > M$. Утверждается, что существует такое конечномерное семейство $B_\varepsilon(p) \in \Psi_p^{-\infty}(X)$, равное нулю при $p \notin [-M, M]$, что сумма $B(p) + B_\varepsilon(p)$ обратима. В самом деле, препятствие к построению семейства $B_\varepsilon(p)$ лежит в K-группе с компактным носителем $K_c^0(\mathbb{R})$

(см., напр., [15]), являющейся тривиальной, т.е. препятствие отсутствует. В силу этого замечания, можно считать, что оператор с параметром $B(p)$ обратим при всех $p\in\mathbb{R}$. Тогда получаем

$$D(p)B(p)=1+K(p),\quad \text{где}\quad K(p)\in\Psi_p^{-\infty}(X).$$

Хорошо известно, что последнее семейство обратимо в $\Psi_p^0(X)$ тогда и только тогда, когда семейство $1+K(p)\colon L^2(X)\to L^2(X)$ обратимо при всех p. □

4. Разностное дифференцирование

Через $S_{as}(\mathbb{R})\subset C^\infty(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех функций $f(x)$, имеющих асимптотическое разложение вида

$$f(x)\sim\sum_{i\leqslant N}c_i^{\pm}(x)x^i+\sum_{j=0}^{N}d_j^{\pm}(x)x^j\ln|x|\quad \text{при } x\to\pm\infty \tag{4.1}$$

для некоторого $N\in\mathbb{Z}_+$, где $c_i^\pm$, $d_j^\pm$ — гладкие периодические функции. Здесь и далее мы полагаем, что период равен единице. Предполагается, что асимптотическое разложение (4.1) можно дифференцировать произвольное количество раз.

Теорема 4.1. *Отображение разностного дифференцирования*

$$\begin{aligned}\delta\colon S_{as}(\mathbb{R})&\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})\\ f(x)&\longmapsto(\delta f)(x)=f(x+1)-f(x)\end{aligned}\tag{4.2}$$

корректно определено и является изоморфизмом линейных пространств

$$\delta\colon S_{as}(\mathbb{R})/\ker\delta\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R}),$$

где $\ker\delta$ *— пространство гладких периодических функций.*

Доказательство. 1. Сначала докажем, что оператор (4.2) корректно определен. Рассмотрим поведение функции $f(x+1)$ при $x\to+\infty$. При $x\to-\infty$ доказательство аналогично. Пусть функция $f(x)$ имеет асимптотику (4.1). Тогда

$$\begin{aligned}f(x+1)&\sim\sum_{i\leqslant N}c_i^{+}(x)(x+1)^i+\sum_{j=0}^{N}d_j^{+}(x)(x+1)^j\ln(x+1)\\
&\sim\sum_{i\leqslant N}c_i^{+}(x)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{i}{k}x^{i-k}+\sum_{j=0}^{N}d_j^{+}(x)\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell}x^{j-\ell}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)x\right)\\
&\sim\sum_{i\leqslant N}c_i'^{+}(x)x^i+\sum_{j=0}^{N}d_j'^{+}(x)x^j\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kx^k}+\ln x\right)\\
&\sim\sum_{i\leqslant N}c_i''^{+}(x)x^i+\sum_{j=0}^{N}d_j'^{+}(x)\ln|x|,\quad \text{где}\ \binom{i}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}(i-r).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Несложно убедиться в том, что разложение (4.3) можно дифференцировать. Из (4.3) следует, что функция δf имеет разложение (4.1) при $x\to+\infty$.

2. Ядро оператора δ, очевидно, состоит из периодических функций.

3. Уравнение $\delta u=f$ несложно решить. В самом деле, для функции $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ рассмотрим функцию

$$u(x)=-\sum_{i\geqslant0}f(x+i)(1-\chi(x+i))+\sum_{j\geqslant1}f(x-j)\chi(x-j),\tag{4.4}$$

где функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет соотношению

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что в (4.4) при фиксированном x суммы содержат конечное число ненулевых слагаемых. Утверждается, что функция (4.4) является решением уравнения $\delta u = f$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\delta u)(x) = &- \sum_{i\geqslant 0} f(x+i+1)(1-\chi(x+i+1)) + \sum_{j\geqslant 1} f(x-j+1)\chi(x-j+1) \\ &+ \sum_{i\geqslant 0} f(x+i)(1-\chi(x+i)) - \sum_{j\geqslant 1} f(x-j)\chi(x-j) \\ &= f(x)(1-\chi(x)) + f(x)\chi(x) = f(x).\end{aligned}$$

Заметим, что если $f(x) = O((1+|x|)^{-2})$, то в качестве функции χ в (4.4) можно взять произвольную гладкую функцию, например, $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$. В этом случае мы получаем сходящийся ряд в (4.4).

4. Прежде, чем доказывать сюръективность оператора δ, докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big)$, где $M \geqslant 2$, и та же оценка верна для производных любого порядка. Тогда функция*

$$u(x) = \sum_{j\geqslant 1} f(x-j)$$

определяется сходящимся рядом, является гладкой функцией и удовлетворяет уравнению $\delta u = f$, причем при $x \to +\infty$ имеет место разложение

$$u(x) = u_\infty(x) + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big), \tag{4.6}$$

где $u_\infty(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x-j)$ — гладкая периодическая функция. Кроме этого, равенство вида (4.6) выполняется для производных любого порядка.

