ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 58-69.

УДК 519.63:517.9

МЕТОД ФУРЬЕ, СВЯЗАННЫЙ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ, В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Л. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Метод Фурье позволяет находить решения краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Но применение метода для решения задач многих типов встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения метода Фурье – преодоление сопутствующих методу математических проблем, порожденных, например, характером граничных условий. Другое направление связано с применением специальных функций при решении задач для областей классических форм, определяемых координатными линиями и поверхностями ортогональных криволинейных систем координат. Но такой подход в общем случае задач для областей с криволинейными границами является неэффективным. Направления развития метода Фурье решения задач для областей с криволинейными границами связаны также, во-первых, с созданием и применением вариационно-сеточных и проекционно-сеточных методов и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Данная статья относится ко второму из этих направлений и ориентирована на такое расширение области применения метода Фурье, которое определяется построением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами и дающих аналитические решения параболической начально-краевой задачи в области с криволинейной границей. В параболической начально-краевой задаче для области с криволинейной границей предлагается и исследуется алгоритм метода Фурье, связанный с применением ортогональных сплайнов. Формируемая этим алгоритмом последовательность конечных обобщенных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области, имеющей криволинейную границу, структура конечных рядов Фурье сближается со структурой бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи в форме ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода Фурье.

Ключевые слова: параболическая начально-краевая задача, криволинейная граница, метод разделения переменных, обобщенный ряд Фурье, ортогональные сплайны.

Mathematics Subject Classification: 35K20

V.L. Leontiev, Fourier method connected with orthogonal splines in parabolic initial boundary-value problem for region with curvilinear boundary.

Исследование В.Л. Леонтьева выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» (контракт № 075-15-2020-934 от 17.11.2020).

Поступила 23 июня 2021 г.

1. Введение

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет находить частные решения многих краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Метод связан с задачей Штурма-Лиувилля. Классический метод Фурье позволяет получать решения широких классов задач, но его реализация для задач многих типов, в том числе для задач, постановки которых содержат нерегулярные граничные условия, даже в тех случаях, в которых все участки границы области являются координатными линиями или поверхностями, встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения классического метода Фурье – преодоление сопутствующих методу математических проблем, например, связанных с характером граничных условий [2]. Специальные функции появляются, например, при решении задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрической или сферической системе координат, что целесообразно в случае области, граница которой состоит из набора координатных линий или поверхностей такой системы координат. В общем случае задач для областей с криволинейными границами применение специальных функций является неэффективным. Классический метод Фурье применим только при решении краевых и начально-краевых задач для областей классической формы, что отмечается, например, в [3] при решении контактных задач для упругих тел с криволинейными границами. Решения, полученные классическим методом Фурье, приводятся, в частности, в статьях [4]–[7], применение метода рассматривается во многих книгах, например, в [8]. Другие направления развития математических инструментов решения задач для областей с криволинейными границами связаны, во-первых, с созданием и применением ряда методов, отличных от метода Фурье, например в работах [9]–[12], и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Данная статья относится ко второму направлению и ориентирована на такое расширение области применения метода Фурье, которое определяется построением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами и дающих решения параболической начально-краевой задачи в области с криволинейной границей.

Рассматриваемый здесь метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, дает сходящуюся последовательность приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье, структура которых подобна структуре частичных сумм бесконечного ряда Фурье, являющегося точным решением задачи. Использование ортогональных сплайнов расширяет область применения метода Фурье, а также сближает численный вариационно-сеточный метод с аналитическим методом разделения переменных.

Метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, был предложен в статье [13] для решения гиперболической начально-краевой задачи, рассматриваемой в области с криволинейной границей. Здесь метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, применяется для решения параболической начально-краевой задачи. Излагается алгоритм метода и проводится его исследование.

