ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 101-111.

УДК 517.984.46

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО РЕШЕТЧАТОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Ю.Х. ЭШКАБИЛОВ, Д.Ж. КУЛТУРАЕВ

Аннотация. Линейные самосопряженные операторы в модели Фридрихса возникают в различных областях, например, в теории возмущения спектра самосопряженных операторов, в квантовой теории поля, в теории двухчастичных и трехчастичных дискретных операторов Шредингера, в гидродинамике и т.д. Оператор H в модели Фридрихса представляется суммой двух операторов в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. $H = H_0 + \varepsilon K$, $\varepsilon > 0$, где H_0 – оператор умножения функции, K – компактный интегральный оператор. Для операторов в модели Фридрихса необходимо решить следующие задачи: 1) при каких условиях дискретный спектр является пустым множеством? 2) при каких условиях дискретный спектр является непустым множеством? 3) найти условия, достаточные для того, чтобы у оператора в модели Фридрихса дискретный спектр был конечным множеством; 4) найти условия, достаточные для того, чтобы у оператора в модели Фридрихса дискретный спектр был бесконечным множеством. Известно, что если ядро интегрального оператора в модели вырожденное, то дискретный спектр соответствующего оператора в модели Фридрихса является конечным множеством. Следовательно, для того, чтобы у оператора в модели Фридрихса дискретный спектр был бесконечным множеством необходимо, чтобы интегральный оператор в модели был невырожденным. В статье рассматриваются линейные ограниченные самосопряженные операторы в модели Фридрихса, у которых интегральный оператор в модели с невырожденным ядром. Настоящая работа посвящена изучению первого и четвертого вопросов. Получен один признак бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса. Исследован дискретный спектр одного двухчастичного дискретного оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ (где ν – мерная целочисленная решетка), в котором преобразование Фурье оператора $Q(\varepsilon)$ представляется в виде $H = H_0 + \varepsilon K$, $\varepsilon > 0$. Показано, что структура дискретного спектра оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ сильно зависит от размерности ν решетки. Доказано, что в случае $\nu = 1, 2$ при всех $\varepsilon > 0$ дискретный спектр оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ бесконечен, а в случае $\nu \geqslant 3$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ дискретный спектр оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ – пустое множество.

Ключевые слова: модель Фридрихса, двухчастичный гамильтониан, самосопряженный оператор, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, невырожденное ядро.

Mathematics Subject Classification: 47A10, 47A11, 47A13, 47A25, 47B38

1. Введение

Изучение спектра является основной задачей в теории операторов Шредингера. Пусть $u(x)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_\nu = [0,1]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. K – интегральный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$ с ядром $k(x,s) \in L_2(\Omega_\nu^2)$, где $k(x,s) = \overline{k(s,x)}$. Ряд вопросов квантовой механики и статистической физики (см. [1]–[5])

Yu.Kh. Eshkabilov, D.J. Kulturaev, On discrete spectrum of one two-particle lattice Hamiltonian.

© Эшкабилов Ю.Х., Култураев Д.Ж. 2022.

Поступила 21 мая 2021 г.

приводит к исследованию дискретного спектра оператора H в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$, действующего по формуле

$$H = H_0 - K, \tag{1.1}$$

где

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \qquad (Kf)(x) = \int\limits_{\Omega_\nu} k(x,s)f(s)d\mu(s).$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега, $\mu()$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^\nu$. Из классической теоремы Вейля о компактном возмущении [6] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(H)$ оператора H состоит из множества значений функции $u(x)$, т.е. $\sigma_{ess}(H) = [u_{min}, u_{max}]$, где $u_{min} = \min\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$, $u_{max} = \max\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$.

Оператор вида (1.1) называется оператором в модели Фридрихса. Надо отметить, что модель Фридрихса применяется в разных областях науки. В 1937 году в работе [7] К. Фридрихс предложил рассмотреть данную модель в теории возмущений существенных спектров самосопряженных операторов. Затем К. Фридрихс показал [8], что исследование одночастичного оператора Шредингера сводится к изучению оператора в модели Фридрихса. В статье [2] при исследовании спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа, использованы свойства операторов в модели Фридрихса. Кроме того, решение задач, связанных с распространением волн и проблемой цунами, приводится к исследованию спектра операторов в модели Фридрихса [9]. Более того, спектральные свойства самосопряженных операторов в модели Фридрихса широко используются в исследовании спектров двухчастичных и трехчастичных дискретных операторов Шредингера [5], [10]–[12] и т.д.

Изучению спектра операторов в модели Фридрихса посвящен ряд публикаций (см., например, [13]–[20] и др.).

Пользуясь принципом минимакса и максимина, доказано [14], что, если ядро интегрального оператора K вырожденное, то дискретный спектр в модели Фридрихса (1.1) является конечным. Отсюда следует, что для того, чтобы оператор в модели (1.1) имел бесконечный дискретный спектр, необходимо, чтобы ядро интегрального оператора K было невырожденным.