Доказательство. Все свойства функций u и u_∞, кроме разложения (4.6), получаются непосредственно. Докажем разложение (4.6). При $x \to +\infty$ имеем

$$|u_\infty(x) - u(x)| = \left|\sum_{j\leqslant 0} f(x-j)\right| \leqslant C\sum_{j\leqslant 0}(1+|x-j|)^{-M} = C\sum_{j\geqslant 0}(1+x+j)^{-M} \tag{4.7}$$

для некоторой константы C. Последнее выражение имеет порядок интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+x+y)^M} = O\left((1+x)^{-M+1}\right). \tag{4.8}$$

Теперь из (4.7) и (4.8) получаем (4.6). Разложения вида (4.6) для производных функции $u(x)$ получаются аналогично. □

Лемма 4.2. *Пусть функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ при больших $|x|$ равна конечной сумме*

$$f(x) = \sum_{i=-M+1}^{N} c_i^\pm(x)x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^\pm(x)x^j \ln|x|$$

с гладкими периодическими коэффициентами $c_i^\pm$, $d_j^\pm$, где $M \geqslant 2$, $N \geqslant 0$. Тогда существует функция $\widetilde{u} \in S_{as}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая уравнению

$$\delta\widetilde{u} = f + f_M, \quad \text{где} \quad f_M \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big). \tag{4.9}$$

При этом соотношение (4.9) *выполнено для производных любого порядка.*

Доказательство. Уравнение (4.9) достаточно решить при больших $|x|$. Поскольку случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ аналогичны, далее рассмотрим случай $x \to +\infty$. Искомую функцию $\widetilde{u}$ будем искать в виде

$$\widetilde{u}(x) = u_1(x) + u_2(x) = \sum_{i=-M+2}^{-1} a_i(x)x^i + \sum_{j=0}^{N+1} \left(a_j(x)x^j + b_j(x)x^j \ln|x|\right). \tag{4.10}$$

Всюду далее для краткости периодические коэффициенты a_j, b_j, c_j^+, d_j^+ будем писать без аргумента, подразумевая их зависимость от x.

Для функции u_2 имеем

$$\begin{aligned}\delta u_2(x) &= \sum_{j=0}^{N+1}\Big(a_j\left[(x+1)^j - x^j\right] + b_j\left[(x+1)^j\ln(x+1) - x^j\ln x\right]\Big)\\ &= \sum_{j=0}^{N+1}\left(a_j\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}x^{j-k} + b_j\left[x^j\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \sum_{\ell=1}^{j}\binom{j}{\ell}x^{j-\ell}\left(\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]\right)\\ &= \sum_{j=0}^{N+1}\left(a_j\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}x^{j-k} + b_j\left[x^j\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{rx^r} + \sum_{\ell=1}^{j}\binom{j}{\ell}x^{j-\ell}\left(\ln x + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{rx^r}\right)\right]\right).\end{aligned}$$

Подставляя $u = u_1 + u_2$ в (4.9), сначала найдем коэффициенты при старшей степени x (при $j = N+1$, $k = \ell = r = 1$). Получаем соотношение

$$a_{N+1}(N+1)x^N + \ldots + b_{N+1}(x^N + (N+1)x^N\ln x) + \ldots = c_N^+x^N + d_N^+x^N\ln x + \ldots,$$

где через $\ldots$ обозначены слагаемые младших степеней. Отсюда получаем систему уравнений для коэффициентов:

$$a_{N+1}(N+1) + b_{N+1} = c_N^+, \qquad b_{N+1}(N+1) = d_N^+.$$

Ее решением является пара

$$a_{N+1} = \frac{1}{N+1}\left(c_N^+ - \frac{1}{N+1}d_N^+\right), \qquad b_{N+1} = \frac{1}{N+1}d_N^+,$$

где c_N^+ и d_N^+ известны. Затем найдем решение для слагаемых, содержащих следующие по порядку степени x, и так далее. При этом, уменьшая с каждым шагом j на 1 и повторяя рассуждения, мы можем последовательно найти все коэффициенты a_j, b_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, выражая их через c_j^+, d_j^+ и найденные на предыдущем шаге a_{j+1}, b_{j+1}. Итак, мы построили такую функцию u_2 из (4.10), что функция $\delta u_2 - f$ имеет асимптотику только с отрицательными степенями x.

Для функции u_1 имеем

$$\delta u_1(x) = \sum_{i=-M+1}^{-1}\Big(a_i\left[(x+1)^i - x^i\right]\Big) = \sum_{i=-M+1}^{-1} a_i\sum_{j=1}^{\infty}\binom{i}{j}x^{i-j} = \sum_{i\leqslant -1}\overline{a}_i x^i.$$

При этом коэффициенты a_i при $i \leqslant -1$ можно выбрать таким образом, что $\overline{a}$ равно коэффициенту при x^i в асимптотическом разложении функции $\delta u_2 - f$ для всех $-M+1 \leqslant i \leqslant -1$. Тогда, очевидно, мы можем положить

$$f_M \overset{\text{def}}{=} \delta u_1 + \delta u_2 - f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

□

5. Проверим теперь, что $u(x) \in S_{as}(\mathbb{R})$, если $f(x) \in S_{as}(\mathbb{R})$ и $\delta u = f$. Фиксируем произвольное целое число $M \geqslant 2$. Будем использовать разложение $f = f_0 + f_1$, где

$$\begin{aligned} f_0(x) = &\left(\sum_{i=-M+1}^{N} c_i^+(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^+(x) x^j \ln|x| \right) \chi(x) \\ &+ \left(\sum_{i=-M+1}^{N} c_i^-(x) x^i + \sum_{j=0}^{N} d_j^-(x) x^j \ln|x| \right) (1 - \chi(x)), \\ f_1(x) = &\ O\big((1+|x|)^{-M}\big). \end{aligned}$$

Тогда получаем разложение $u = u_0 + u_1$. Фиксируем решение уравнения $\delta u_1 = f_1$ в виде (4.4), где мы полагаем $\chi(x) \equiv 1$. Применяя лемму 4.1 к функции f_1, получаем решение $u_1 = u_{1,\infty}(x) + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big)$, где $u_{1,\infty}$ — гладкая периодическая функция. Затем применим лемму 4.2 для функции f_0 и получим такую функцию $\widetilde{u}_0 \in S_{as}(\mathbb{R})$, что

$$\delta \widetilde{u}_0 = f_0 + f_M, \quad \text{где } f_M \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