2. Постановка параболической начально-краевой задачи для области с криволинейной границей

Рассматривается параболическая начально-краевая задача

$$
\begin{aligned}
&L[u] = a^2 \Delta\, u(x,y,t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x,y) \in S, \quad \forall t \geq 0;\\
&u(x,y,0) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in S; \qquad u|_{\partial S} = u_{\partial S}(x,y) \quad \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\partial S-$ кусочно-гладкая выпуклая криволинейная граница односвязной плоской области S; $u = u(x,y,t)$ – функция, непрерывная $\forall t \geq 0$ в замкнутой области $\overline{S} = S + \partial S$;

$a^2 = const > 0$. Примером является задача о процессе стабилизации температурного поля в области с криволинейной границей ∂S, на которой задано стационарное переменное распределение температуры $u_{\partial S}(x, y)$.

Решение задачи (2.1) ищется в виде суммы $u(x, y, t) = v(x, y) + w(x, y, t)$, подстановка которой в (2.1) приводит к совокупности двух задач:

$$\begin{aligned} &\Delta v(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in S; \\ &v|_{\partial S} = u_{\partial S}(x, y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

и

$$\begin{aligned} &L[w] = a^2 \Delta w(x, y, t) = \frac{\partial w}{\partial t} \qquad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \\ &w(x, y, 0) = f(x, y) - v(x, y) \qquad \forall (x, y) \in S; \\ &w|_{\partial S} = 0 \qquad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если $u_{\partial S}(x, y) = U = const$, то очевидно, что решение задачи (2.2) для любой криволинейной границы ∂S имеет вид $v(x, y) \equiv U$. Если область S – круг, а переменная на границе круга функция $u_{\partial S}$ допускает разложение в ряд Фурье, то на основе известного для этого случая точного решения (см. например, [14]) после конформного преобразования многоугольной или некоторой другой области на круг с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца получается решение задачи (2.2) для многоугольной или другой области. С учетом этого, далее основное внимание уделяется методу решения задачи (2.3).

3. Метод Фурье

Согласно методу Фурье, решение задачи (2.3) ищется в виде произведения двух функций

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \cdot \psi(t), \tag{3.1}$$

подстановка которого в дифференциальное уравнение задачи (2.3) приводит к

$$L[\varphi(x, y)] \cdot \psi(t) = \varphi(x, y) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

или

$$\frac{L[\varphi(x, y)]}{\varphi(x, y)} = \frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\lambda = const(x, y, t) < 0. \tag{3.2}$$

Краевое условие (2.3) с учетом (3.1) дает

$$\varphi(x, y)|_{\partial S} = 0 \tag{3.3}$$

и поэтому из (3.2) следует краевая задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} &L[\varphi] + \lambda \varphi = a^2 \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \qquad (S), \\ &\varphi|_{\partial S} = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

После решения этой задачи, т.е. после построения системы собственных значений λ_k и соответствующей ей системы собственных функций $\varphi_k(x, y)$, определяется связанная с ними система решений $\psi_k(t)$ уравнений

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} + \lambda_k \psi(t) = 0. \tag{3.5}$$

Затем на основе $\varphi_k(x, y)$ и $\psi_k(t)$, соответствующих λ_k, с учетом начального условия строится бесконечный функциональный ряд – точное решение задачи (2.3).

4. Метод Фурье, связанный с использованием ортогональных сплайнов

Первые шаги алгоритма метода Фурье, в котором используются ортогональные сплайны, в случае области с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение задачи (2.3) также разыскивается в виде произведения (3.1), подстановка которого в дифференциальное уравнение (2.3) приводит к уравнению (3.2), а исходное граничное условие дает условие (3.3). Возникает та же краевая задача Штурма-Лиувилля (3.4). Решение уравнения (3.5) связано с решением задачи Штурма-Лиувилля (3.4) и с учетом начального условия (2.3).

Дальнейшие шаги алгоритма модифицированного метода Фурье, предназначенного для решения параболических начально-краевых задач в случае областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ортогональных сплайнов при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме обобщенных конечных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению задачи (2.3) – бесконечному функциональному ряду.

