ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 82-93.

УДК 517.958

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ КОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

С.В. ХАБИРОВ, Т.Ф. МУКМИНОВ

Аннотация. Модели сплошной среды газодинамического типа допускают 11-мерную алгебру Ли группы Галилея, расширенную равномерным растяжением всех независимых переменных. Объектом исследования является построение подмоделей цепочки вложенных подалгебр размерностей от 1 до 4, описывающие конические движения газа. Для выбранной цепочки найдены согласованные инварианты в цилиндрической системе координат. На их основе получены представления инвариантного решения для каждой подмодели из цепочки. Подстановкой их в систему уравнений газовой динамики получены вложенные инвариантные подмодели рангов от 0 до 3. Доказано, что решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей.

Из выбранной цепочки рассмотрена 4-х мерная подалгебра, производящая нерегулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1 в цилиндрических координатах. В газовой динамике такие решения называются простыми волнами. Изучена совместность соответствующей подмодели с помощью системы альтернативных предположений, получаемых из уравнений подмодели. Получены решения, зависящие от произвольных функций, а также частные решения, которые могут быть инвариантными относительно подалгебр, вложенных в рассматриваемую подалгебру, но не обязательно из рассматриваемой цепочки.

Ключевые слова: газовая динамика, цепочка вложенных подалгебр, согласованные инварианты, инвариантные подмодели, частично инвариантные решения.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35Q31

1. Введение

Уравнения механики сплошной среды в эйлеровых переменных должны допускать группу Галилея, в частности уравнения газовой динамики допускают 11-мерную алгебру Ли L_{11} [1], базис которой в декартовой системе координат состоит из следующих операторов:

1) переносов по пространству

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,$$

2) галилеевых переносов

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$

3) вращений

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$$
$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$
$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,$$

4) переноса по времени

$$X_{10} = \partial_t,$$

S.V. Khabirov, T.F. Mukminov, Simple waves of conic motions.

Работа выполнена при финансовой поддержке госбюджета по госзаданию № 0246-2019-0052.

Поступила 5 марта 2021 г.

5) равномерного растяжения

$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Подалгебра алгебры L_{11} — это линейное подпространство, замкнутое относительно коммутатора

$$X, Y \in L_{11} \Rightarrow [X, Y] = XY - YX \in L_{11}.$$

С точностью до внутренних автоморфизмов подалгебры различных размерностей приведены в [2], [7]. Оптимальная система – это классы подобных подалгебр. Параметры класса являются инвариантами внутренних автоморфизмов.

В таблице оптимальной системы введены следующие обозначения. Подалгебры нумеруются в виде $k.n$, где k — размерность подалгебры, n — порядковый номер подалгебры в данной размерности.

Рассмотрим цепочку вложенных подалгебр из оптимальной системы [3]:

$$1.6 \subset 2.5 \subset 3.2 \subset 4.3,$$

где подалгебры заданы базисами из операторов дифференцирования

$$\begin{aligned} 1.6 &= \{X_7 + X_{10}\}, \\ 2.5 &= \{X_7,\, X_{10}\}, \\ 3.2 &= \{X_7,\, X_{10},\, X_{11}\}, \\ 4.3 &= \{X_1,\, X_7,\, X_{10},\, X_{11}\}, \end{aligned}$$

которые допускаются уравнениями газовой динамики. В классе подалгебр 4.3 параметры равны нулю. Выберем согласованные инварианты этой цепочки. Инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности [4].

Для каждой подалгебры, допускаемой дифференциальными уравнениями, можно получить множество точных решений, которые образуют подмодель. Классификацией подмоделей занимается симметрийный (групповой) анализ [5]. Наиболее развит групповой анализ для модели идеальной газовой динамики [6]. Найдена допускаемая алгебра Ли L_{11}, изучена структура алгебры (оптимальная система подалгебр). Построены инвариантные подмодели [7], [8], [2], регулярные частично инвариантные подмодели [9]. Симметрийный анализ сделан для некоторых подмоделей, например [10]–[12]. Для некоторых групповых решений изучено движение частиц газа [13]–[15]. Слабо изучены нерегулярные частично инвариантные решения [16], [17] и дифференциально инвариантные решения [18].

Уравнения газовой динамики имеют 4 независимые переменные: t – время, $\vec{x} \in R^3$ и 5 функций $\vec{u}$ – скорость, p – давление, ρ – плотность всего 9 переменных. Другие термодинамические параметры, S – энтропия, T – температура, ε – внутренняя энергия, определяются из уравнения состояния и термодинамического тождества [2], [20]. У подалгебры размерности k будет $9-k$ точечных инвариантов. Выбирают r, $0 \leqslant r < 4$, инвариантов в качестве новых независимых переменных (ранг подмодели). Если есть инварианты, зависящие только от исходных независимых переменных, то они должны входить в число новых независимых переменных. Остальные инварианты назначают новыми функциями от выбранных инвариантов. Из полученных равенств находят некоторое число функций. Функции, которые не определяются из равенств, являются функциями первоначально общего вида, т.е. зависят от t, $\vec{x}$. Число таких функций называется дефектом подмодели.

