

УДК 512.533.72, 517.986

## ТРИВИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУГРУПП И ПОЛУГРУППОВЫЕ $C^*$ -АЛГЕБРЫ

Е.В. ЛИПАЧЕВА

**Аннотация.** Предметом исследования в статье являются приведенные полугрупповые  $C^*$ -алгебры для полугрупп, обладающих свойством левого сокращения. Такая алгебра представляет собой очень естественный объект, так как она порождается изометрическими операторами сдвига, принадлежащими образу левого регулярного представления полугруппы с левым сокращением. Эти операторы действуют в гильбертовом пространстве всех квадратично суммируемых комплекснозначных функций, заданных на полугруппе. Изучается вопрос о функториальности инволютивных гомоморфизмов полугрупповых  $C^*$ -алгебр, то есть вопрос о существовании канонического вложения полугрупповых  $C^*$ -алгебр, индуцированного вложением соответствующих полугрупп. Для этого мы исследуем приведенные полугрупповые  $C^*$ -алгебры, которые соответствуют полугруппам, участвующим в построении нормальных расширений полугрупп с помощью групп. При этом в статье рассматривается один из простейших классов расширений полугрупп, а именно, класс так называемых тривиальных расширений. Показывается, что если полугруппа  $L$  является тривиальным расширением полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ , то существует вложение приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(S)$  в  $C^*$ -алгебру  $C_r^*(L)$ , индуцированное вложением  $S$  в  $L$ .

Также в работе вводится и изучается структура банахова  $C_r^*(S)$ -модуля на подлежащем пространстве приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$ . Для этого используется топологическая градуировка  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  над группой  $G$ . В случае, когда полугруппа  $L$  является тривиальным расширением полугруппы  $S$  с помощью конечной группы, доказывается, что на подлежащем банаховом пространстве приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  существует структура свободного банахова модуля над  $C^*$ -алгеброй  $C_r^*(S)$ .

Для более полной характеристики рассматриваемых вопросов и выявления связей с полученными ранее результатами в статье приводятся примеры расширений полугрупп и редуцированных полугрупповых  $C^*$ -алгебр.

**Ключевые слова:** полугруппа с сокращением, нормальное расширение полугруппы, тривиальное расширение полугруппы, приведенная полугрупповая  $C^*$ -алгебра, вложение полугрупповой  $C^*$ -алгебры, банахов модуль, свободный модуль.

**Mathematics Subject Classification:** 46H25, 47L30, 20M15

## ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена изучению нормальных расширений полугрупп с сокращением и соответствующих полугрупповых  $C^*$ -алгебр.

Приведенные полугрупповые  $C^*$ -алгебры – это операторные алгебры, порожденные левыми регулярными представлениями полугрупп с сокращением. Впервые такие алгебры

---

E.V. LIPACHEVA, TRIVIAL EXTENSIONS OF SEMIGROUPS AND SEMIGROUP  $C^*$ -ALGEBRAS.

© Липачева Е.В. 2022.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Поступила 2 декабря 2021 г.

изучались в работах Кобурна [1], [2] и Дугласа [3]. Они рассмотрели приведенные полугрупповые  $C^*$ -алгебры для полугрупп, являющихся положительными конусами упорядоченных подгрупп в аддитивной группе всех вещественных чисел. Свое дальнейшее изучение эти алгебры получили в работах Мерфи [4], [5], Ники [6], Лаки и Рэйберна [7], Ли [8] и др.

Настоящая работа является продолжением исследований приведенных полугрупповых  $C^*$ -алгебр, начатых в [9]– [13]. При этом мы рассматриваем полугрупповые  $C^*$ -алгебры, соответствующие полугруппам, участвующим в построении расширений полугрупп.

Теория расширений полугрупп играет важную роль при изучении структуры и характеристик полугрупп, в частности, их когомологий (см., например, [14]). В исследованиях по полугруппам рассматриваются различные виды расширений: идеальные расширения [15], шрайеровы [16], нормальные расширения [17], [18]. В [19] изучалось действие функтора стоун-чеховской компактификации на нормальных расширениях полугрупп.

Данная статья нацелена на выявление связей между расширениями полугрупп и соответствующими полугрупповыми  $C^*$ -алгебрами и дополняет исследования, проведенные в работах [20]– [22]. В ней рассматривается один из простейших типов нормальных расширений, а именно, тривиальные расширения. Если  $L$  является тривиальным расширением  $S$  с помощью конечной группы, то подлежащее пространство  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  можно наделить структурой свободного банахова модуля над  $C^*$ -алгеброй  $C_r^*(S)$ . При доказательстве этого факта использовалась топологическая градуировка  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$ , построение которой описано в [12]. Напомним, что понятие топологически градуированной  $C^*$ -алгебры было введено Экселем [23] с целью распространения понятий гармонического анализа на некоммутативный случай.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 1 приводятся необходимые сведения из теории расширений полугрупп, теории полугрупповых  $C^*$ -алгебр и банаховых модулей. Раздел 2 посвящен вопросу о функториальности морфизмов полугрупповых  $C^*$ -алгебр, который в общем виде был поднят в работе [8] и изучался в [22] применительно к приведенным полугрупповым  $C^*$ -алгебрам, построенным по полугруппам, одна из которых является нормальным расширением другой. В разделе 3 на подлежащем пространстве  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  вводится и исследуется структура банахова  $C_r^*(S)$ -модуля при условии, что полугруппа  $L$  является тривиальным расширением  $S$  с помощью группы.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $S$  и  $L$  – дискретные полугруппы с левым сокращением, а  $G$  – группа с единицей  $e$ . Пусть имеется инъективный гомоморфизм полугрупп  $\tau : S \rightarrow L$  и сюръективный полугрупповой гомоморфизм  $\sigma : L \rightarrow G$ . Тройку  $(L, \tau, \sigma)$  назовем *нормальным расширением* полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ , если  $\tau(S)$  является полным прообразом единицы группы  $G$ , т.е.

$$\sigma^{-1}(e) = \tau(S).$$

Саму полугруппу  $L$  тоже будем называть расширением полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ . Общие определения расширений полугрупп можно найти в [17], [24].