Далее, для разности $u - \widetilde{u}_0$ имеем

$$\delta(u - \widetilde{u}_0) = \delta(u) - \delta(\widetilde{u}_0) = f - f_0 - f_M = f_1 - f_M = O\big((1+|x|)^{-M}\big).$$

Наконец, применяя лемму 4.1 к функции $f_1 - f_M$, получаем

$$u - \widetilde{u}_0 = u_{2,\infty} + O\big((1+|x|)^{-M+1}\big). \tag{4.11}$$

Поскольку $\widetilde{u}_0, u_{2,\infty} \in S_{as}(\mathbb{R})$ и число M в (4.11) можно выбрать произвольно большим, из (4.11) следует, что $u \in S_{as}(\mathbb{R})$. Теорема 4.1 доказана. □

5. Регуляризованный след

Для определения регуляризованного следа оператора с параметром $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $D(p) \in \Phi_p^m(X)$. Тогда $\delta D(p) = D(p+1) - D(p) \in \Phi_p^{m-1}(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор с параметром

$$D(p) = \sum_k e^{2\pi i k p} D_k(p), \tag{5.1}$$

где $D_k(p) \in \Psi_p^m(X)$, причем полунормы $\|D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k \to \infty$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Тогда имеем

$$\delta D(p) = D(p+1) - D(p) = \sum_k e^{2\pi i k p} \big[D_k(p+1) - D_k(p) \big] = \sum_k e^{2\pi i k p} \delta D_k(p).$$

Покажем, что оператор $\delta D_k(p) \in \Psi_p^{m-1}(X)$ и полунормы $\|\delta D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k \to \infty$ для всех j. Полный символ ПДО $D_k(p)$ имеет асимптотическое разложение

$$a(x, \xi, p) \sim \sum_{j \geqslant 0} a_{m-j}(x, \xi, p),$$

где функция $a_j(x, \xi, p)$ однородна степени j по паре переменных (ξ, p), т.е. $a_j(x, \lambda\xi, \lambda p) = \lambda^j a_j(x, \xi, p)$ при всех $\lambda > 0$ и $(x, \xi, p) \in (T^*X \oplus \mathbb{R}) \setminus 0$. Разложим функцию $a_j(x, \xi, p+1)$ в ряд Тейлора в точке p:

$$a_j(x, \xi, p+1) \sim \sum_{i \geqslant 0} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^i a_j(x, \xi, p) \sim \sum_{i \geqslant 0} a_{j,i}(x, \xi, p),$$

где $a_{j,i}$ — однородная функция степени $j-i$. Тогда, как видно из последнего уравнения, полный символ ПДО $\delta D_k(p)$ имеет разложение

$$\delta a(x,\xi,p)\sim\sum_{j\leqslant m}\bigl[a_j(x,\xi,p+1)-a_j(x,\xi,p)\bigr]$$
$$\sim\sum_{j\leqslant m}\sum_{i\geqslant 1}a_{j,i}(x,\xi,p)\sim\sum_{k\leqslant m-1}\left(\sum_{k+1\leqslant j\leqslant m}a_{j,j-k}(x,\xi,p)\right).$$

Порядок последнего символа равен $m-1$. Следовательно, порядок оператора $\delta D_k(p)$ равен $m-1$.

Осталось доказать, что полунормы $\|\delta D_k(p)\|_j$ быстро убывают при $k\to\infty$. В самом деле, имеем

$$\|\delta D_k(p)\|_j\leqslant\|D_k(p+1)\|_j+\|D_k(p)\|_j$$

— сумма быстро убывающих при $k\to\infty$ полунорм. □

Лемма 5.2. *Пусть $D(p)\in\Phi_p^m(X)$, где $m<-\dim X$. Тогда оператор $D(p)$ является следовым, след $\operatorname{tr}D(p)$ является гладкой функцией, и при $p\to\pm\infty$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\operatorname{tr}D(p)\sim\sum_{j\leqslant m+n}c_j^{\pm}(p)|p|^j,\tag{5.2}$$

где $c_j^{\pm}$ — гладкие периодические функции. Разложение (5.2) можно дифференцировать по параметру p.

Доказательство. Пусть $D(p)$ — оператор вида (5.1). Поскольку $m<-n$, то имеем

$$\operatorname{tr}D(p)=\operatorname{tr}\left(\sum_k e^{2\pi ikp}D_k(p)\right)=\sum_k e^{2\pi ikp}\operatorname{tr}D_k(p).\tag{5.3}$$

В силу результатов работы [11, Lemma 1] имеет место асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr}D_k(p)\sim\sum_{j\leqslant m+n}\alpha_{k,j}^{\pm}|p|^j\quad\text{при }|p|\to\infty,\tag{5.4}$$

где коэффициенты $\alpha_{k,j}^{\pm}\in\mathbb{C}$ быстро убывают при $k\to\infty$ и выполнена оценка

$$\operatorname{tr}D_k(p)-\sum_{-N\leqslant j\leqslant m+n}\alpha_{k,j}^{\pm}|p|^j=O\left(|p|^{-N-1}(1+|k|)^{-L}\right)\quad\forall L\geqslant 0.$$

Теперь подставим асимптотическое разложение (5.4) в (5.3) и переставим суммирования по k и j. Получим асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr}D(p)\sim\sum_{j\leqslant m+n}\left(\sum_k e^{2\pi ikp}\alpha_{k,j}^{\pm}\right)|p|^j,$$

где коэффициенты $c_j^{\pm}(p)=\sum_k e^{2\pi ikp}\alpha_{k,j}^{\pm}$ являются гладкими функциями.