Нетривиальные решения краевой задачи (3.4) ищутся в виде

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)}\tilde{C}_{ij}\tilde{\alpha}_i(x)\tilde{\beta}_j(y), \tag{4.1}$$

где $\tilde{C}_{ij}$ – постоянные коэффициенты; N, j_1, j_2 – натуральные числа, зависимость j_1, j_2 от i определяется размерами области и формой криволинейной границы ∂S; $\tilde{\alpha}_i(x), \tilde{\beta}_j(y)$ – ортогональные сплайны [1]: $\tilde{\alpha}_i(x)=\varphi_i(x)$, $\tilde{\beta}_j(y)=\varphi_j(y)$, где

$$\begin{aligned}
&\varphi_i(x)=[(\sqrt{2}-1)(x_{i-1}-x)h^{-1}, \quad x\in[x_{i-1},x_{i-1}+0.5h];\\
&(\sqrt{2}+1)(x-x_i)h^{-1}+1, \quad x\in[x_{i-1}+0.5h,x_i];\\
&(\sqrt{2}-1)(x-x_i)h^{-1}+1, \quad x\in[x_i,x_i+0.5h];\\
&(\sqrt{2}+1)(x_{i+1}-x)h^{-1}, \quad x\in[x_i+0.5h,x_{i+1}];\\
&0, \quad x\in(-\infty,x_{i-1})\bigcup(x_{i+1},+\infty)]
\end{aligned}$$

и $h_1=h_2=h$ – шаги прямоугольной равномерной сетки с узлами, имеющими координаты $(x_i=ih, y_j=jh)\in\overline{S}$, $0\le i\le N$, $0\le j\le M$. Скалярные произведения сплайнов обладают свойствами

$$(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_j)=\|\tilde{\alpha}_i\|^2\delta_{ij}, \qquad (\tilde{\beta}_i,\tilde{\beta}_j)=\left\|\tilde{\beta}_i\right\|^2\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символы Кронекера, $\|*\|$ – норма гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций $L_2(\overline{S})=W_2^1(\overline{S})$; W_2^1 – пространство Соболева. Область S вписана в прямоугольник S_1, часть точек непрерывной кусочно-гладкой криволинейной границы ∂S лежит на границе прямоугольной области $\overline{S}_1$. Конечные носители ортогональных (на каждой сетке) сплайнов $[\tilde{\alpha}_i(x)\tilde{\beta}_j(y)]$ представляют собой прямоугольные подобласти. Заметим, что ортогональные сплайны [1] допускают также использование конечных носителей, состоящих из треугольников. Функции

$$\alpha_i(x)=\tilde{\alpha}_i(x)\,\|\tilde{\alpha}_i(x)\|^{-1}, \qquad \beta_j(y)=\tilde{\beta}_j(y)\left\|\tilde{\beta}_j(y)\right\|^{-1}$$

образуют две системы ортонормированных (на каждой сетке) сплайнов, поскольку

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}, \quad (\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}.$$

После нормировки функций сумма (4.1) переписывается в виде

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)}C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y). \tag{4.2}$$

Каждый постоянный коэффициент C_{ij} линейной комбинации (4.2) ортонормированных сплайнов – функций сеточного Лагранжева базиса конечномерного подпространства, связанного с построенной сеткой, равен значению функции $\varphi_N(x,y)$ в узле (x_i,y_j) сетки согласно свойствам таких сплайнов. Поэтому граничные условия $\varphi|_{\partial S}=0$ удовлетворяются, если те коэффициенты C_{ij}, которые соответствуют граничным узлам, приравниваются нулю. После такого выполнения главных граничных условий линейная комбинация (4.2) записывается следующим образом:

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=N_1}^{N_2}\sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)}C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y), \tag{4.3}$$

где N_1,N_2,J_1,J_2 – натуральные числа такие, что

$$1\le N_1<N_2\le N,\quad j_1(i)\le J_1(i)<J_2(i)\le j_2(i).$$

Для определения коэффициентов C_{ij} приближенного аналитического решения (4.3) краевой задачи (3.4) используется условие $\delta R=0$ стационарности функционала Рейсснера

$$\begin{aligned}2R(\varphi,\varphi_1,\varphi_2)=&\iint_S[a^2(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\lambda\varphi)\varphi\\&-(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi_1)\varphi_1-(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi_2)\varphi_2]dS\\&+\int_{\partial S}\varphi(\varphi_1n_x+\varphi_2n_y)dl,\end{aligned}$$