Пусть множество  $X$  такое, что  $X \subset L \setminus \tau(S)$  и  $X \cap \sigma^{-1}(g) = \{x_g\}$  для любого  $g \in G$ ,  $g \neq e$ . Будем говорить, что расширение  $(L, \tau, \sigma)$  полугруппы  $S$  порождается множеством  $X$ , если каждый элемент  $y \in L \setminus \tau(S)$  единственным образом представляется в виде  $y = \tau(a)x_g$  для некоторых  $a \in S$  и  $g \in G$ . В этом случае каждое подмножество  $\sigma^{-1}(g)$ ,  $g \neq e$ , имеет вид

$$\sigma^{-1}(g) = \tau(S)x_g := \{\tau(a)x_g \mid a \in S\}.$$

Отметим, что расширения, обладающие порождающими множествами, являются шрайеровыми расширениями (см. [14]).

Два расширения  $(L, \tau, \sigma)$  и  $(L', \tau', \sigma')$  полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$  называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм полугрупп  $\psi : L \longrightarrow L'$ , делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \tau \nearrow & & \searrow \sigma \\ S & & G \\ \tau' \searrow & & \nearrow \sigma' \\ & L' & \end{array}$$

Рассмотрим декартово произведение  $S \times G$  полугруппы  $S$  и группы  $G$ . Оно является полугруппой с операцией умножения

$$(a, g) \cdot (b, h) = (ab, gh), \quad (1.1)$$

где  $a, b \in S$ ,  $g, h \in G$ . Расширение вида  $(S \times G, \tau, \sigma)$ , где  $\tau(a) = (a, e)$  и  $\sigma(a, g) = g$  для любых  $a \in S$ ,  $g \in G$ , или любое, ему эквивалентное, называется *тривиальным* расширением полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ .

Напомним далее определение приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры. Пусть  $P$  – дискретная полугруппа с левым сокращением. Введем в рассмотрение гильбертово пространство на этой полугруппе. Это пространство есть пространство  $l^2(P)$  квадратично суммируемых комплекснозначных функций на  $P$ . Обозначим через  $e_p$ ,  $p \in P$ , функцию пространства  $l^2(P)$ , определяемую формулой

$$e_p(q) := \begin{cases} 1, & \text{если } p = q; \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases}$$

где  $q \in P$ . Тогда множество функций  $\{e_p \mid p \in P\}$  представляет собой ортонормированный базис гильбертова пространства  $l^2(P)$ .

В алгебре всех ограниченных линейных операторов  $B(l^2(P))$  на пространстве  $l^2(P)$  рассмотрим  $C^*$ -подалгебру  $C_r^*(P)$ , порожденную множеством изометрий  $\{T_p \mid p \in P\}$ , где  $T_p(e_q) = e_{pq}$ ,  $p, q \in P$ . Она называется *приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгеброй*. Единичный элемент этой алгебры будем обозначать через  $I$ .

Если  $P = \mathbb{N}$  – аддитивная полугруппа натуральных чисел, то приведенная полугрупповая  $C^*$ -алгебра  $C_r^*(\mathbb{N})$  называется *алгеброй Теплица* и обозначается символом  $\mathcal{T}$ .

Опишем плотную подалгебру в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(P)$ . Для каждого элемента  $p \in P$  рассмотрим символы  $T_p^{-1}$  and  $T_p^1$ . Обозначим через  $\mathcal{F}(P)$  свободную полугруппу слов, составленных из букв алфавита  $\{T_p^{-1}, T_p^1 \mid p \in P\}$ . Полугруппа  $\mathcal{F}(P)$  является инволютивной полугруппой. Произвольный элемент этой полугруппы – это слово (*моном*) вида

$$V_{\bar{p}} := T_{p_1}^{i_1} T_{p_2}^{i_2} \dots T_{p_k}^{i_k}, \quad (1.2)$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$  – элемент  $k$ -кратного декартова произведения  $P^{\times k} := P \times \dots \times P$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Число  $k$  в записи (1.2) назовем *длиной* монома.

Операция инволюции на полугруппе  $\mathcal{F}(P)$  задается формулой

$$V_{\bar{p}}^* = T_{p_k}^{-i_k} T_{p_{k-1}}^{-i_{k-1}} \dots T_{p_1}^{-i_1}.$$

Каждый моном  $V_{\bar{p}}$  определяет ограниченный линейный оператор  $\widehat{V}_{\bar{p}}$  на гильбертовом пространстве  $l^2(P)$  следующим образом:

$$\widehat{T}_p^1 := T_p, \quad \widehat{T}_p^{-1} := T_p^*,$$

и для любого монома  $V_{\bar{p}}$  вида (1.2) положим

$$\widehat{V}_{\bar{p}} := \widehat{T}_{p_1}^{i_1} \widehat{T}_{p_2}^{i_2} \dots \widehat{T}_{p_k}^{i_k}. \quad (1.3)$$

Назовем  $\widehat{V}_{\bar{p}}$  операторным мономом.