Таким образом, получим представление решения, которое подставляем в уравнения газовой динамики в удобной системе координат. Доказано, что после исключения функций общего вида получится система уравнений только для новых функций [1], [5]. Если для цепочки подалгебр выбраны согласованные инварианты, то полученные с их помощью подмодели будут вложены друг в друга. Это значит, что всякое решение подмодели с меньшим числом независимых переменных будет точным решением подмодели с большим числом независимых переменных для подмоделей одного дефекта. Общая теория рассмотрена в [4].

Инвариантная подмодель 4-мерной подалгебры будет иметь только тривиальные решения. Нетривиальные решения являются нерегулярными частично-инвариантными. Задачей работы является выяснить, возможна ли редукция подмодели ранга 1 дефекта 1 4-мерной подалгебры к инвариантным подмоделям и классифицировать найденные частично-инвариантные решения этой подалгебры.

2. Построение инвариантных подмоделей

2.1. Переход к цилиндрической системе координат. Уравнения газовой динамики определяются законами сохранения импульса, массы и энергии [2], [20]

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &\rho_t + \vec{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0,\\ &\varepsilon_t + \vec{u}\cdot\nabla\varepsilon + p\rho^{-1}\nabla\cdot\vec{u} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из термодинамического тождества $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$ следует $\varepsilon = \varepsilon(S,\rho)$, $T = \varepsilon_S$, $p = \rho^{-2}\varepsilon_\rho$ и вместо последнего уравнения системы (2.1) можно взять уравнение

$$S_t + \vec{u}\cdot\nabla S = 0.$$

Замыкает систему уравнение состояния $p = f(\rho,\ S) = \rho^{-2}\varepsilon_\rho$. Здесь p – давление, ρ – плотность, ε – внутренняя энергия, S – энтропия, T – температура.

Так как среди операторов цепочки подалгебр есть оператор вращения вокруг одной оси, удобно вычисление подмоделей цепочки подалгебр проводить в цилиндрических координатах:

$$\begin{gathered} y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad u = U,\\ v = V\cos\theta - W\sin\theta, \quad w = V\sin\theta + W\cos\theta, \end{gathered}$$

операторы цепочки подалгебр

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_U, \quad X_7 = \partial_\theta,\\ X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r. \end{gathered}$$

Система (2.1) в цилиндрических координатах принимает вид

$$\begin{aligned} &DU + \rho^{-1}p_x = 0,\\ &DV + \rho^{-1}p_r = r^{-1}W^2,\\ &DW + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta = -r^{-1}VW,\\ &D\rho + \rho\left[U_x + V_r + r^{-1}(V + W_\theta)\right] = 0,\\ &DS = S_t + US_x + VS_r + Wr^{-1}S_\theta = 0,\ p = f(\rho,\ S). \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. Согласованные инварианты. Получим согласованные инварианты рассматриваемой цепочки, то есть функционально независимые инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности.

Инварианты подалгебры

$$\{X_1 = \partial_x,\ X_7 = \partial_\theta,\ X_{10} = \partial_t,\ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r\}$$

вычисляются из системы уравнений $X_iI = 0$. Видно, что I не зависит от x, θ, t, r и независимые инварианты: U, V, W, p, ρ.

Для подалгебры $\{X_7,\ X_{10},\ X_{11}\}$ инварианты не зависят от θ, t. Инвариант для X_{11} равен $xr^{-1} = \Phi$. Остальные инварианты: U, V, W, p, ρ.

Для $\{X_7,\, X_{10}\}$ инварианты не зависят от θ и t. Согласованные инварианты таковы: $r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho$.

Для $\{X_7 + X_{10}\}$ согласованные инварианты имеют вид: $\tau = \theta - t,\, r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho$.

Таким образом, получена цепочка согласованных инвариантов:

$$\begin{aligned}\{U,\, V,\, W,\, p,\, \rho\} &\subset \{\Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho\}\\ &\subset \{r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho\} \subset \{\tau,\, r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho\}.\end{aligned}$$

2.3. Вложенные инвариантные подмодели. Для каждой подалгебры из выбранной цепочки построим инвариантную подмодель. Из инвариантов подалгебры 1.6 $\tau,\, r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho$ первые 3 выражены через исходные независимые переменные, поэтому их нужно взять за новые независимые переменные. Остальные инварианты назначим функциями от $\tau,\, r,\, \Phi$

$$U = U(\tau,\, r,\, \Phi), \quad V = V(\tau,\, r,\, \Phi), \quad W = W(\tau,\, r,\, \Phi), \quad p = p(\tau,\, r,\, \Phi), \quad \rho = \rho(\tau,\, r,\, \Phi).$$