равносильное задаче (3.4) в смешанной форме

$$\begin{aligned}&a^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+\lambda\varphi=0,\\&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi_1,\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi_2\quad(S);\\&\varphi|_{\partial S}=0.\end{aligned}$$

Подстановка (4.3) в условие стационарности функционала Рейсснера приводит к системе конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned}a^2[&(C_{n+1,m}-2C_{nm}+C_{n-1,m})h_1^{-2}\\&+(C_{n,m+1}-2C_{nm}+C_{n,m-1})h_2^{-2}]+\lambda_{nm}C_{nm}=0,\end{aligned} \tag{4.4}$$

каждое из которых связано с соответствующим внутренним узлом (x_n,y_m) сетки. Сформирована однородная система линейных алгебраических уравнений (4.4), неизвестными в которой являются коэффициенты C_{nm}. Эта система всегда имеет тривиальное решение. Те значения параметра λ, при которых она имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями вариационно-сеточного оператора, полученного с помощью вариационного принципа Рейсснера на основе оператора Лапласа, а также собственными значениями краевой задачи (3.4), аппроксимацией для которой является система уравнений (4.4). С учетом ортогональности используемых сплайнов система уравнений (4.4) записывается в виде

$$MX-\lambda X=0, \tag{4.5}$$

где M – квадратная матрица системы уравнений, X – матрица-столбец, компоненты которой – неизвестные коэффициенты C_{ij}. Матрица M по построению – вещественная и симметричная, а следовательно все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения, причем все ее собственные векторы линейно-независимы и попарно ортогональны, в том числе и в случае, когда есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ – собственные значения, найденные в результате решения характеристического уравнения системы (4.5), $C_{nm}^{(k)}$ – соответствующие им компоненты k-го собственного вектора $X^{(k)}$, т.е. одного из нетривиальных решений системы уравнений (4.5), а функция

$$\varphi_N^{(k)}(x,y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x)\beta_j(y)$$

– нетривиальное решение (4.3). Собственные значения положительны, поскольку матрица M – не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что эта матрица возникла при использовании вариационного принципа и на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному, в случае рассматриваемого граничного условия, оператору $(-L) = -a^2\Delta$.

Теорема 4.1. *Функция*

$$w^{(K)}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{K} [A_k \exp(-\lambda_k t) \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x)\beta_j(y)], \tag{4.6}$$

в которой

$$A_k = \frac{1}{\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2} \iint_S [f(x,y) - v(x,y)]\varphi_N^{(k)}(x,y)dS, \tag{4.7}$$

удовлетворяет уравнению (3.4) в вариационной форме, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3) и начальному условию (2.3), т.е. является приближенным аналитическим решением задачи (2.3) в случае области с криволинейной границей. При каждом фиксированном значении времени эта сумма представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$.

Доказательство. Сумма

$$\varphi_N^{(k)}(x,y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x)\beta_j(y)$$

является элементом множества $H_N \subset W_2^1(\overline{S})$ – линейной оболочки функций $[\alpha_i(x)\beta_j(y)]$, связанных с указанной сеткой и удовлетворяющих граничному условию (3.3), а также является нетривиальным решением системы уравнений (4.5), удовлетворяющим граничному условию (3.3) и соответствующим собственному значению λ_k, т.е. $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ – собственная функция краевой задачи (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$.