Конечные линейные комбинации операторов вида (1.3)

$$A = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{V}_{\bar{p}_i} \quad (1.4)$$

образуют плотную инволютивную подалгебру в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(P)$ , которую будем обозначать  $\mathcal{P}(P)$ .

Далее мы напомним необходимые определения из книги [25], связанные с модулями. Под модулем мы будем понимать левый модуль.

Пусть  $\mathfrak{A}$  – унитарная  $C^*$ -алгебра. Модуль  $\mathfrak{M}$  над  $C^*$ -алгеброй  $\mathfrak{A}$  называется банаховым  $\mathfrak{A}$ -модулем, если он является банаховым пространством с нормой, удовлетворяющей неравенству:  $\|A \cdot M\| \leq \|A\| \|M\|$ , где  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $M \in \mathfrak{M}$ .

Элемент  $M$  в банаховом  $\mathfrak{A}$ -модуле  $\mathfrak{M}$  называется циклическим, если выполняется равенство

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cdot M := \{A \cdot M \mid A \in \mathfrak{A}\}.$$

Банахов модуль, обладающий циклическим элементом, называется циклическим модулем.

Пусть  $E$  – банахово пространство. На проективном тензорном произведении  $\mathfrak{A} \widehat{\otimes} E$  существует структура унитарного левого банахова  $\mathfrak{A}$ -модуля, которая однозначно задается формулой

$$A \cdot (B \otimes X) = AB \otimes X, \quad A, B \in \mathfrak{A}, \quad X \in E.$$

Банахов модуль называется свободным унитарным банаховым  $\mathfrak{A}$ -модулем, если он топологически изоморфен модулю  $\mathfrak{A} \widehat{\otimes} E$  для некоторого банахова пространства  $E$ .

Например, сама  $C^*$ -алгебра  $\mathfrak{A}$  является свободным унитарным банаховым  $\mathfrak{A}$ -модулем. Также банахова прямая  $l_1$ -сумма  $n$  копий модуля  $\mathfrak{A}$  является свободным банаховым  $\mathfrak{A}$ -модулем, поскольку имеет место топологический изоморфизм унитарных банаховых  $\mathfrak{A}$ -модулей

$$\bigoplus_1 \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A} \widehat{\otimes} \mathbb{C}^n.$$

## 2. ВЛОЖЕНИЯ ПОЛУГРУППОВЫХ $C^*$ -АЛГЕБР, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТРИВИАЛЬНЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ ПОЛУГРУПП

В этом параграфе мы дополним результаты, полученные в работе [22], о вложении полугрупповых  $C^*$ -алгебр, соответствующих полугруппам, образующим нормальное расширение полугрупп.

**Теорема 2.1.** Пусть  $S$  – полугруппа с левым сокращением и  $(L, \tau, \sigma)$  – тривиальное расширение полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ . Тогда существует единственный изометрический  $*$ -гомоморфизм  $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$ , такой, что  $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $(L, \tau, \sigma)$  – тривиальное расширение, то с точностью до изоморфизма полугрупп, мы имеем равенство

$$L = S \times G.$$

При этом  $\tau(a) = (a, e)$  и  $\sigma(a, g) = g$  для любых  $a \in S$ ,  $g \in G$ .

Существует канонический изоморфизм  $C^*$ -алгебр [8, лемма 2.16]:

$$\psi : C_r^*(S \times G) \longrightarrow C_r^*(S) \otimes_{\min} C_r^*(G) : T_{(a,g)} \mapsto T_a \otimes T_g.$$

Зададим отображение

$$\theta : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(S) \otimes_{\min} C_r^*(G) : A \mapsto A \otimes I.$$

Очевидно,  $\theta$  – инъективный  $*$ -гомоморфизм  $C^*$ -алгебр. Тогда отображение

$$\varphi := \psi^{-1} \circ \theta : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(S \times G)$$

является инъективным  $*$ -гомоморфизмом. Осталось проверить, что  $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$ . Действительно, поскольку  $\psi(T_{(a,e)}) = T_a \otimes I$ , то  $\varphi(T_a) = T_{(a,e)} = T_{\tau(a)}$ .  $\square$

Заметим, что теорема 2.1 может быть доказана и без использования леммы 2.16 из [8]. Это можно сделать таким же способом, которым доказывалась теорема 3.1 в [22].

Приведем набросок доказательства. Представим гильбертово пространство  $l^2(S \times G)$  в виде прямой суммы своих подпространств

$$l^2(S \times G) = \bigoplus_{g \in G} H_g,$$

где базисом подпространства  $H_g$  является множество  $\{e_{(a,g)} \mid a \in S\}$ . Каждое подпространство  $H_g$  инвариантно относительно любого оператора  $T_{(a,e)}$  и  $T_{(a,e)}^*$ ,  $a \in S$ , и относительно любого операторного монома вида

$$\widehat{V}_{(\bar{a}, \bar{e})} := \widehat{T}_{(a_1, e)}^{i_1} \widehat{T}_{(a_2, e)}^{i_2} \dots \widehat{T}_{(a_k, e)}^{i_k},$$

где  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S^{\times k}$ ,  $\bar{e} = (e, \dots, e) \in G^{\times k}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Затем зададим отображение  $\varphi$  равенствами  $\varphi(T_a) = T_{(a,e)}$ ,  $\varphi(T_a^*) = T_{(a,e)}^*$  и продолжим его на операторные мономы  $\widehat{V}_{\bar{a}}$  вида (1.3):

$$\varphi(\widehat{V}_{\bar{a}}) = \widehat{V}_{(\bar{a}, \bar{e})}$$

и на конечные линейные комбинации  $A$  вида (1.4):

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(\widehat{V}_{\bar{a}_i}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{V}_{(\bar{a}_i, \bar{e})}.$$

Корректность такого продолжения показывается с помощью унитарных операторов

$$U_g : l^2(S) \longrightarrow H_g : e_a \mapsto e_{(a,g)},$$

для любых  $a \in S$ ,  $g \in G$ . Построенное отображение  $\varphi$  есть унитарный  $*$ -гомоморфизм из алгебры  $\mathcal{P}(S)$  в  $C^*$ -алгебру  $C_r^*(S \times G)$ .