Сделаем замену переменных $t,\, \tau,\, r,\, \Phi$ в операторе

$$D = \partial_t + \left(W r^{-1} - 1\right)\partial_\tau + V\partial_r + r^{-1}(U - V\Phi)\partial_\Phi.$$

Система (2.2) содержит только инварианты подалгебры 1.6

$$\begin{aligned}&DU + (r\rho)^{-1} p_\Phi = 0,\\ &DV + \rho^{-1}\left(p_r - \Phi r^{-1} p_\Phi\right) = r^{-1}W^2,\\ &DW + (r\rho)^{-1} p_\tau = -r^{-1}VW,\\ &D\rho + \rho\left[V_r + r^{-1}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V + W_\tau)\right] = 0,\\ &DS = 0, \quad p = f(\rho,\ S).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Построена инвариантная подмодель ранга 3.

Перейдем к подалгебре 2.5. Найденные инварианты $r,\, \Phi,\, U,\, V,\, W,\, p,\, \rho$ задают представление инвариантного решения

$$U = U(r,\, \Phi), \quad V = V(r,\, \Phi), \quad W = W(r,\, \Phi), \quad p = p(r,\, \Phi), \quad \rho = \rho(r,\, \Phi).$$

Исходная система (2.2) примет вид

$$\begin{aligned}&DU + (r\rho)^{-1} p_\Phi = 0,\\ &DV + \rho^{-1}\left(p_r - \Phi r^{-1} p_\Phi\right) = r^{-1}W^2,\\ &DW = -r^{-1}VW,\\ &D\rho + \rho\left[V_r + r^{-1}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V)\right] = 0,\\ &DS = 0, \quad p = f(\rho,\ S).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Получена инвариантная подмодель ранга 2 подалгебры 2.5. Легко заметить, что подмодель могла быть построена по подмодели (2.3) подалгебры 1.6. Достаточно принять функции $U,\, V,\, W,\, p$ и ρ, независимыми от τ. Это следует из того, что были выбраны согласованные инварианты. Решения подмодели (2.4) подалгебры 2.5 будут частными решениями подмодели (2.3) подалгебры 1.6.

Аналогично строится инвариантная подмодель подалгебры 3.2. Среди инвариантов лишь один зависит от исходных независимых переменных, поэтому инвариантная подмодель будет иметь ранг 1. Представление инвариантного решения

$$U = U(\Phi), \quad V = V(\Phi), \quad W = W(\Phi), \quad p = p(\Phi), \quad \rho = \rho(\Phi)$$

подставим в (2.2). Получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &D_1U + \rho^{-1}p_\Phi = 0,\\ &D_1V - \Phi\rho^{-1}p_\Phi = W^2,\\ &D_1W = -VW,\\ &D_1\rho + \rho(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V) = 0,\\ &D_1S = 0, \quad p = f(\rho,\ S), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $D_1 = (U - \Phi V)\partial_\Phi$.

Все функции зависят только от Φ. Подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений при $U \neq \Phi V$ имеет интегралы

$$\begin{aligned} &A\rho(U - \Phi V) = W^2,\\ &U^2 + V^2 + W^2 + 2\int \rho^{-1}dp = B^2,\\ &S = S_0, \end{aligned}$$

где A, B и S_0 — постоянные, и сводится к системе конических движений [2].

$$\begin{aligned} &\Phi U' + V' = \sigma A\rho,\\ &\left[(U - \Phi V)^2 - f_\rho\right] U' + \Phi f_\rho V' = V f_\rho, \end{aligned}$$

где $\sigma = \operatorname{sign}(U - \Phi V)$.

При $U = \Phi V$ из уравнений системы (2.5) следует

$$p = p_0, \quad U = V = W = 0, \quad p_0 = f(\rho, S).$$

Решения полученной подмодели будут частными решениями подмодели (2.4).

Подалгебра 4.3 не имеет инварианта, зависящего от исходных независимых переменных, поэтому представление инвариантного решения являются постоянные U, V, W, p, ρ. Из (2.2) получим

$$W^2 = 0, \quad VW = 0, \quad \rho V = 0, \quad p = f(\rho,\ S).$$

Инвариантные решения $U = U_0$, $V = W = 0$, $\rho = \rho_0 \neq 0$, $p = p_0 = f(\rho_0,\ S_0)$, $S = S_0$ ранга 0 являются тривиальными решениями системы (2.5).

3. Подмодель ранга 1 дефекта 1 и классификация решений

В работе [19] для всех 48 типов 4-мерных подалгебр вычислены базисы точечных инвариантов и рассмотрены примеры простейших частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1. Подалгебра 4.3 там не рассматривалась. Особенность данной работы состоит в том, что при вычислении инвариантов для рассматриваемой подалгебры используется цепочка вложенных подалгебр меньшей размерности с целью выявления редукций к инвариантным подмоделям цепочки.