Рассмотрим уравнение (3.5) после подстановки в него любого найденного положительного собственного значения λ_k

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} + \lambda_k\psi(t) = 0.$$

Общие решения таких дифференциальных уравнений имеют вид

$$\psi_k(t) = A_k \exp(-\lambda_k t),$$

где A_k – неизвестные постоянные коэффициенты. Следовательно, сумма

$$\sum_{k=1}^{K}\psi_k(t)\varphi_N^{(k)}(x,y)=\sum_{k=1}^{K}[A_k\exp(-\lambda_k t)\sum_{i=N_1}^{N_2}\sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)}C_{ij}^{(k)}\alpha_i(x)\beta_j(y)] \tag{4.8}$$

удовлетворяет уравнению (3.4) в вариационной форме $\delta R=0$, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3). Остается обеспечить выполнение начального условия (2.3). Подстановка суммы (4.8) в начальное условие дает

$$\sum_{k=1}^{K}A_k\varphi_N^{(k)}(x,y)=f(x,y)-v(x,y).$$

Умножение обеих частей на $\varphi_N^{(r)}(x,y)$, интегрирование по области S и использование ортогональности собственных функций дают

$$A_k=\frac{1}{\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2}\iint_S[f(x,y)-v(x,y)]\varphi_N^{(k)}(x,y)dS.$$

Таким образом, сумма (4.6), коэффициенты которой определяются формулами (4.7), удовлетворяет уравнениям (3.4) в вариационной форме $\delta R=0$, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3) и начальному условию (2.3), т.е. является приближенным аналитическим решением задачи (2.3) в случае области с криволинейной границей. Сумма (4.6) при каждом фиксированном значении времени представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (3.4) в вариационной форме. □

5. Сходимость метода

Теорема 5.1. *Приближенные собственные функции $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ при сгущении сетки сходятся к точным собственным функциям $\varphi^{(k)}(x,y)\in W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющим граничному условию (3.3), т.е.*

$$\left\|\varphi^{(k)}-\varphi_N^{(k)}\right\|^2_{W_2^1(\overline{S})}\underset{N\to\infty}{->}0.$$

Доказательство. Доказательство сходимости приближенных аналитических собственных функций к точным собственным функциям основано, как и в статье [13], на том, что условие стационарности $\delta\Phi=0$ функционала

$$\Phi(\varphi)=\iint_S[a^2(\bar{\nabla}\varphi)^2-\lambda_k\varphi^2]dS,$$

где $\bar{\nabla}$ – набла-оператор, при условии, что варьирование функционала проводится на множестве функций, удовлетворяющих главному граничному условию (3.3), равносильно краевой задаче (3.4). Значение второй вариации функционала в его стационарной точке – положительное, а, следовательно, функционал имеет в стационарной точке минимум и поэтому решение такой вариационной задачи, а, следовательно, и краевой задачи (3.4), является единственным. Кроме того, функционал имеет в стационарной точке $\varphi^{(k)}$ значение равное нулю, так как на множестве функций из $W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющих граничному условию,

$$\Phi(\varphi^{(k)})=-\iint_S[a^2\Delta\varphi^{(k)}+\lambda_k\varphi^{(k)}]\varphi^{(k)}dS=0.$$

Поэтому можно показать, что функционал для любой функции $w \in W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющей граничному условию (3.3), равен

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \iint_S [a^2(\bar{\nabla} w)^2 - \lambda_k w^2] dS \\ &= \iint_S [a^2(\bar{\nabla}(\varphi^{(k)} - w))^2 - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w)^2] dS \\ &= [\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\end{aligned}$$

– разности скалярного произведения

$$[v_1, v_2] = \iint_S a^2(\bar{\nabla} v_1)_{\bullet} \bar{\nabla} v_2 dS$$

энергетического пространства и скалярного произведения

$$(v_1, v_2) = \iint_S v_1 v_2 dS$$

гильбертова пространства $W_2^0(\overline{S})$. Таким образом, задача отыскания точной собственной функции $\varphi^{(k)}$ свелась к задаче минимизации

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = \min_{\forall w \in W_2^1(\overline{S})} \Phi(w) = 0 \tag{5.1}$$

на множестве функций $w \in W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющих граничному условию (3.3). Выполняется неравенство

$$\begin{aligned}|\Phi(w)| &= \left|[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\right| \\ &\leq \left|[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w]\right| + \lambda_k \left|(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\right|.\end{aligned}$$