Наконец, можно показать, что для любого  $A \in \mathcal{P}(S)$  справедливо равенство

$$\varphi(A) = \bigoplus_{g \in G} U_g A U_g^*.$$

Следовательно,  $\varphi$  является изометрическим  $*$ -гомоморфизмом. Осталось продолжить  $\varphi$  до изометрического  $*$ -гомоморфизма на всю  $C^*$ -алгебру  $C_r^*(S)$ .

Отметим, что если полугруппа  $S$  содержит единицу  $e$ , то тривиальное расширение  $L$  обладает порождающим множеством. Действительно, как нетрудно проверить, порождающим множеством является

$$X = \{(e, g) \mid g \in G\}.$$

Тогда существование изометрического  $*$ -гомоморфизма  $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$  следует из [22, теорема 3.1]. С другой стороны, теорема 2.1 доставляет нам пример расширения  $L$  полугруппы  $S$ , которое не обладает порождающим множеством, но вложение  $C^*$ -алгебр  $C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$  существует.

**Пример 2.1.** Возьмем в качестве полугруппы  $S$  аддитивную полугруппу натуральных чисел  $\mathbb{N}$ . Пусть  $G$  – произвольная группа с единицей  $e$ . Тогда декартово произведение  $\mathbb{N} \times G$  является полугруппой относительно умножения

$$(n, g)(m, h) = (n + m, gh), \quad (2.1)$$

где  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $g, h \in G$ . Расширение  $(\mathbb{N} \times G, \tau, \sigma)$  полугруппы  $\mathbb{N}$ , где  $\tau(n) = (n, e)$  и  $\sigma(n, g) = g$ , не обладает порождающим множеством. Действительно, пусть такое множество  $X$  существует. Тогда элемент  $x_g = (x, g) \in X$  должен представляться в виде  $(x, g) = \tau(n)(x, g)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Но тогда  $(x, g) = (n + x, g)$ , и, следовательно,  $n = 0$ . Получили противоречие. С другой стороны, по теореме 2.1 существует изометрический  $*$ -гомоморфизм

$$\varphi : C_r^*(\mathbb{N}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{N} \times G),$$

такой, что  $\varphi(T_n) = T_{\tau(n)}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3. ТРИВИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУГРУПП И МОДУЛИ НАД ПОЛУГРУППОВЫМИ $C^*$ -АЛГЕБРАМИ

Пусть на протяжении всего параграфа  $(L, \tau, \sigma)$  – тривиальное расширение полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ . То есть с точностью до изоморфизма полугрупп, мы будем иметь ввиду равенство

$$L = S \times G.$$

Причем  $\tau(a) = (a, e)$  и  $\sigma(a, g) = g$  для любых  $a \in S$ ,  $g \in G$ .

Для доказательства основного результата настоящего параграфа мы воспользуемся топологической градуировкой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  над группой  $G$ . Построение такой градуировки было обосновано и проведено в работе [12] для произвольной приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры при условии существования сюръективного полугруппового гомоморфизма из соответствующей полугруппы на группу  $G$ . Определения градуированной и топологически градуированной  $C^*$ -алгебры содержатся в [23, §§16.2, 19.2]. Далее мы приведем краткое описание конструкции, позволяющей получить топологическую градуировку  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  над группой  $G$ .

Поскольку  $(L, \tau, \sigma)$  является расширением полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ , то мы имеем сюръективный полугрупповой гомоморфизм

$$\sigma : L \longrightarrow G.$$

Для полугруппы  $L$  рассмотрим свободную полугруппу  $\mathcal{F}(L)$  мономов вида (1.2), составленных из букв алфавита  $\{T_x^{-1}, T_x^1 \mid x \in L\}$ :

$$V_{\bar{x}} := T_{x_1}^{i_1} T_{x_2}^{i_2} \dots T_{x_k}^{i_k},$$

где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in L^{\times k}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Зададим отображение  $\text{ind} : \mathcal{F}(L) \longrightarrow G$  формулой

$$\text{ind}(V_{\bar{x}}) = \sigma(x_1)^{i_1} \sigma(x_2)^{i_2} \dots \sigma(x_k)^{i_k}.$$

Легко видеть, что отображение  $\text{ind}$  является инволютивным сюръективным гомоморфизмом полугрупп. Значение  $\text{ind}(V_{\bar{x}})$  называется  $\sigma$ -индексом монома  $V_{\bar{x}}$ .

В [12, лемма 1] было показано, что если два монома определяют один и тот же операторный моном, то их  $\sigma$ -индексы совпадают, т.е. если  $\widehat{V}_{\bar{x}} = \widehat{V}_{\bar{y}}$ , то  $\text{ind}(V_{\bar{x}}) = \text{ind}(V_{\bar{y}})$ . Поэтому величину  $\text{ind}(V_{\bar{x}}) \in G$  также можно назвать  $\sigma$ -индексом операторного монома  $\widehat{V}_{\bar{x}}$ .