Нетрудно видеть, что предыдущее доказательство также дает дифференцируемость разложения (5.2) по параметру. Чтобы это сделать, достаточно провести следующие модификации приведенного выше доказательства. Из [11, Lemma 1] следует, что разложение (5.4) можно дифференцировать по p:

$$\operatorname{tr}D_k'(p)\sim\sum_{j\leqslant m+n}\alpha_{k,j}^{\pm}j|p|^{j-1}\operatorname{sgn}p.\tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в выражение

$$\operatorname{tr} D'(p) = \sum_k e^{2\pi ikp}\bigl(\operatorname{tr} D'_k(p) + 2\pi ik \operatorname{tr} D(p)\bigr),$$

получаем асимптотическое разложение

$$\operatorname{tr} D'(p) \sim \sum_{j\leqslant m+n}\left(\sum_k e^{2\pi ikp}\alpha^{\pm}_{k,j} 2\pi ik\right)|p|^j + \sum_{j\leqslant m+n}\left(\sum_k e^{2\pi ikp}\alpha^{\pm}_{k,j} j \operatorname{sgn} p\right)|p|^{j-1}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что асимптотическое разложение для производной $\operatorname{tr} D^{(j)}(p)$ порядка j получается j-кратным дифференцированием разложения (5.2). $\square$

Через $\mathcal{P} \subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство

$$\mathcal{P} = \left\{ f(p) \in C^\infty(\mathbb{R}) \middle| f(p) = \sum_{j=0}^N f_j(p)p^j \right\},$$

где $f_j(p)$ — гладкие периодические функции. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathcal{P} = \bigcup_{j\geqslant 0} \ker \delta^j. \tag{5.6}$$

Из теоремы 4.1 следует, что оператор δ индуцирует изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} & \longrightarrow & S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \\ [f] & \longmapsto & [\delta f], \end{array} \tag{5.7}$$

где через $[f]$ обозначается класс эквивалентности функции f. Отображение (5.7) также будем обозначать символом δ. В частности, для любого $\ell \geqslant 0$ определено отображение $\delta^{-\ell}\colon S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \to S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}$.

Определение 5.1. *Регуляризованный след оператора с параметром $D(p) \in \Phi^m_p(X)$ определим формулой*

$$(\operatorname{TR} D)(p) = \delta^{-\ell}\bigl[\operatorname{tr}(\delta^\ell D(p))\bigr] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}, \tag{5.8}$$

где $\ell > m + \dim X$.

Предложение 5.1 (Свойства регуляризованного следа)**.**

1. *Для оператора с параметром $D(p) \in \Phi^m_p(X)$ регуляризованный след* (5.8) *корректно определен, т.е. не зависит от выбора числа ℓ.*
2. *Отображение* $\operatorname{TR}\colon \Phi_p(X) \to S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}$, $D(p) \mapsto (\operatorname{TR} D)(p)$ *удовлетворяет циклическому свойству* $\operatorname{TR}(AB) = \operatorname{TR}(BA)$ *для всех $A, B \in \Phi_p(X)$.*

Доказательство. 1. Докажем, что регуляризованный след (5.8) корректно определен. Из леммы 5.1 следует, что $\delta^\ell D(p) \in \Phi^{m-\ell}_p(X)$. Тогда при $\ell > m+n$ след оператора с параметром $\delta^\ell D(p)$ определен и $\operatorname{tr}[\delta^\ell D(p)] \in S_{as}(\mathbb{R})$ (см. лемму 5.2). Из теоремы 4.1 следует, что $(\operatorname{TR} D)(p) \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}$. Утверждается, что при этом следы $(\operatorname{TR} D)(p)$, отвечающие различным ℓ, отличаются на элементы пространства $\mathcal{P}$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\delta^{-\ell-1}\bigl[\operatorname{tr}\bigl(\delta^{\ell+1}D(p)\bigr)\bigr] &= \delta^{-\ell}\left(\delta^{-1}\bigl[\operatorname{tr}\delta\bigl(\delta^\ell D(p)\bigr)\bigr]\right) = \delta^{-\ell}\left(\delta^{-1}\delta\bigl[\operatorname{tr}\bigl(\delta^\ell D(p)\bigr)\bigr]\right) \\ &= \delta^{-\ell}\bigl[\operatorname{tr}\bigl(\delta^\ell D(p)\bigr)\bigr] \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}.\end{aligned}$$

2. Докажем равенство $\operatorname{TR}(AB) = \operatorname{TR}(BA)$.

Лемма 5.3. *Для любых семейств $A(p), B(p)$ имеют место следующие разностные формулы Лейбница:*

$$\delta^\ell(A(p)B(p)) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{\ell-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+\ell-j), \tag{5.9}$$

$$\delta^\ell(A(p)B(p)) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{j} A(p+\ell-j) \cdot \delta^{\ell-j} B(p). \tag{5.10}$$

Доказательство. Доказательства формул (5.9) и (5.10) аналогичны, поэтому мы приводим доказательство только для первой. Докажем формулу (5.9) по индукции. При $\ell = 1$ формула верна:

$$\delta\big(A(p)B(p)\big) = A(p+1)B(p+1) - A(p)B(p) = \delta A(p) \cdot B(p+1) + A(p)\delta B(p).$$

Допустим, что формула верна при ℓ. Тогда для $\ell + 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\delta\delta^\ell\big(A(p)B(p)\big) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta\big(\delta^{\ell-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+\ell-j)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \big(\delta^{(\ell+1)-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+(\ell+1)-j) + \delta^{\ell-j} A(p) \cdot \delta^{j+1} B(p+\ell-j)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{(\ell+1)-j} A(p) \cdot \big(\delta^{j+1} B(p+\ell-j) + \delta^j B(p+\ell-j)\big) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{\ell-j} A(p) \cdot \delta^{j+1} B(p+\ell-j) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{(\ell+1)-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+\ell+1-j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell}{j-1} \delta^{\ell+1-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+\ell+1-j) = \delta^{\ell+1} A(p) \cdot B(p+\ell+1) + A(p)\delta^{\ell+1} B(p) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\ell} \left[\binom{\ell}{j} + \binom{\ell}{j-1}\right] \delta^{\ell+1-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+\ell+1-j) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} \delta^{(\ell+1)-j} A(p) \cdot \delta^j B(p+(\ell+1)-j).
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством $B(p+1) = \delta B(p) + B(p)$. □