Поэтому в силу того, что каждая функция $\varphi_N^{(k)}(x, y)$, согласно алгоритму метода и в силу ортогональности сплайнов, связана с минимизацией функционала $\Phi(w)$ и является наилучшим в смысле энергетической нормы приближением в $H_N \subset W_2^1(\overline{S})$ к функции $\varphi^{(k)}$, задача минимизации функционала при отыскании $\varphi_N^{(k)}$ сводится к задаче теории аппроксимации

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)}\right\|^2_{W_2^1(\overline{S})} = \min_{\forall w \in H_N \subset W_2^1(\overline{S})} \left\|\varphi^{(k)} - w\right\|^2_{W_2^1(\overline{S})},$$

т.е. к задаче аппроксимации точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x, y)$ линейными комбинациями $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ ортогональных сплайнов. Такая задача решена в [1], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости при сгущении сетки, зависящие от типа конкретных систем ортогональных сплайнов. □

Сходимость конечных рядов (4.6) определяется сходимостью приближенных собственных значений λ_k и функций $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ к соответствующим точным значениям и функциям.

С ростом числа узлов сетки возрастает число используемых при построении решений ортогональных сплайнов. Собственные значения однородной системы уравнений (4.5) в случае $l = \pi$ известны (см., например, [1])

$$\lambda_k = \lambda_{n,m} = n^2 + m^2 + (n^4 + m^4)\frac{h^2}{12} + O[(n^6 + m^6)h^4],$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$; $\quad m = 1, 2, \ldots, M-1$; и сходятся, что очевидно, при $N, M \to \infty$, $h \to 0$ к соответствующим известным точным собственным значениям [15]

$$\omega_{n,m} = \frac{\pi^2}{l^2}(n^2 + m^2) = n^2 + m^2$$

задачи Штурма-Лиувилля (3.4).

При увеличении числа узлов сетки области S приближенные решения $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ краевой задачи (3.4), т.е. приближенные собственные функции этой задачи, согласно теореме 5.1, сходятся к ее точным решениям – собственным функциям $\varphi^{(k)}(x, y)$. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи, поставленной в смешанной вариационной форме, а, следовательно, сумма (4.6) по k от 1 до K в пределе переходит в бесконечный ряд по k от 1 до ∞, который при любом значении $t > 0$ является бесконечным рядом Фурье по собственным функциям. Такой ряд является единственным решением задачи (2.3), что следует из теоремы [15, стр. 88–91], основанной на теореме Стеклова [15]. Отличие данного метода решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами, например, от метода конечных элементов [12] состоит в том, что в данном методе определяемая его алгоритмом последовательность конечных рядов Фурье (4.6) в каждый фиксированный момент времени сходится к соответствующему бесконечному ряду Фурье, сформированному на основе точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x, y)$ и представляющему собой существующее единственное точное решение задачи (2.3), определить которое в случае криволинейной границы области не удается. Следовательно, эти конечные ряды Фурье представляют собой в любой момент времени аналитические приближенные решения задачи (2.3) для области с криволинейной границей, которые при увеличении числа узлов сетки неограниченно близко подходят к точному решению этой задачи – бесконечному ряду Фурье, причем, не только по количественным критериям, но и по своей аналитической структуре. Метод дает в каждый момент времени решение в форме ортогональных рядов – обобщенных конечных рядов Фурье по собственным функциям. Эти ряды – сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи (2.3) для области с криволинейной границей, которые в пределе переходят в точное аналитическое решение.