Легко проверить, что множество мономов  $\sigma$ -индекса  $e$  образует инволютивную подполугруппу в полугруппе всех мономов  $\mathcal{F}(L)$ .

Пусть  $\mathfrak{A}_e$  обозначает  $C^*$ -подалгебру в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$ , порожденную множеством всех операторных мономов  $\sigma$ -индекса  $e$ .

Пусть  $\mathfrak{A}_g$  обозначает банахово подпространство в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$ , являющееся замыканием линейной оболочки множества всех операторных мономов  $\sigma$ -индекса  $g$ ,  $g \in G$ .

Семейство подпространств  $\{\mathfrak{A}_g \mid g \in G\}$  образует топологическую  $G$ -градуировку приведенной полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  [12, теорема 2].

Далее мы докажем одну техническую лемму.

**Лемма 3.1.** *Пусть  $S$  – полугруппа с левым сокращением и  $G$  – группа с единицей  $e$ . Тогда в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$  для любых  $a_1, \dots, a_k \in S$  и  $g_1, \dots, g_k \in G$  выполняется равенство для операторных мономов*

$$\widehat{T}_{(a_1, g_1)}^{i_1} \cdots \widehat{T}_{(a_{k-1}, g_{k-1})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k, g_k)}^{i_k} = \widehat{T}_{(a_1, e)}^{i_1} \cdots \widehat{T}_{(a_{k-1}, e)}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k, g^{i_k})}^{i_k}, \quad (3.1)$$

где  $g = g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdots g_k^{i_k}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный моном

$$\widehat{T}_{(a_1, g_1)}^{i_1} \cdots \widehat{T}_{(a_{k-1}, g_{k-1})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k, g_k)}^{i_k}.$$

Докажем лемму индукцией по длине монома  $k$ .

Пусть  $k = 2$ . Тогда равенство (3.1) примет вид:

$$\widehat{T}_{(a, p)}^i \widehat{T}_{(b, q)}^j = \widehat{T}_{(a, e)}^i \widehat{T}_{(b, (p^i q^j)^j)}^j, \quad (3.2)$$

где  $a, b \in S$ ,  $p, q \in G$ ,  $i, j \in \{-1, 1\}$ . Докажем его. Для этого рассмотрим четыре случая.

1) Пусть  $i = j = 1$ . Тогда

$$T_{(a, p)} T_{(b, q)} = T_{(ab, pq)} = T_{(a, e)} T_{(b, pq)}.$$

2) Пусть  $i = j = -1$ . Тогда

$$T_{(a, p)}^* T_{(b, q)}^* = T_{(ba, qp)}^* = (T_{(b, qp)} T_{(a, e)})^* = T_{(a, e)}^* T_{(b, (p^{-1} q^{-1})^{-1})}^*.$$

3) Пусть  $i = -1$ ,  $j = 1$ . Вычислим  $T_{(a, p)}^* T_{(b, q)}$  на произвольном базисном векторе  $e_{(c, h)} \in l^2(S \times G)$ . Если  $T_{(a, p)}^* T_{(b, q)} e_{(c, h)} \neq 0$ , то

$$T_{(a, p)}^* T_{(b, q)} e_{(c, h)} = e_{(d, p^{-1} q h)}$$

для некоторого  $d \in S$ , такого, что  $ad = bc$ . Действительно, скалярное произведение

$$\langle T_{(a, p)}^* T_{(b, q)} e_{(c, h)}, e_{(d, p^{-1} q h)} \rangle = \langle e_{(bc, qh)}, T_{(a, p)} e_{(d, p^{-1} q h)} \rangle = \langle e_{(bc, qh)}, e_{(ad, qh)} \rangle \neq 0$$

в том и только том случае, если  $ad = bc$ . С другой стороны, в этом случае

$$T_{(a, e)}^* T_{(b, p^{-1} q)} e_{(c, h)} = e_{(d, p^{-1} q h)}.$$

Если такого  $d$  не существует, то

$$T_{(a, p)}^* T_{(b, q)} e_{(c, h)} = T_{(a, e)}^* T_{(b, p^{-1} q)} e_{(c, h)} = 0.$$

Таким образом, мы имеем равенство операторов

$$T_{(a, p)}^* T_{(b, q)} = T_{(a, e)}^* T_{(b, p^{-1} q)}.$$

4) Пусть  $i = 1$ ,  $j = -1$ . Снова вычислим  $T_{(a, p)} T_{(b, q)}^*$  на произвольном базисном векторе  $e_{(c, h)} \in l^2(S \times G)$ . Если  $T_{(a, p)} T_{(b, q)}^* e_{(c, h)} \neq 0$ , то

$$T_{(a, p)} T_{(b, q)}^* e_{(c, h)} = e_{(ad, pq^{-1} h)}$$

для некоторого  $d \in S$ , такого, что  $c = bd$ . С другой стороны, в этом случае имеем

$$T_{(a, e)} T_{(b, qp^{-1})}^* e_{(c, h)} = e_{(ad, (qp^{-1})^{-1} h)} = e_{(ad, pq^{-1} h)}.$$

Если такого  $d$  не существует, то

$$T_{(a,p)}T_{(b,q)}^*e_{(c,h)} = T_{(a,e)}T_{(b,qp^{-1})}^*e_{(c,h)} = 0.$$

Таким образом, мы имеем равенство

$$T_{(a,p)}T_{(b,q)}^* = T_{(a,e)}T_{(b,qp^{-1})}^* = T_{(a,e)}T_{(b,(pq^{-1})^{-1})}^*.$$

Рассмотренные четыре случая полностью доказывают равенство (3.2).