Поэтому в представлении решения

$$\begin{aligned} &U = U(\alpha), \quad V = V(\alpha), \quad W = W(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad S = S(\alpha),\\ &\alpha = \alpha(t,\ r,\ \Phi,\ \tau), \quad \Phi = xr^{-1}, \quad \tau = \theta - t \end{aligned}$$

используется базис инвариантов, отличный от базиса из работы [19]. Такие нерегулярные частично инвариантные решения называются в газовой динамике простыми волнами. В качестве α можно взять любую не постоянную газодинамическую функцию.

Подстановка представления в (2.2) приводит к переопределенной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&rU'D\alpha + \rho^{-1}p'\alpha_\Phi = 0,\\
&rV'D\alpha + \rho^{-1}p'\left(r\alpha_r - \Phi\alpha_\Phi\right) = W^2,\\
&rW'D\alpha + \rho^{-1}p'\alpha_\tau = -VW,\\
&r\rho^{-1}\rho'D\alpha + (U' - V'\Phi)\alpha_\Phi + V'r\alpha_r + V + W'\alpha_\tau = 0,\\
&S'D\alpha = 0, \quad p = f(\rho,\ S).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $rD = r\partial_t + (W - r)\partial_\tau + Vr\partial_r + (U - V\Phi)\partial_\Phi$.

Будем классифицировать решения с помощью альтернативных предположений, образующих бинарное дерево. Перед номером каждого предположения будем ставить номера предшествующих ему предположений, разделенных точками. В этом состоит оригинальность метода исследования совместности переопределенной системы. Пятое уравнение системы (3.1) дает два случая.

1. $D\alpha = 0$. Система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}
&p'\alpha_\Phi = 0,\\
&p'\left(r\alpha_r - \Phi\alpha_\Phi\right) = \rho W^2,\\
&p'\alpha_\tau = -\rho VW,\\
&(U' - V'\Phi)\alpha_\Phi + V'r\alpha_r + V + W'\alpha_\tau = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Первое уравнение системы (3.2) дает следующее альтернативное предположение.

1.1 $p' \neq 0$. В качестве α можно взять функцию p. Тогда можно представить остальные неизвестные в виде функций от p и система (3.2) примет вид

$$\begin{aligned}
&p_\Phi = 0, \quad rp_r = \rho W^2, \quad p_\tau = -\rho VW = p_t,\\
&\rho W(V'W - W'V) + V = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Величина $W \neq 0$ иначе $p = \mathrm{const}$. Из (3.3) следует решение

$$V = 0, \qquad \int \rho^{-1}W^{-2}dp = \ln r + C, \quad p = f(\rho(p), S(p)),$$

зависящее от трех произвольных функций $U(p)$, $W(p)$, $\rho(p)$ и одной постоянной C. Это решение удовлетворяет системе (2.4). Произошла редукция к инвариантному решению.

1.2 $p' = 0 \Rightarrow p = p_0$. Из второго уравнения системы (3.2) следует $W = 0$. Составим новую систему из четвертого уравнения (3.2) и выражения $D\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
&(U' - V'\Phi)\alpha_\Phi + V'r\alpha_r + V = 0,\\
&\alpha_t - \alpha_\tau + V\alpha_r + r^{-1}(U - V\Phi)\alpha_\Phi = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Если V – постоянная, то из системы (3.4) следует $V = 0$,

$$U'\alpha_\Phi = 0, \quad \alpha_t - \alpha_\tau + r^{-1}U\alpha_\Phi = 0$$

и получаем два решения. Первое решение $V = W = 0$, $p = p_0 = f(\rho, S)$ при $\alpha_\Phi = 0$ с тремя произвольными функциями $U(\alpha)$, $S(\alpha)$, $\alpha(\theta, r)$ инвариантно относительно подалгебры $\{X_1, X_{10}\}$ из другой цепочки подалгебр. Второе решение $U = V = W = 0$, $p = p_0 = f(\rho, S)$ с двумя произвольными функциями $S(\alpha)$, $\alpha(\theta, \Phi, r)$ инвариантно относительно подалгебры X_{10} из другой цепочки подалгебр.

Если $V' \neq 0$, то можно считать $\alpha = V$ и из (3.4) следует

$$(U'(V) - \Phi)V_\Phi + rV_r + V = 0, \quad V_t - V_\tau + VV_r + r^{-1}(U(V) - V\Phi)V_\Phi = 0.$$

Общее решение второго уравнения имеет вид

$$r(U(V) - V\Phi) = F(\theta, r_1, V), \quad r_1 = r - tV, \quad \theta = t + \tau.$$

Продифференцируем полученное равенство по Φ и r, подставим производные функции V в первое уравнение

$$r_1(2VU' - 2U + F_{r_1}) + F - VF_V + 2tV(VU' - U + F_{r_1}) = 0.$$

В этом равенстве переменная t свободная. Приравнивая нулю коэффициенты (расщепление по t), получим

$$F_{r_1} = U - VU', \quad VF_V = F + r_1(VU' - U).$$

Из первого равенства получим представление для $F = r_1(U - VU') + G(V, \theta)$. Подставляем во второе уравнение и расщепляем по r_1

$$V(G_V - r_1 VU'') = G \quad \Rightarrow \quad U'' = 0, \quad VG_V = G \quad \Rightarrow \quad U = CV + C_1, \quad G = VH(\theta).$$

Полученные выражения подставим в общее решение второго уравнения

$$r(C - \Phi) - C_1 t = H(\theta).$$

Это равенство между независимыми переменными, противоречие.