Теперь докажем равенство

$$\operatorname{tr}\left(\delta^\ell\big(A(p)B(p)\big)\right) = \operatorname{tr}\left(\delta^\ell\big(B(p)A(p)\big)\right). \tag{5.11}$$

Согласно (5.9), правую часть в (5.11) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\delta^\ell\big(B(p)A(p)\big)\right) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{\ell-j} B(p) \cdot \delta^j A(p+\ell-j)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{j} A(p+\ell-j) \cdot \delta^{\ell-j} B(p)\right) = \operatorname{tr}\left(\delta^\ell\big(A(p)B(p)\big)\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь во втором равенстве мы воспользовались циклическим свойством следа tr. Циклическое свойство можно применить, поскольку композиция $\delta^\ell A(p+\ell-j)\delta^{\ell-j} B(p)$ имеет порядок $\leqslant \operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B - \ell$ и имеет след, если число ℓ достаточно велико. Последнее равенство в (5.12) следует из формулы (5.10). Теперь искомое равенство регуляризованных следов вытекает из (5.11):

$$\mathrm{TR}(AB) = \delta^{-\ell}\left[\operatorname{tr}\left(\delta^\ell(AB)\right)\right] = \delta^{-\ell}\left[\operatorname{tr}\left(\delta^\ell(BA)\right)\right] = \mathrm{TR}(BA).$$

□

Связь с регуляризованным следом Мельроуза. Оказывается, что в случае обычных ПДО с параметром введенный регуляризованный след равен регуляризованному следу Мельроуза (см. [11, Section 4]). Напомним определение последнего. *Регуляризованный след Мельроуза* для ПДО с параметром $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ определяется выражением

$$(\mathrm{TR}_M\, D)(p) = \int_0^p \int_0^{p_{\ell-1}} \cdots \int_0^{p_1} \operatorname{tr}\left(\left(\frac{d}{dq}\right)^\ell D(q)\right) dq dp_1 \ldots dp_{\ell-1}, \tag{5.13}$$

где $\ell > m+n$. Выражение (5.13) не зависит от ℓ с точностью до элементов пространства $\mathcal{P}$.

Предложение 5.2. *Для любого оператора с параметром $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ имеет место равенство*

$$\mathrm{TR}\, D = \mathrm{TR}_M\, D \in S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Для оператора $D(p) \in \Psi_p^m(X)$ необходимо доказать равенство

$$\delta^{-\ell}\big[\operatorname{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big] = \big[\mathrm{TR}_M\, D(p)\big],$$

или эквивалентно

$$\big[\operatorname{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big] = \delta^\ell\big[\mathrm{TR}_M\, D(p)\big]. \tag{5.15}$$

Равенство (5.15) очевидно при $m + n < 0$, так как в этом случае можно взять $\ell = 0$. При $m + n \geqslant 0$ рассмотрим оператор $\widetilde{D}(p) \in \Psi_p^m(X)/\Psi_p^{-n-1}(X)$. Равенство (5.14) для $\widetilde{D}(p)$ достаточно доказать локально, т.е. будем считать, что его полный символ $a(x,\xi,p)$ имеет носитель в локальной карте. Рассмотрим ПДО с параметром $D(p)$, полный символ которого равен $a(x,\xi,p)$. Подставим оператор $D(p)$ в правую часть (5.15). Тогда при $m - \ell < -n$ имеем

$$\begin{aligned}
\delta^\ell\big[\mathrm{TR}_M\, D(p)\big] &= \delta^\ell \int_0^p \int_0^{p_{\ell-1}} \cdots \int_0^{p_1} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^\ell a(x,\xi,q) dx d\xi dq dp_1 \ldots dp_{\ell-1} \\
&= \delta^\ell \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \int_0^p \int_0^{p_{\ell-1}} \cdots \int_0^{p_1} a^{(\ell)}(x,\xi,q) dq dp_1 \ldots dp_{\ell-1} dx d\xi \\
&= \delta^\ell \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(a(x,\xi,p) - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{k!} a^{(k)}(x,\xi,0) p^k\right) dx d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(\delta^\ell a(x,\xi,p) - \delta^\ell\left(\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{k!} a^{(k)}(x,\xi,0) p^k\right)\right) dx d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \delta^\ell a(x,\xi,p) dx d\xi = \big[\operatorname{tr}\big(\delta^\ell D(p)\big)\big].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Здесь $a^{(k)}(x,\xi,q)$ — k-ая производная функции a по параметру q. Из (5.16) следуют искомые равенства (5.15) и (5.14). □

6. Регуляризованный интеграл

Регуляризованный след $\operatorname{TR} D(p)$ может возрастать при $p \to \infty$. Для интегрирования подобных функций по числовой прямой мы используем некоторую регуляризацию интеграла.

Предложение 6.1. *Пусть $f(p) \in S_{as}(\mathbb{R})$. Тогда при $T \to +\infty$ существует асимптотическое разложение*

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j\leqslant N} c_j(T)T^j + \sum_{0\leqslant r\leqslant N} d_r(T)T^r \ln T, \tag{6.1}$$

где $c_j(T)$, $d_r(T)$ — гладкие периодические функции.