Рассмотрим теперь моном произвольной длины  $k$ . По предположению индукции мы имеем равенство:

$$\widehat{T}_{(a_1,g_1)}^{i_1} \cdots \widehat{T}_{(a_{k-1},g_{k-1})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k} = \widehat{T}_{(a_1,e)}^{i_1} \cdots \widehat{T}_{(a_{k-2},e)}^{i_{k-2}} \widehat{T}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k}, \quad (3.3)$$

где  $h = g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdots g_{k-1}^{i_{k-1}}$ . Применим формулу (3.2) к произведению  $\widehat{T}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k}$ . Получим равенство

$$\widehat{T}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k} = \widehat{T}_{(a_{k-1},e)}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,(hg_k^{i_k})^{i_k})}^{i_k} = \widehat{T}_{(a_{k-1},e)}^{i_{k-1}} \widehat{T}_{(a_k,g^{i_k})}^{i_k}, \quad (3.4)$$

где  $g = g_1^{i_1} \cdots g_{k-1}^{i_{k-1}} g_k^{i_k}$ . Учитывая равенства (3.3) и (3.4), получаем требуемое равенство (3.1).  $\square$

В следующей теореме мы увидим, что представляет собой  $C^*$ -подалгебра  $\mathfrak{A}_e$  полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $S$  – полугруппа с левым сокращением и  $(L, \tau, \sigma)$  – тривиальное расширение этой полугруппы с помощью группы  $G$ . Пусть  $\mathfrak{A}_e$  –  $C^*$ -подалгебра в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$ , порожденная операторными мономами  $\sigma$ -индекса  $e$ , где  $e$  – единица группы  $G$ . Тогда имеет место изометрический изоморфизм  $C^*$ -алгебр

$$C_r^*(S) \cong \mathfrak{A}_e.$$

*Доказательство.* Операторный моном в  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$  имеет вид

$$\widehat{V}_{(\bar{a},\bar{g})} := \widehat{T}_{(a_1,g_1)}^{i_1} \widehat{T}_{(a_2,g_2)}^{i_2} \cdots \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k}, \quad (3.5)$$

где  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S^{\times k}$ ,  $\bar{g} = (g_1, \dots, g_k) \in G^{\times k}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . При этом  $\sigma$ -индекс операторного монома вида (3.5) равен

$$\text{ind}(V_{(\bar{a},\bar{g})}) = g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdots g_k^{i_k}. \quad (3.6)$$

Из теоремы 2.1 получаем, что существует изометрический  $*$ -гомоморфизм

$$\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L) : T_a \mapsto T_{(a,e)}.$$

Тогда для любого операторного монома  $\widehat{V}_{\bar{a}} \in C_r^*(S)$  вида (1.3) справедливо  $\varphi(\widehat{V}_{\bar{a}}) = \widehat{V}_{(\bar{a},\bar{e})}$ , где  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S^{\times k}$ ,  $\bar{e} = (e, \dots, e) \in G^{\times k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $\text{ind}(V_{(\bar{a},\bar{e})}) = e$ , то  $\varphi(\mathcal{P}(S)) \subset \mathfrak{A}_e$  и, следовательно, мы можем рассмотреть коограничение  $\varphi$  на  $\mathfrak{A}_e$ :

$$\varphi^0 : C_r^*(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_e, \quad (3.7)$$

которое является инъективным  $*$ -гомоморфизмом. Покажем, что  $\varphi^0$  сюръективно.

Из леммы 3.1 и формулы (3.6) вытекает, что если  $\text{ind}(V_{(\bar{a},\bar{g})}) = e$ , то мы имеем равенство

$$\widehat{V}_{(\bar{a},\bar{g})} = \widehat{T}_{(a_1,g_1)}^{i_1} \widehat{T}_{(a_2,g_2)}^{i_2} \cdots \widehat{T}_{(a_k,g_k)}^{i_k} = \widehat{T}_{(a_1,e)}^{i_1} \widehat{T}_{(a_2,e)}^{i_2} \cdots \widehat{T}_{(a_k,e)}^{i_k} = \widehat{V}_{(\bar{a},\bar{e})}.$$



Это означает, что плотная подалгебра в  $C^*$ -алгебре  $\mathfrak{A}_e$  совпадает с множеством всевозможных конечных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{V}_{(\bar{a}_i, \bar{e})}$$

операторов вида  $\widehat{V}_{(\bar{a}, \bar{e})}$ , где  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S^{\times k}$ ,  $\bar{e} = (e, \dots, e) \in G^{\times k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда следует сюръективность гомоморфизма  $\varphi^0$ .

Таким образом,  $\varphi^0$  является изометрическим изоморфизмом  $C^*$ -алгебр  $C_r^*(S)$  и  $\mathfrak{A}_e$ .  $\square$

Зададим на подлежащем пространстве  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  структуру банахова  $C_r^*(S)$ -модуля, определив операцию левого внешнего умножения следующим образом:

$$A \cdot B = \varphi^0(A)B, \quad (3.8)$$

где  $A \in C_r^*(S)$ ,  $B \in C_r^*(L)$  и  $\varphi^0 : C_r^*(S) \rightarrow \mathfrak{A}_e$  – изометрический изоморфизм (3.7) из теоремы 3.1. Далее будет показано, что если  $L$  является тривиальным расширением полугруппы  $S$  с помощью конечной группы, то этот модуль является свободным. Но прежде нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Зафиксируем произвольный элемент  $a \in S$ . В  $C^*$ -алгебре  $C_r^*(L)$  для любого  $g \in G$  рассмотрим операторы вида  $V_g := T_{(a,e)}^* T_{(a,g)}$ . Покажем, что  $V_g$  – унитарные операторы. Действительно, принимая во внимание лемму 3.1, получаем равенства:

$$\begin{aligned} V_g V_g^* &= T_{(a,e)}^* T_{(a,g)} T_{(a,g)}^* T_{(a,e)} = T_{(a,e)}^* T_{(a,e)} T_{(a,e)}^* T_{(a,gg^{-1})} = I, \\ V_g^* V_g &= T_{(a,g)}^* T_{(a,e)} T_{(a,e)}^* T_{(a,g)} = T_{(a,e)}^* T_{(a,e)} T_{(a,e)}^* T_{(a,g^{-1}g)} = I. \end{aligned}$$