4. Решения с постоянной энтропией

Рассмотрим альтернативу первому случаю.

2. $D\alpha \neq 0 \ \Rightarrow\ S' = 0,\ S = S_0$. В системе (3.1) последнее уравнение выполняется и $p = f(\rho)$.

2.1 $p' \neq 0$. В качестве α возьмем p. Из трех первых уравнений (3.1) найдем производные функции p

$$\begin{aligned} &p_\Phi = -U'\rho r Dp, \\ &rp_r = \rho\left[W^2 - rDp(U'\Phi + V')\right], \\ &p_\tau = -\rho(VW + W' rDp). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставим полученные выражения в четвертое уравнение (3.1)

$$rDp\left((\rho^{-1})' + U'^2 + V'^2 + W'^2\right) = \rho^{-1}V + W(V'W - VW'). \tag{4.2}$$

2.1.1 $\rho' \neq \rho^2(U'^2 + V'^2 + W'^2) \ \Rightarrow\ \rho W(V'W - VW') + V \neq 0$. Из (4.2) находим $rDp = T(p) \neq 0$, из (4.1) и (4.2) получим выражения для всех производных функции p

$$\begin{aligned} &p_\Phi = -\rho U' T, \\ &rp_r = \rho\left[W^2 - T(U'\Phi + V')\right], \\ &p_\tau = -\rho(VW + W'T), \\ &rp_t = -r\rho(VW + W'T) + T + T\rho\vec{u}\cdot\vec{u}', \end{aligned}$$

где $\vec{u} = (U, V, W)$. Вычисляя смешанные производные второго порядка, получим шесть уравнений

$$(TU')'(VW + TW') = TU'(VW + TW')', \tag{4.3}$$

$$(TU')'(W^2 - TV') = TU'[\rho^{-1} + (W^2 - TV')'], \tag{4.4}$$

$$(VW + TW')'(W^2 - TV') = (VW + TW')(W^2 - TV')', \tag{4.5}$$

$$U''(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}') = U'(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}')', \tag{4.6}$$

$$(VW + TW')'T(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}') = (VW + TW')(T(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}'))', \tag{4.7}$$

$$(\rho^{-1} + (W^2 - TV')')T(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}') = (T(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}'))'(W^2 - TV'). \tag{4.8}$$

2.1.1.1 $VW + TW' \neq 0$. Тогда из (4.4), (4.5) в силу (4.3) следует $U' = 0$ и соотношения (4.3), (4.4), (4.6) тождественно выполняются, а из (4.5) и (4.7) следуют равенства

$$W^2 - TV' = C(VW + TW'), \quad T(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}') = E(VW + TW'),$$

где C, E – постоянные, причем U обнуляется галилеевым переносом. В силу этих равенств из (4.8) следует

$$\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}' = 0, \quad E = 0.$$

Первое уравнение определяет T. Второе равенство дает интеграл Бернулли с уравнением состояния $\rho = g(p)$

$$2i(\rho) + q^2 = B^2, \quad q = |\vec{u}|, \quad i = \int \rho^{-1} dp.$$

Производные функции p определяют интеграл

$$J = \theta - C\ln r, \quad J(q) = \int W^{-1}(dV + CdW).$$

Подмодель задается интегралом Бернулли и нелинейным уравнением (4.2)

$$[(\rho^{-1})' + V'^2 + W'^2]W(W - CV) = (V' + CW')(V\rho^{-1} + W(WV' - VW')).$$

2.1.1.2 $VW + TW' = 0$. Равенства (4.3), (4.5), (4.7) выполняются тождественно. Если $W^2 - TV' = 0$, то из (4.4) и (4.8) получим $U' = 0$, $\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}' = 0$. Умножая на T, придем к противоречивому равенству $\rho^{-1} = 0$. Значит, $W^2 - TV' \neq 0$ и из (4.4) следует $TU' = C(W^2 - TV')$. Производные функции p принимают вид

$$p_\Phi = -C\rho(W^2 - TV'), \quad p_\tau = 0, \quad rp_r = \rho(W^2 - TV')(1 - C\Phi).$$

Для вспомогательной функции $J = \int \rho^{-1}(W^2 + TV')dp$ ее производные вычисляются в силу (4.8)

$$J_\Phi = -C, \quad rJ_r = 1 - C\Phi \quad \Rightarrow \quad C = 0, \quad U = 0, \quad rJ_t = Ge^J.$$