Доказательство. Достаточно получить асимптотическое разложение вида (6.1) для интеграла по отрезку $[1,T]$. Если функция $f(p)$ имеет асимптотическое разложение (4.1), то рассмотрим функцию

$$f_0(p) = f(p) - \left(\sum_{j=-1}^{N} c_j^+(p)p^j + \sum_{r=0}^{N} d_r^+(p)p^r \ln|p|\right) \sim \sum_{j\leqslant -2} c_j^+(p)p^j. \tag{6.2}$$

Из (6.2) получаем

$$\int_1^T f(p)dp = \int_1^T f_0(p)dp + \int_1^T \left(\sum_{j=-1}^{N} c_j^+(p)p^j + \sum_{r=0}^{N} d_r^+(p)p^r \ln|p|\right) dp. \tag{6.3}$$

Покажем, что каждое слагаемое в (6.3) имеет асимптотику (6.1).

1. Поскольку $f_0(p) = O(p^{-2})$ при $p \to \infty$, имеем

$$\int_1^T f_0(p)dp = \int_1^\infty f_0(p)dp - \int_T^\infty f_0(p)dp. \tag{6.4}$$

Докажем, что существует асимптотическое разложение

$$\int_T^\infty f_0(p)dp \sim \sum_{j\leqslant -2} a_j(T)T^j \tag{6.5}$$

с некоторыми гладкими периодическими функциями $a_j(T)$. Фиксируем число $M \geqslant 3$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}\left|\int_T^{+\infty} f_0(p)dp - \sum_{j=-M+1}^{-2} \int_T^\infty c_j^+(p)p^j dp\right| = \left|\int_T^{+\infty} \left(f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p)p^j\right) dp\right| \\ \leqslant \int_T^{+\infty} \left|f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p)p^j\right| dp \leqslant \int_T^{+\infty} C_M|p|^{-M}dp = C'_M T^{-M+1},\end{gathered} \tag{6.6}$$

где мы воспользовались тем, что формула (6.2) — асимптотические разложение, т.е. справедлива оценка

$$\left|f_0(p) - \sum_{j=-M+1}^{-2} c_j^+(p)p^j\right| \leqslant C_M|p|^{-M}$$

с некоторой константой $C_M > 0$.

Лемма 6.1. *Пусть $c(p)$ — гладкая периодическая функция. Тогда для любого $j \leqslant -2$ существует асимптотическое разложение*

$$\int_T^\infty c(p)p^j\,dp \sim \sum_{k\leqslant j+1} \overline{c}_k(T)T^k \tag{6.7}$$

с гладкими периодическими коэффициентами $\overline{c}_k(T)$.

Доказательство. Определим разложение $c(p) = \overline{c} + \widetilde{c}(p)$, где $\overline{c} = \int_0^1 c(p)dp$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_T^\infty c(p)p^j\,dp &= \int_T^\infty (\overline{c} + \widetilde{c}(p))p^j\,dp = \overline{c}\int_T^\infty p^j\,dp + \int_T^\infty \widetilde{c}(p)p^j\,dp \\ &= \frac{\overline{c}}{j+1}p^{j+1}\Big|_T^\infty + \int_T^\infty p^j\,d(v(p)) = -\frac{\overline{c}}{j+1}T^{j+1} - T^j v(T) - \int_T^\infty jv(p)p^{j-1}dp.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь $v(p) = \int_0^p \widetilde{c}(q)dq$ — периодическая функция, поскольку $\int_0^1 \widetilde{c}(q)dq = 0$. Это рассуждение можно применить к последнему интегралу в (6.8), и мы по индукции доказываем справедливость разложения (6.7). □

Таким образом, из асимптотического разложения (6.7) и оценки (6.6) следует существование искомого асимптотического разложения (6.5) для интеграла (6.4). Отсюда получаем асимптотическое разложение (6.1).

2. Докажем, что второе слагаемое в (6.3) имеет асимптотическое разложение вида (6.1) при больших T. В самом деле, почленное интегрирование по частям, как в лемме 6.1, дает искомое асимптотическое разложение:

$$\int_1^T \left(\sum_{j=-1}^N c_j^+(p)p^j + \sum_{r=0}^N d_r^+(p)p^r \ln p\right)dp \sim \sum_{j\leqslant N+1} \overline{c}_j(T)T^j + \sum_{r=0}^{N+1} \overline{d}_r(T)T^r \ln T, \tag{6.9}$$

где $\overline{c}_j$, $\overline{d}_j$ — некоторые периодические функции. Предложение 6.1 доказано полностью. □

Определение 6.1. *Регуляризованным интегралом функции $f \in S_{as}(\mathbb{R})$ будем называть среднее значение коэффициента $c_0(T)$ в асимптотическом разложении (6.1) и будем обозначать его через*

$$⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 c_0(T)dT.$$

Предложение 6.2 (Свойства регуляризованного интеграла)**.**

1. *Если $f \in S_{as}(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|p|)^{-2}\big)$, то*
$$⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp = \int_{\mathbb{R}} f(p)dp;$$
2. *Если $f \in \mathcal{P}$, то $⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$;*
3. *Если функция f нечетна, то $⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$.*

Доказательство. 1. Поскольку $f \in S_{as}(\mathbb{R}) \cap O\big((1+|p|)^{-2}\big)$, то функция $\int_{-T}^T f(p)dp$ при $T \to +\infty$ сходится к интегралу по всей прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, коэффициент $c_0(T)$ в разложении (6.1) равен интегралу $\int_{\mathbb{R}} f(p)dp$, а его среднее значение совпадает с ним самим.

2. В силу соображений непрерывности достаточно доказать искомое равенство $⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp = 0$ для $f(p) = e^{2\pi ikp}p^j$, где $k \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant 0$. Искомое равенство при $k = 0$ проверяется непосредственно. Далее, при $k \neq 0$ интеграл $\int_{-T}^T e^{2\pi ikp}p^j dp$ имеет вид $e^{2\pi ikT}P(T) + e^{-2\pi ikT}Q(T)$, где $P(T)$, $Q(T)$ — некоторые многочлены. Поэтому получаем

искомое равенство $⨍_{\mathbb{R}} e^{2\pi ikp}p^j dp = 0$, поскольку средние значения функций $e^{\pm 2\pi ikT}$ равны нулю.