**Лемма 3.2.** *Для каждого  $g \in G$  справедливо равенство*

$$\mathfrak{A}_g = C_r^*(S) \cdot V_g,$$

т.е. пространство  $\mathfrak{A}_g$  является циклическим банаховым  $C_r^*(S)$ -модулем, а элемент  $V_g$  является циклическим элементом модуля  $\mathfrak{A}_g$ .

*Доказательство.* В силу равенства (3.8) и того, что  $\varphi^0 : C_r^*(S) \rightarrow \mathfrak{A}_e$  – изометрический изоморфизм, для доказательства леммы достаточно доказать равенство

$$\mathfrak{A}_g = \{AV_g \mid A \in \mathfrak{A}_e\}.$$

А поскольку  $\text{ind}(V_g) = g$  и  $\|V_g\| = 1$ , то доказательство последнего равенства полностью повторяет доказательство леммы 5 из [12].  $\square$

**Теорема 3.2.** *Пусть  $S$  – полугруппа с левым сокращением,  $G$  – конечная группа и  $(L, \tau, \sigma)$  – тривиальное расширение полугруппы  $S$  с помощью группы  $G$ . Тогда существует топологический изоморфизм банаховых  $C_r^*(S)$ -модулей*

$$C_r^*(L) \cong \bigoplus_1 C_r^*(S),$$

где количество слагаемых в прямой  $l_1$ -сумме равно порядку группы  $G$ . Другими словами,  $C^*$ -алгебра  $C_r^*(L)$  является свободным банаховым  $C_r^*(S)$ -модулем.

*Доказательство.* Заметим сначала, что поскольку группа  $G$  конечная, то, как показано в [12, теорема 4], подлежащее пространство  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  представляется в виде конечной прямой суммы своих подпространств:

$$C_r^*(L) = \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g.$$

Это означает, что каждый элемент  $A \in C_r^*(L)$  единственным образом представляется в виде конечной суммы

$$A = \sum_{g \in G} A_g,$$

где  $A_g \in \mathfrak{A}_g$ .

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что существует изоморфизм  $C_r^*(S)$ -модулей

$$\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g \cong \bigoplus_1 C_r^*(S).$$

Из леммы 3.2 вытекает, что  $C_r^*(S)$ -модуль  $\mathfrak{A}_g$  топологически изоморфен фактор-модулю  $C_r^*(S)/\text{Ann}\{V_g\}$  [25, предложение VI.2.3], где

$$\text{Ann}\{V_g\} := \{A \in C_r^*(S) \mid A \cdot V_g = 0\}$$

есть аннулятор элемента  $V_g$ . Поскольку  $V_g$  – унитарный элемент, то, как нетрудно проверить,  $\text{Ann}\{V_g\} = 0$ . Следовательно, мы имеем топологический изоморфизм банаховых  $C_r^*(S)$ -модулей

$$\psi_g : C_r^*(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_g : A \mapsto A \cdot V_g.$$

Определим теперь линейное отображение

$$\alpha : \bigoplus_1 C_r^*(S) \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g$$

формулой

$$\alpha(B) = \sum_{g \in G} \psi_g(B_g),$$

где  $B = (B_g)_{g \in G} \in \bigoplus_1 C_r^*(S)$ .

Легко проверить, что  $\alpha$  сюръективно. Инъективность  $\alpha$  следует из линейной независимости семейства подпространств  $\{\mathfrak{A}_g\}_{g \in G}$ .

Непрерывность  $\alpha$  вытекает из цепочки неравенств

$$\|\alpha(B)\| \leq \sum_{g \in G} \|\psi_g(B_g)\| \leq \max_{g \in G} \|\psi_g\| \cdot \sum_{g \in G} \|B_g\| = \max_{g \in G} \|\psi_g\| \cdot \|B\|_1.$$

Поскольку  $\alpha$  – биективный ограниченный линейный оператор, то, по теореме Банаха об обратном операторе, он имеет ограниченный обратный оператор

$$\alpha^{-1} : \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g \longrightarrow \bigoplus_1 C_r^*(S).$$

Очевидно,  $\alpha$  и  $\alpha^{-1}$  – морфизмы левых  $C_r^*(S)$ -модулей. Следовательно, отображение  $\alpha$  является топологическим изоморфизмом банаховых  $C_r^*(S)$ -модулей.

Таким образом,  $C^*$ -алгебра  $C_r^*(L)$  является свободным банаховым  $C_r^*(S)$ -модулем.  $\square$

В работе [13] были описаны условия, при которых на подлежащем пространстве произвольной топологически градуированной полугрупповой  $C^*$ -алгебры  $C_r^*(L)$  имеется структура свободного банахова модуля над своей подалгеброй  $\mathfrak{A}_e$ . А именно, пусть  $X := \{x_g \mid g \in G\}$  – набор элементов в  $L$ , такой, что выполняется условие:  $X \cap \sigma^{-1}(g) = \{x_g\}$ . Пусть  $G$  – конечная группа и в полугруппе  $L$  существует множество  $X$ , такое, что каждый его элемент обратим в  $L$ . Тогда  $C^*$ -алгебра  $C_r^*(L)$  является свободным банаховым  $\mathfrak{A}_e$ -модулем [13, теорема 2].