В качестве примера, показывающего сходимость конечных ортогональных обобщенных рядов Фурье к точному решению – бесконечному ряду Фурье, рассматривается задача Штурма-Лиувилля (3.4) для области $\overline{S}$, граница ∂S которой является квадратом со стороной $l = \pi$. Сходимость собственных значений и функций, конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами, обеспечивает сходимость конечных рядов (4.6) к точному решению задачи (2.3). Используется прямоугольная равномерная сетка с шагами $h_1 = h_2 = h$, узлы которой имеют координаты

$$(x_i = ih, y_j = jh) \in \overline{S}, \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le N.$$

Система уравнений (4.4), записанных для внутренних узлов сетки

$$1 \le i \le N-1, \quad 1 \le j \le N-1$$

с учетом однородных граничных условий (3.3), является однородной системой конечно-разностных уравнений, нетривиальными точными решениями которой, в случае $l = \pi$, являются известные собственные функции [16]

$$\mu_{n,m}(i, j) = \sin(nx_i)\sin(my_j),$$

соответствующие точным собственным значениям [16]

$$\lambda_{n,m} = \frac{4}{h^2}\left[\sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{mh}{2}\right)\right]; \quad n, m = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Число этих собственных функций равно $(N-1)^2$ – числу внутренних узлов сетки. Значения собственных функций $\mu_{n,m}(i,j)$ в узлах сетки определяют значения коэффициентов суммы (4.6):

$$C_{i,j}^{(n,m)} = \sin(nx_i)\sin(my_j).$$

Таким образом, в задаче для квадратной области для каждого собственного значения $\lambda_{n,m}$ формируются ортогональные обобщенные конечные ряды Фурье

$$\varphi_N^{(k)}(x,y) = \varphi_N^{(n,m)}(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sin(nx_i)\sin(my_j)\alpha_i(x)\beta_j(y)$$

– приближенные собственные функции. Конечный ряд (4.6) принимает в данной задаче вид

$$w^{(N)}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} A_{n,m} \exp(-\lambda_{n,m} t)\varphi_N^{(n,m)}(x,y). \tag{5.2}$$

Точное решение задачи Штурма-Лиувилля (3.4) для случая квадратной области $\overline{S}$, а также $a^2 = 1$ и $l = \pi$, определяется собственными значениями и функциями [15]:

$$\Phi_{n,m}(x,y) = \sin(nx)\sin(my), \quad \omega_{n,m} = n^2 + m^2.$$

Основанное на этом точное решение задачи (2.3) в рассматриваемом случае имеет вид [15]

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \exp(-\omega_{n,m} t)\Phi_{n,m}(x,y). \tag{5.3}$$

Коэффициенты $B_{n,m}$ определяются с учетом начального условия (2.3) и ортогональности собственных функций формулой

$$B_{n,m} = \frac{1}{\|\Phi_{n,m}\|^2} \iint_S [f(x,y) - v(x,y)]\Phi_{n,m}(x,y)dS.$$

Соответственно, в силу ортогональности $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$

$$A_{n,m} = \frac{1}{\left\|\varphi_N^{(n,m)}\right\|^2} \iint_S [f(x,y) - v(x,y)]\varphi_N^{(n,m)}(x,y)dS.$$

Точность аппроксимации собственных функций $\Phi_{n,m}(x,y)$ приближенными собственными функциями $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$ растет при $N \to \infty$. Действительно, ортогональные сплайны $\alpha_i(x)$, $\beta_j(y)$ являются финитными, непрерывными и кусочно-линейными, причем значения их произведений в узлах сетки равны единице. Поэтому значения функции $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$ во всех узлах сетки равны значениям соответствующих коэффициентов $C_{i,j}^{(n,m)}$, следовательно, значения функции $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$ в узлах сетки совпадают со значениями в этих же узлах точных собственных функций $\sin(nx)\sin(my)$. Из сходимости $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$ к функциям $\Phi_{n,m}(x,y)$ следует сходимость $A_{n,m}$ к $B_{n,m}$ при $N \to \infty$. Кроме того, $\lambda_{n,m} \to \omega_{n,m} = n^2+m^2$ при $N \to \infty$, $\quad h \to 0$. Фактическая сходимость собственных значений характеризуется следующим примером: $\lambda_{11} = 1.899$ при $N = 4$; $\quad \lambda_{11} = 1.984$, если $N = 10$; $\quad \lambda_{11} = 1.996$, если $N = 20$, то есть λ_{11} при $N \to \infty$, $\quad h \to 0$ имеет такой характер сходимости к точному собственному значению $\omega_{11} = 2$.