Отсюда получаем $J = \ln(r|t|^{-1})$ с точностью до постоянного слагаемого. Если знать зависимость $J(p)$, то определяется зависимость $p(r|t|^{-1})$. Исключив T из (4.8) и (4.2), получим подмодель для нахождения $V(p)$, $W(p)$ по заданному уравнению состояния $\rho(p)$. Если $W \neq 0$, то подмодель задается уравнениями

$$\frac{W'}{W} = \frac{V'}{V}\rho\vec{u}\cdot\vec{u}' - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{u}')'}{1 + \vec{u}\cdot\vec{u}'}, \quad \vec{u}\cdot\vec{u}' = VV' + WW', \quad (\rho^{-1})' + VW'\rho^{-1} + WV'(\vec{u}\cdot\vec{u}') = 0.$$

Если $W' = 0$, то подмодель определяется равенством

$$(\rho^{-1})' = VV'' - (V')^2.$$

2.1.2 $(\rho^{-1})' + |\vec{u'}|^2 = 0, \quad V\rho^{-1} + W(WV' - VW') = 0$. Система (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &U'(rp_t + (W - r)p_\tau + Vrp_r) + (U'(U - V\Phi) + \rho^{-1})p_\Phi = 0,\\ &V'(rp_t + (W - r)p_\tau) + (VV' + \rho^{-1})rp_r + (V'(U - V\Phi) - \rho^{-1}\Phi)p_\Phi = W^2,\\ &W'(rp_t + Vrp_r + (U - V\Phi)p_\Phi) + (W'(W - r) + \rho^{-1})p_\tau = -VW. \end{aligned} \tag{4.9}$$

2.1.2.1 $U' = 0 \Rightarrow p_\Phi = 0, \quad U = 0, \quad W \neq 0$. Из (4.1) следует

$$\begin{aligned} &\vec{u}\cdot\vec{u}'rp_t + V(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}')rp_r + (W(\rho^{-1} + \vec{u}\cdot\vec{u}') - r\vec{u}\cdot\vec{u}')p_\tau = 0,\\ &W'rp_r - V'p_\tau = \rho W\vec{u}\cdot\vec{u}'. \end{aligned} \tag{4.10}$$

После замены $V = q\cos\vartheta, \quad W = q\sin\vartheta$ равенства принимают вид

$$\begin{aligned} &q'rp_t + (\rho^{-1} + qq')\cos\vartheta rp_r + ((\rho^{-1} + qq')\sin\vartheta - rq')p_\tau = 0,\\ &(q' + q^3\vartheta'^2\rho)rp_r - \rho q^2\vartheta'(q' - q\vartheta')p_\tau = \rho q^2 q',\\ &(\rho^{-1})' + q'^2 + q^2\vartheta'^2 = 0, \qquad \rho q^2\vartheta' = \operatorname{ctg}\vartheta. \end{aligned}$$

Если $q' = 0$, то $q = q_0 \neq 0, \vartheta' \neq 0$, остается одно уравнение для определения функции p

$$p_r\cos\vartheta + p_\tau\sin\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; q_0\tau - a(\rho)\ln r = \chi(t,\rho),$$

где a – скорость звука ($a^2 = p'(\rho)$). Из остальных равенств определяются

$$W = Cq_0\rho, \quad V = q_0\sqrt{1 - C^2\rho^2}$$

и уравнение состояния

$$p = p_0 + q_0^2\left(-\rho + \frac{1}{2C}\ln\left|\frac{1 + C\rho}{1 - C\rho}\right|\right), \quad 0 < \rho < C^{-1}.$$

Если $q' \neq 0$, то в случае $\vartheta \neq \pi/2$ первое уравнение для p имеет общий интеграл

$$\operatorname{ctg}(\tau + t) - \ln r = \varphi(I, p), \quad I = r - t(q + (q'\rho)^{-1})\cos\vartheta.$$

Подстановка производных функции p, найденных из этого равенства, во второе уравнение приводит к равенству

$$\begin{aligned}(q' + q^3\rho\vartheta'^2)(1 + r\varphi_I) + \rho q^2\vartheta'(q' - q\vartheta')\operatorname{ctg}\vartheta \\ + \rho q^2 q'\left[\varphi_p - \varphi_I(r - I)\ln\left|\cos\vartheta(q + (\rho q')^{-1})\right| + \frac{\vartheta'(\varphi + \ln r)}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\right] = 0.\end{aligned}$$

Здесь переменная r свободная. Приравнивая нулю коэффициент при $\ln r$, получим $\vartheta' = 0$. Последнее равенство определяет $\vartheta = \pi/2$. Противоречие. Значит, при $q' \neq 0$ должно быть $\vartheta = \pi/2 \Rightarrow V = 0$. В этом случае уравнения (4.10) принимают вид

$$rp_r = \rho W^2, \quad W'rp_t + (\rho^{-1} + W'(W - r))p_\tau = 0.$$

Общий интеграл первого уравнения

$$\int \rho^{-1}W^{-2}dp = \ln r - \ln\psi(t, \tau)$$

подставляем во второе уравнение и расщепляем по переменной r

$$\psi_t - \psi_\tau = 0 \Rightarrow \psi(\theta),$$
$$(\rho^{-1} + WW')\psi'(\theta) = 0.$$

Если $\psi' = 0$, то получаем стационарное радиальное решение

$$\int \rho^{-1}W^{-2}dp = \ln r + C, \quad \rho' = \rho^2 W'^2,$$

инвариантное относительно подалгебры $\{X_1, X_{10}, X_7\}$ из другой цепочки подалгебр.