3. Поскольку $f(-p) = -f(p)$, получаем

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp = 0.$$

□

Из предложения 5.2 получаем

Следствие 6.1. *Функционал* $\overline{\mathrm{Tr}}\colon \Phi_p(X) \to \mathbb{C}$, *определяемый формулой*

$$\overline{\mathrm{Tr}}\, D \stackrel{\mathrm{def}}{=} ⨍_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\, D(p)dp,$$

является следом, т.е. $\overline{\mathrm{Tr}}(AB) = \overline{\mathrm{Tr}}(BA)$ *для любых* $A, B \in \Phi_p(X)$.

7. Эта-инвариант

Определение 7.1. *Пусть* $D(p) \in \Phi_p^m(X)$ *— обратимый элемент, т.е. существует обратный элемент* $D^{-1}(p) \in \Phi_p^{-m}(X)$ *(см. теорему 3.1). Тогда число*

$$\eta(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\, \overline{\mathrm{Tr}} \left(D^{-1} \frac{dD}{dp} \right) \tag{7.1}$$

называется η*-инвариантом элемента* $D(p)$.

Предложение 7.1 (Свойства η-инварианта).

1. η*-инвариант удовлетворяет логарифмическому свойству:*

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для любых обратимых элементов $A, B \in \Phi_p(X)$;

2. η*-инвариант (7.1) является обобщением* η*-инварианта Мельроуза, а именно, если* $D(p) \in \Psi_p(X)$ *— обратимый ПДО с параметром, то*

$$\eta(D) = \eta_M(D), \quad \text{где} \quad \eta_M(D) = \frac{1}{2\pi i} ⨍_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}_M \left(D^{-1} \frac{dD}{dp} \right) dp.$$

Доказательство. 1. Докажем логарифмическое свойство:

$$\begin{aligned} 2\pi i \eta(AB) &= \overline{\mathrm{Tr}} \left((AB)^{-1} \frac{d(AB)}{dp} \right) = \overline{\mathrm{Tr}} \left(B^{-1}A^{-1} \left(\frac{dA}{dp} B + A \frac{dB}{dp} \right) \right) \\ &= \overline{\mathrm{Tr}} \left(B^{-1}A^{-1} \frac{dA}{dp} B \right) + \overline{\mathrm{Tr}} \left(B^{-1}A^{-1}A \frac{dB}{dp} \right) \\ &= \overline{\mathrm{Tr}} \left(BB^{-1}A^{-1} \frac{dA}{dp} \right) + \overline{\mathrm{Tr}} \left(B^{-1} \frac{dB}{dp} \right) = 2\pi i \big(\eta(A) + \eta(B) \big). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались циклическим свойством следа $\overline{\mathrm{Tr}}$.

2. На подалгебре $\Psi_p(X)$ регуляризованный след совпадает с регуляризованным следом Мельроуза (см. (5.14)). Отсюда получаем

$$\eta(D) = \frac{1}{2\pi i} ⨍_{\mathbb{R}} \mathrm{TR} \left(D^{-1} \frac{dD}{dp} \right) dp = \frac{1}{2\pi i} ⨍_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}_M \left(D^{-1} \frac{dD}{dp} \right) dp = \eta_M(D).$$

□

Вариация η-инварианта.

Предложение 7.2. *Пусть $D_t(p) \in \Phi_p^m(X)$, $t \in [0,1]$ — гладкая гомотопия семейств обратимых операторов с параметром. Тогда*

1. *производная η-инварианта семейства D_t по параметру t равна*
$$\frac{d}{dt}\eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial t}\right)\right); \tag{7.2}$$
2. *Композиция $\widetilde{\mathrm{Tr}} \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathrm{Tr}} \circ \dfrac{\partial}{\partial p}$ является следом на алгебре $\Phi_p(X)$, т.е. $\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(BA)$;*
3. *Для оператора с параметром $D(p) = \sum_k D_k(p)e^{2\pi i k p} \in \Phi_p^m(X)$ имеем*
$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, D(p) = \int_{T^*X} \left[d_{0,-n}(x,\xi,1) - d_{0,-n}(x,\xi,-1)\right]\frac{\omega^n}{n!}, \quad n = \dim X, \tag{7.3}$$
где $(x,\xi) \in T^*X$, $\omega = \sum dx_j \wedge d\xi_j$ — симплектическая форма на T^*X, а $d_{0,j}$ — однородная компонента степени j полного символа ПДО с параметром $D_0(p)$, при этом интеграл в (7.3) абсолютно сходится.

Доказательство. 1. Левая часть в (7.2) равна
$$\frac{d}{dt}\eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial p}\right)\right) = \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(-D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial t}D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial p} + D_t^{-1}\frac{\partial^2 D_t}{\partial t\partial p}\right). \tag{7.4}$$
Правая часть в (7.2) равна
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial t}\right)\right) &= \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(-D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial p}D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial t} + D_t^{-1}\frac{\partial^2 D_t}{\partial p\partial t}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(-D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial t}D_t^{-1}\frac{\partial D_t}{\partial p} + D_t^{-1}\frac{\partial^2 D_t}{\partial t\partial p}\right).\end{aligned} \tag{7.5}$$
Последнее равенство следует из циклического свойства следа $\overline{\mathrm{Tr}}$. Поскольку выражения в (7.4) и (7.5) совпадают, то мы получили равенство левой и правой частей в (7.2).

2. Докажем циклическое свойство следа $\widetilde{\mathrm{Tr}}$:
$$\widetilde{\mathrm{Tr}}(AB) = \overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{d}{dp}(AB)\right) = \overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{dA}{dp}B + A\frac{dB}{dp}\right) = \overline{\mathrm{Tr}}\left(\frac{dB}{dp}A + B\frac{dA}{dp}\right) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(BA).$$
Предпоследнее равенство следует из циклического свойства следа $\overline{\mathrm{Tr}}$.