При $N \to \infty$ точность аппроксимаций $w^{(N)}(x,y,t)$ возрастает, число собственных функций, входящих в (5.2), увеличивается, при этом для каждой величины N значения $\varphi_N^{(n,m)}(x,y)$ совпадают в узлах сетки со значениями соответствующих точных собственных функций.

Структура конечных рядов (5.2) соответствует структуре частичных сумм бесконечного ряда (5.3) с учетом при этом числа узлов сетки. Рассмотренный пример подтверждает выводы теорем 4.1, 5.1 и показывает, что метод Фурье, связанный с применением ортогональных сплайнов, дает приближенные аналитические решения в форме конечных обобщенных рядов Фурье с любой заранее заданной точностью.

6. Заключение

Расширение областей применения классических аналитических методов решения начально-краевых задач является актуальной задачей. Одно из направлений развития таких методов – включение в область применения метода разделения переменных задач для областей с криволинейными границами. Специальные функции позволяют использовать метод Фурье в случае областей с криволинейными границами, но геометрия таких границ должна состоять из координатных линий или координатных поверхностей некоторой криволинейной системы координат, что делает такие возможности значительно ограниченными.

В данной статье рассматривается метод разделения переменных, предназначенный для решения параболических начально-краевых задач для областей с криволинейными границами более сложной геометрии. Метод дает сходящуюся последовательность приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье в каждый момент времени, структура которых связана со структурой частичных сумм бесконечного ряда Фурье, являющегося точным решением задачи. Использование ортогональных сплайнов расширяет область применения метода Фурье, а также сближает вариационно-сеточные методы с аналитическим методом разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Л. Леонтьев. *Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики.* Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. 2021. 466 с.
2. Э.А. Гасымов, А.О. Гусейнова, У.Н. Гасанова. *Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **56**:7, 1335–1339 (2016).
3. И.С. Савичев, А.Д. Чернышев. *Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра* // Изв. РАН. МТТ. **3**, 151–162 (2009).
4. А.П. Хромов, М.Ш. Бурлуцкая. *Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **14**:2, 171–198 (2014).
5. В.Л. Колмогоров, В.П. Федотова, Л.Ф. Спевак, Н.А. Бабайлов, В.Б. Трухин. *Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариационной постановке* // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **42**, 72–75 (2006).
6. Ю.И. Малов, Л.К. Мартинсон, К.Б. Павлов. *Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **12**:3, 627–638 (1972).
7. М.Ш. Исраилов *Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях* // Изв. РАН. МТТ. **3**, 121–134 (2013).
8. V. Anders. *Fourier analysis and its applications.* New York: Springer-Verlag, Berlin: Heidelber. 2003. 269 p.
9. А.Б. Усов. *Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса в переменной области с криволинейными границами* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **48**:3, 491–504 (2008).

10. П.А. Крутицкий. *Первая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязной области* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **37**:1, 117–128 (1997).
11. М.И. Чебаков. *Некоторые динамические и статические контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров* // Прикл. матем. и мех. **44**:5, 923–933 (1980).
12. Г. Стренг, Дж. Фикс. *Теория метода конечных элементов.* М.: Мир. 1977. 349 с.
13. V.L. Leontiev. *Fourier Method in Initial Boundary Value Problems for Regions with Curvilinear Boundaries* // Mathematics and Statistics. **9**:1, 24–30 (2021).
14. С.Г. Михлин. *Курс математической физики.* М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1968. 576 с.
15. В.Я. Арсенин. *Методы математической физики и специальные функции.* М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1974. 432 с.
16. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. *Методы решения сеточных уравнения.* М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1978. 592 с.

Виктор Леонтьевич Леонтьев,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Научный центр мирового уровня «Передовые цифровые технологии»,
ул. Политехническая, 29,
195251, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `leontiev_vl@spbstu.ru`