Если $\psi' \neq 0$, то решение имеет вид

$$W = C(p - p_0) \neq 0, \quad p - p_0 = r^{-1}\psi(\theta)$$

для уравнения состояния $p = p_0 - C^{-2}\rho^{-1}$, инвариантное относительно подалгебры $\{X_1, X_{10}\}$ из другой цепочки подалгебр.

2.1.2.2 $U' \neq 0$. Из системы (4.9) определим производные

$$\begin{aligned}&rp_r = (V'U'^{-1} + \Phi)p_\Phi + \rho W^2, \\ &p_\tau = W'U'^{-1}p_\Phi - \rho VW, \\ &rp_t = U'^{-1}(rW' - \rho^{-1} - \vec{u}\cdot\vec{u}')p_\Phi - r\rho VW.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Для однородного уравнения

$$Vrp_r + Wp_\tau - \left[V(V'U'^{-1} + \Phi) + WW'U'^{-1}\right]p_\Phi = 0$$

при $V \neq 0$ запишем общее решение

$$\tau = WV^{-1}\ln r + \psi(t, p, I), \quad I = r\left(\Phi + \frac{VV' + WW'}{VU'}\right).$$

Вычислим производные функции p и подставим во второе уравнение системы (4.11)

$$1+\frac{W'}{U'}r\psi_I+VW\rho\left[\left(\frac{W}{V}\right)'\ln r+\psi_p+r\psi_I\left(\frac{VV'+WW'}{VU'}\right)'\right]=0.$$

Здесь переменная r свободная. Расщепление приводит к соотношению $V=CW$ и из условия пункта 2.1.2 следует $V=0$. Противоречие. Значит, в настоящем пункте $V=0$. Тогда выполняются уравнения

$$\begin{aligned}
&rp_r=\Phi p_\Phi+\rho W^2,\\
&p_\tau=W'U'^{-1}p_\Phi,\\
&rp_t=p_\Phi U'^{-1}(rW'-\rho^{-1}-\vec{u}\cdot\vec{u}').
\end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения

$$\Phi=-W'U'^{-1}\tau+\psi(t,r,p)$$

подставляем в два оставшихся уравнения и расщепляем по свободной переменной τ. Получим уравнение подмодели

$$\frac{W'}{U'}+\rho W^2\left(\frac{W'}{U'}\right)'=0$$

и два уравнения для функции ψ

$$(r\psi)_r=-\rho W^2\psi_p,\quad (r\psi)_t=-r\frac{W'}{U'}+\frac{\rho^{-1}+\vec{u}\cdot\vec{u}'}{U'}.$$

Совместность этих уравнений приводит к еще одному уравнению подмодели

$$W\left(\frac{\rho^{-1}+\vec{u}\cdot\vec{u}'}{U'}\right)'=0.$$

Если $W=0$, то формулы пункта 2.1.2 задают одномерную простую волну

$$x=r\Phi=t(U+a)+G(p),\quad \rho aU'=1,$$

где a – скорость звука, $G(p)$ – произвольная функция.

Если $W\neq 0$, то с точностью до галилеева переноса выполняется интеграл Бернулли $\rho^{-1}+\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$, условия пункта $(\rho^{-1})'+U'^2+W'^2=0$ и уравнение совместности

$$\rho^{-1}W^{-2}W'+U'(W'U'^{-1})'=0.$$

Из этих соотношений следуют равенства

$$UU''+WW''=0,\quad W^{-1}W'+U'^{-1}U''=0\Rightarrow WU'=D\neq 0.$$

Эти уравнения интегрируются в квадратурах

$$Ddp=WdU=\frac{WdW}{\chi(W)},\quad \frac{dW}{W}=\frac{d\chi}{\sqrt{\chi^2+2\ln\chi+E}}.$$

Интеграл Бернулли определяет уравнение состояния. Зависимость газодинамических функций от независимых переменных задается формулой

$$\Phi+\chi(W)(t+\tau)=r^{-1}\omega(r\chi(W)),$$

где $\omega(I)$ – произвольная функция.