В данной статье рассматривается двухчастичный гамильтониан $Q(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$, где $\mathbb{Z}^\nu$ – ν мерная целочисленная решетка. Преобразование Фурье гамильтониана $Q(\varepsilon)$ является самосопряженным оператором в модели Фридрихса с невырожденным ядром. В случае $\nu = 1, 2$ при всех $\varepsilon > 0$ доказано существование бесконечного числа отрицательных собственных значений гамильтониана $Q(\varepsilon)$. В случае $\nu \geqslant 3$ доказано, что при достаточно малых ε в гамилтониане $Q(\varepsilon)$ отсутствует отрицательное собственное значение.

2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ линейный ограниченный самосопряженный оператор. Через $\sigma(A)$, $\sigma_{ess}(A)$ и $\sigma_{disc}(A)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр оператора A (см. [21]).

Введем также следующие обозначения

$$E_{min}(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}, \quad E_{max}(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}.$$

Число $E_{min}(A)$ (число $E_{max}(A)$) будем называть нижним краем (верхним краем) существенного спектра оператора A.

Через $\{\mu_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ обозначим ограниченную возрастающую последовательность вещественных чисел, построенную по принципу минимакса для заданного самосопряженного оператора A (см. [14]). Тогда каждое число $\mu_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = E_{min}(A)$, т.е.

$$\{\mu_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}} = \sigma_{disc}(A) \cap (-\infty, E_{min}(A)),$$

либо существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что каждое число $\mu_k(A)$, $k \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ является собственным значением оператора A и $\mu_k(A) = E_{min}(A)$ при всех $k > n_0$, т.е.

$$\{\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_{n_0}(A)\} = \sigma_{disc}(A) \cap (-\infty, E_{min}(A)).$$

Линейный ограниченный самосопряженный оператор A называется положительным и пишется $A \geqslant 0$ или $0 \leqslant A$, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$.

Лемма 2.1 ([6], [14])**.** *Пусть $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – линейные ограниченные самосопряженные операторы, $E_{min}(A) = E_{min}(B)$ и $A \leqslant B$. Тогда $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$, $n \in \mathbb{N}$, здесь*

$$\mu_k(A) = \sup_{L\subset\mathcal{H},\ dimL=k-1} \ \inf_{\|x\|=1,\ x\perp L} (Ax, x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu \times \Omega_\nu)$ рассмотрим оператор H_1 в модели Фридрихса

$$H_1 = H_0 - K, \tag{2.1}$$

где

$$(H_0 f)(x, y) = u(x, y) f(x, y), \quad (Kf)(x, y) = \int\limits_{\Omega_\nu}\int\limits_{\Omega_\nu} k(x, y; s, t) f(s, t) d\mu(s) d\mu(t).$$

Здесь $u(x, y) \in C(\Omega_\nu \times \Omega_\nu)$ – неотрицательная и $0 \in \mathrm{Ran}(u)$, $k(x, y; s, t) \in L_2(\Omega_\nu^2 \times \Omega_\nu^2)$ и $k(x, y; s, t) = \overline{k(s, t; x, y)}$.

Пусть оператор K имеет бесконечное количество положительных собственных значений $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_n > \dots$, $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$ и $\{g_n(x, y)\}_{n\in\mathbb{N}}$, соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. Из самосопряженности оператора H_1 (2.1) следует, что $\sigma(H_1) \subset \mathbb{R}$, а из положительности оператора K вытекает, что $\sigma(H_1) \cap (u_{\max}, \infty) = \emptyset$, поэтому дискретный спектр оператора H_1 может лежать только в полуоси $(-\infty, 0)$.

Для любого $\xi < 0$ определим интегральные операторы

$$P(\xi) = K^{\frac{1}{2}} r_0(\xi) K^{\frac{1}{2}}, \quad R(\xi) = K^{\frac{1}{2}} r_0^{\frac{1}{2}}(\xi),$$

где $r_0(\xi)$ – резольвента мультипликатора H_0. Из представления $P(\xi) = R(\xi)(R(\xi))^*$ следует положительность оператора $P(\xi)$. Решение f_0 уравнения $H_1 f = \xi f$ и неподвижные точки φ оператора $P(\xi)$ связаны соотношением

$$f_0 = r_0(\xi) K^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad \varphi = K^{\frac{1}{2}} f_0. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2 ([20])**.** *Число $\xi < 0$ является собственным значением оператора H_1 тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $P(\xi)$.*

Из леммы 2.2 следует, что $\dim \mathrm{Ker}(H_1 - \xi I) = \dim \mathrm{Ker}(P(\xi) - I)$, $\xi < 0$.