3. Установим формулу (7.3). Имеем
$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, D(p) = \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\left(\frac{d}{dp}D(p)\right)dp = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \fint_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k p}\,\mathrm{TR}\left(2\pi i k D_k(p) + \frac{d}{dp}D_k(p)\right)dp. \tag{7.6}$$
Утверждается, что
$$\fint_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k p}\left(2\pi i k\,\mathrm{TR}\, D_k(p) + \mathrm{TR}\left(\frac{d}{dp}D_k(p)\right)\right)dp = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0.$$
В самом деле, в локальных координатах в силу формулы (5.16) и предложения 5.2 о равенстве регуляризованного следа TR и регуляризованного следа Мельроуза получаем
$$\begin{aligned}\mathrm{TR}\, D_k(p) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(d_k(x,\xi,p) - \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}d_k^{(j)}(x,\xi,0)p^j\right)dxd\xi,\\ \mathrm{TR}\left(\frac{d}{dp}D_k(p)\right) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial p}d_k(x,\xi,p) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!}d_k^{(j+1)}(x,\xi,0)p^j\right)dxd\xi,\end{aligned} \tag{7.7}$$

где $d_k(x,\xi,p)$ — полный символ оператора $D_k(p)$, а $d_k^{(j)}$ — его j-ая производная по переменной p. Отметим, что регуляризованные следы TR и TR_M совпадают по модулю элементов пространства $\mathcal{P}$. Однако такие функции не дают вклад в регуляризованный интеграл (см. предложение 6.2). Данные интегралы в (7.7) абсолютно сходятся. Далее, из (7.7) по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} e^{2\pi ikp}\left(2\pi ik\,\mathrm{TR}\,D_k(p)+\mathrm{TR}\left[\frac{\partial}{\partial p}D_k(p)\right]\right)dp\\ =\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{2\pi ikp}\left(d_k(x,\xi,p)-\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}d_k^{(j)}(x,\xi,0)p^j\right)dxd\xi\Bigg|_{p=-T}^{T}\\ =e^{2\pi ikT}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(d_k(x,\xi,T)-\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}d_k^{(j)}(x,\xi,0)T^j\right)dxd\xi\\ -e^{-2\pi ikT}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(d_k(x,\xi,-T)-\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}d_k^{(j)}(x,\xi,0)(-T)^j\right)dxd\xi.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Интегралы в последней формуле являются гладкими функциями переменной T и имеют разложение вида (4.1) с постоянными коэффициентами. После подстановки этих разложений в формулу (7.8) и выделения постоянного члена в асимптотическом разложении мы видим, что этот коэффициент равен нулю при всех $k\neq 0$.

Таким образом, в силу формулы (5.14) из (7.6) получаем

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,D=⨍_{\mathbb{R}}\mathrm{TR}\left[\frac{d}{dp}D_0(p)\right]dp=⨍_{\mathbb{R}}\mathrm{TR}_M\left[\frac{d}{dp}D_0(p)\right]dp. \tag{7.9}$$

След (7.9) был вычислен в [11, Proposition 6]. Применение цитированного результата к правой части в (7.9) дает искомую формулу (7.3). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.С. Агранович, М.И. Вишик. *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида* // Успехи матем. наук. **19**:3, 53–161 (1964).
2. А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. *Эллиптические G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями* // СМФН. **59**, 173–191 (2016).
3. М.А. Шубин. *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* М.: Наука. 1978.
4. M. Atiyah, V. Patodi, I. Singer. *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77**, 43–69 (1975).
5. J.-M. Bismut, J. Cheeger. *η-invariants and their adiabatic limits* // J. of Amer. Math. Soc. **2**:1, 33–70 (1989).
6. J. Cheeger. *η-invariants, the adiabatic approximation and conical singularities* // J. Diff. Geometry. **26**:1, 175–221 (1987).
7. Yu. Egorov, B.-W. Schulze. *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin. 1997.
8. B.V. Fedosov, B.-W. Schulze, N. Tarkhanov. *The index of higher order operators on singular surfaces* // Pacific J. of Math. **191**:1, 25–48 (1999).
9. M. Lesch, H. Moscovici, M.J. Pflaum. *Connes-Chern character for manifolds with boundary and eta cochains* // Mem. Amer. Math. Soc. **220**:1036, viii+92 (2012).
10. M. Lesch, M. Pflaum. *Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant* // Trans. Amer. Math. Soc. **352**:11, 4911–4936 (2000).
11. R. Melrose. *The eta invariant and families of pseudodifferential operators* // Math. Research Letters. **2**:5, 541–561 (1995).

12. R. Melrose, F. Rochon. *Eta forms and the odd pseudodifferential families index.* In Surveys in differential geometry. Volume XV. Perspectives in mathematics and physics, volume 15 of Surv. Differ. Geom., pages 279–322. Int. Press, Somerville, MA (2011).
13. W. Müller. *Eta-invariant (some recent developments)* // Sem. Bourbaki. Asterisque. **227**, 335–364 (1994).
14. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, B. Sternin. *Elliptic Theory on Singular Manifolds.* CRC-Press, Boca Raton. 2005.
15. V. Nistor. *An index theorem for gauge-invariant families: The case of solvable groups* // Acta Math. Hungarica. **99**:2, 155–183 (2003).
16. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin. 1997.
17. A.L. Skubachevskii. *Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications* // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. **9**:3, 847–868 (2016).
18. E. Witten. *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Braid group, knot theory and statistical mechanics, volume 9 of Adv. Ser. Math. Phys., pages 239–329. World Sci. Publ., Teaneck, NJ (1989).

Константин Николаевич Жуйков,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: zhuykovcon@gmail.com

Антон Юрьевич Савин,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1,
D - 30167 Hannover, Germany
E-mail: a.yu.savin@gmail.com