2.2 $p'=0$. Движение с постоянными термодинамическими параметрами $p=p_0$, $S=S_0$, $\rho=\rho_0$. Система (3.1) принимает вид

$$U'=0,\quad rV'D\alpha=W^2,\quad rW'D\alpha=-VW\Rightarrow VV'+WW'=0,$$
$$V'(r\alpha_r-\Phi\alpha_\Phi)+W'\alpha_\tau+V=0,\quad rD=(W-r)\partial_\tau+r\partial_t+Vr\partial_r-\Phi V\partial_\Phi.$$

Отсюда следует с точностью до галилеевого переноса
$$U = 0, \quad V = q_0 \cos\vartheta, \quad W = q_0 \sin\vartheta, \quad \vartheta \neq \mathrm{const}.$$
В качестве α можно взять ϑ. Общее решение дифференциальных уравнений задается неявно
$$\tau + \vartheta + q_0^{-1} r\cos\vartheta + \psi(I, q_0^{-1}x), \quad I = t - q_0^{-1} r\cos\vartheta.$$
Здесь ψ — произвольная функция.

Проделанные вычисления суммируем в виде утверждения.

Теорема 4.1. *Классификация частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1 на подалгебре 4.3 с точностью до преобразований из группы с алгеброй L_{11} такова.*

1. Решения редуцируемые к инвариантным из рассматриваемой цепочки подалгебр из пункта 1.1.

2. Решения редуцируемые к инвариантным из другой цепочки подалгебр из пунктов 1.2 и 2.1.2.1.

3. Подмодели из нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений из пунктов 2.1.1.1, 2.1.1.2.

4. Простые волны с произвольными функциями из пунктов 2.1.2.2 и 2.2.

5. Заключение

В данной работе рассмотрена цепочка вложенных подалгебр 11-мерной алгебры Ли для идеальной модели газодинамического типа. Для подалгебр выбраны согласованные инварианты. На их основе построена цепочка инвариантных подмоделей. Доказано, что решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей из рассматриваемой цепочки.

Рассмотрена нерегулярная подмодель ранга 1 дефекта 1 4-мерной подалгебры из рассматриваемой цепочки. Найденные частично-инвариантные решения были классифицированы методом альтернативных предположений. Получены новые решения, которые могут быть частными решениями инвариантных подмоделей относительно подалгебр, вложенных в рассматриваемую 4-мерную подалгебру и не обязательно из рассмотренной цепочки. Получены замкнутые подмодели из нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а также решения типа простых волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.А. Чиркунов С.В. Хабиров. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: НГТУ. 2012.
2. С.В. Хабиров. *Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: БГУ. 2013.
3. Т.Ф. Мукминов, С.В. Хабиров. *Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды* // Сибирские электронные математические известия. **16**, 121–143 (2019).
4. С.В. Хабиров. *Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений* // Сибирский математический журнал. **54**:6, 1396–1406 (2013).
5. Л.В. Овсянников. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978.
6. Л.В. Овсянников. *Некоторые итоги выполнения программы "Подмодели"для уравнений газовой динамики* // Прикладная математика и механика. **63**:3, 362–372 (1999).
7. Л.В. Овсянников. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. **30**:10, 1792–1799 (1994).
8. Е.В. Мамонтов. *Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики* // Прикладная механика и техническая физика. **40**:2, 50–55 (1999).
9. Л.В. Овсянников. *Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики* // Прикладная механика и техническая физика. **37**:2, 3–13 (1996).

10. С.В. Хабиров. *Подмодель винтовых движений в газовой динамике* // Прикладная математика и механика. **60**:1, 53–65 (1996).
11. С.В. Мелешко. *Групповая классификация уравнений движения газа в постоянном поле сил* // Прикладная механика и техническая физика. **37**:1, 42–47 (1996).
12. С.В. Мелешко. *Групповая классификация уравнений двумерных движений газа* // Прикладная математика и механика. **58**:4, 56–62 (1994).
13. Л.В. Овсянников. *О "простых"решениях уравнений газовой динамики* // Прикладная механика и техническая физика. **40**:2, 2–12 (1999).
14. С.В. Головин. *Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики* // Прикладная механика и техническая физика. **38**:1, 3–10 (1997).
15. С.В. Хабиров. *Инвариантные движения частиц общей трехмерной подгруппы группы всех пространственных переносов* // Челябинский физико математический журнал. **5**:4, ч. 1. 400–414 (2020).
16. Л.В. Овсянников. *Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения* // Доклады академии наук. **343**:2, 156–159 (1995).
17. Л.В. Овсянников. *Двойные звуковые волны* // Сибирский математический журнал. **36**:3, 611–618 (1995).
18. С.В. Хабиров. *Простые волны семимерной подалгебры всех пространственных переносов в газовой динамике* // Прикладная механика и техническая физика. **55**:2, 199–203 (2014).
19. С.В. Хабиров. *Простые частично инвариантные решения* // Уфимский математический журнал. **11**:1, 87–98 (2019).
20. Л.В. Овсянников. *Лекции по основам газовой динамики.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
пр. Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: `habirov@anrb.ru`

Тимур Флюрович Мукминов,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
пр. Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: `mukminov.tf@yandex.ru`