Если в условиях теоремы 3.2 полугруппа  $S$  содержит единицу  $e$ , то в полугруппе  $L$  существует такое множество  $X$ , что каждый его элемент обратим:

$$X = \{(e, g) \mid g \in G\}.$$

Тогда теорема 3.2 является следствием теоремы 3.1 и [13, теорема 2].

С другой стороны, если полугруппа  $S$  не содержит единицы, то теорема 3.2 доставляет нам пример того, что утверждение, обратное к [13, теорема 2], неверно.

**Пример 3.1.** Пусть  $G$  – конечная группа. Как в примере 2.1 рассмотрим аддитивную полугруппу натуральных чисел  $\mathbb{N}$  и декартово произведение  $\mathbb{N} \times G$  с умножением, заданым формулой (2.1). Тогда  $C^*$ -алгебра  $C_r^*(\mathbb{N} \times G)$  является свободным банаховым модулем над алгеброй Тейлора  $\mathcal{T} = C_r^*(\mathbb{N})$ , и мы имеем изоморфизм банаховых  $\mathcal{T}$ -модулей

$$C_r^*(\mathbb{N} \times G) \cong \bigoplus_1 \mathcal{T}.$$

При этом полугруппа  $\mathbb{N} \times G$  не содержит никаких подгрупп.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.A. Coburn. *The  $C^*$ -algebra generated by an isometry* // Bull. Amer. Math. Soc. **73**:5, 722–726 (1967).
2. L.A. Coburn. *The  $C^*$ -algebra generated by an isometry II* // Trans. Amer. Math. Soc. **137**, 211–217 (1969).
3. R.G. Douglas. *On the  $C^*$ -algebra of a one-parameter semigroup of isometries* // Acta Math. **128**:3, 143–151 (1972).
4. G.J. Murphy. *Ordered groups and Toeplitz algebras* // J. Oper. Theory. **18**:2, 303–326 (1987).
5. G.J. Murphy. *Toeplitz operators and algebras* // Math. Z. **208**:3, 355–362 (1991).
6. A. Nica.  *$C^*$ -algebras generated by isometries and Wiener – Hopf operators* // J. Operator Theory. **27**:1, 17–52 (1992).
7. M. Laca, I. Raeburn. *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups* // J. Funct. Anal. **139**:2, 415–440 (1996).
8. X. Li. *Semigroup  $C^*$ -algebras and amenability of semigroups* // J. Functional Analysis. **262**:10, 4302–4340 (2012).
9. S.A. Grigoryan, T.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, A. S. Sitdikov.  *$C^*$ -Algebra generated by the path semigroup* // Lobachevskii J. of Math. **37**:6, 740–748 (2016).
10. С.А. Григорян, Е.В. Липачева, А.С. Ситдииков. *Сети градуированных  $C^*$ -алгебр над частично упорядоченными множествами* // Алгебра и анализ. **30**:6, 1–19 (2018).
11. R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *Topological Grading of Semigroup  $C^*$ -Algebras* // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. **90**:3, 44–55 (2020).
12. Е.В. Липачева. *О градуированных полугрупповых  $C^*$ -алгебрах и гильбертовых модулях* // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. **313**, 131–142 (2021).
13. E.V. Lipacheva. *A Semigroup  $C^*$ -algebra which is a Free Banach Module* // Lobachevskii J. of Math. **42**:10, 2386–2391 (2021).
14. Б.В. Новиков. *Когомологии полугрупп: обзор* // Фундамент. и прикл. матем. **7**:1, 1–18 (2001).
15. A.H. Clifford. *Extensions of semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. **68**:2, 165–173 (1950).
16. L. Rédei. *Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie* // Acta Sci. Math. Szeged. **14**, 252–273 (1952).
17. Л.М. Глушкин, И.Л. Перепелицын. *Нормальные расширения полугрупп* // Изв. вузов. Матем. **12**, 46–54 (1972).
18. Л.М. Глушкин. *Нормальные расширения коммутативных полугрупп* // Изв. вузов. Матем. **29**:9, 14–22 (1985).
19. I.S. Berdnikov, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *On the Stone-Cech Compactification Functor and the Normal Extensions of Monoids* // Lobachevskii J. of Math. **42**:10, 2295–2305 (2021).

20. S.A. Grigoryan, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *On Extensions of Semigroups and Their Applications to Toeplitz Algebras* // Lobachevskii J. of Math. **40**:12, 2052–2061 (2019).
21. Р.Н. Гумеров. *Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых  $C^*$ -алгебр* // Труды МФТИ. **12**:1, 74–82 (2020).
22. Е.В. Липачева. *Расширения полугрупп и морфизмы полугрупповых  $C^*$ -алгебр* // Сиб. матем. ж. **62**:1, 82–96 (2021).
23. R. Exel. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications* // Math. Surv. Monogr. **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2017).
24. Е.С. Ляпин. *Полугруппы*, М.: Физматгиз. 1960.
25. А.Я. Хелемский. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.

Екатерина Владимировна Липачева,  
кафедра Высшей математики,  
Казанский государственный энергетический университет,  
ул. Красносельская, 51,  
420066, г. Казань, Россия  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ул. Кремлевская, 35,  
420008, г. Казань, Россия  
E-mail: elipacheva@gmail.com