Положим

$$\Phi(\xi) = \int\limits_{\Omega_\nu}\int\limits_{\Omega_\nu} \frac{dxdy}{u(x, y) - \xi}, \quad \xi < 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть $u(x, y) = u_0(y)$ и $k(x, y; s, t) = k_0(x, s)$ в модели H_1 (2.1). Если $\lim\limits_{\xi\to 0-0} \Phi(\xi) = M < +\infty$, и для некоторого индекса $n_0 \in \mathbb{N}$ выполняется условие $M\eta_{n_0} > 1$, то оператор H_1 (2.1) имеет n_0 количество отрицательных собственных* *значений:* $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ *и соответствующие собственные функции имеют следуюший вид*

$$f_k(x,y) = \frac{g_k^0(x)}{u_0(y) - \xi_k}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. В случае $\xi < 0$ для ядра $p(\xi, x; s)$ интегрального оператора $P(\xi)$ справедливо равенство $p(\xi; x, s) = \Phi(\xi) k_0(x, s)$. Следовательно,

$$P(\xi) = \Phi(\xi) K. \tag{2.4}$$

Это означает, что собственные функции оператора K также являются собственными функциями оператора $P(\xi)$. При условии теоремы 2.1 ненулевыми собственными значениями оператора K являются числа η_n, $n \in \mathbb{N}$, им соответствуют собственные функции $g_n(x,y) = g_n^0(x) \in L_2(\Omega_\nu)$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда из (2.4) следует, что числа

$$\lambda_n(\xi) = \eta_n \Phi(\xi), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

являются собственными значениями оператора $P(\xi)$.

В силу леммы 2.2 получим

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\eta_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Ясно, что функция $\Phi(\xi)$ положительна и возрастает на $(-\infty, 0)$, так как

$$\Phi'(\xi) = \int\limits_{\Omega_\nu} \frac{dy}{(u_0(y) - \xi)^2} \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{\xi \to 0-0} \Phi(\xi) = M, \qquad \lim_{\xi \to -\infty} \Phi(\xi) = 0.$$

Если $M\eta_{n_0} > 1$, то уравнение (2.6) имеет n_0 количества отрицательных решений $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n_0} < 0$. Из леммы 2.2 следует, что каждое из чисел ξ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ являются собственными значениями оператора H_1. Так как оператор $P(\xi)$ имеет собственные функции $g_k(x,y) = g_k^0(x)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, то из соотношения (2.2) заключаем, что собственному значению ξ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ оператора H_1 соответствуют собственные функции $f_k(x,y)$ вида (2.3).

□

В силу теоремы 2.1 вытекает следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть* $u(x,y) = u_0(y)$ *и* $k(x,y;s,t) = k_0(x,s)$ *в модели (2.1).*
a) Если $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \Phi(\xi) = +\infty$, *то оператор* H_1 *имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений* ξ_n, $n \in \mathbb{N}$.
b) Если $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \Phi(\xi) = M < \infty$ *и* $M\eta_{n_1} < 1$, *то у оператора* H_1 *отсутствует отрицательное собственное значение.*

На $(-\infty, 0)$ определим следующие функции

$$\Phi_1(\nu; \xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dy_1 dy_2 \ldots dy_\nu}{\sum\limits_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) - \xi}, \quad \text{где} \quad \mathbb{T} = [-\pi, \pi].$$

Пользуясь свойствами тригонометрической функции $\cos y$, можно доказать

Лемма 2.3. *a) Если* $\nu = 1, 2$, *то* $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \Phi_1(\nu; \xi) = +\infty$.
b) Если $\nu \geq 3$, *то* $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \Phi_1(\nu; \xi) < \infty$.

3. Описание двухчастичного решетчатого гамильтониана $Q(\varepsilon)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$

Рассмотрим двухчастичный решетчатый гамильтониан [22]

$$Q(\varepsilon) = Q_0 - \varepsilon Q_1, \quad \varepsilon > 0, \tag{3.1}$$

действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu)$ $(\nu \in \mathbb{N})$, здесь кинетическая энергия Q_0 задается сверткой с функцией общего вида:

$$(Q_0\phi)(m,n) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^\nu} v_0(m-k, n-l)\phi(k,l),$$

а потенциальная энергия Q_1 равна

$$(Q_1\phi)(m,n) = v_1(m,n)\phi(m,n).$$

Пусть кинетическая энергия имеет вид $v_0(m,n) = u_1(m)u_2(n)$, где

$$u_1(m) = \begin{cases} -2a_1\nu, & \text{если} \quad m = 0, \\ a_1, & \text{если} \quad |m| = 1, \\ 0, & \text{для других значений} \quad m \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

$$u_2(n) = \begin{cases} -2a_2\nu, & \text{если} \quad n = 0, \\ a_2, & \text{если} \quad |n| = 1, \\ 0, & \text{для других значений} \quad n \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

где $a_1, a_2 > 0$ и $|m| = |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_\nu|$, $m \in \mathbb{Z}^\nu$.

Определим потенциальную функцию

$$v_1(m,n) = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если} \quad m = n = 0, \\ \beta_q, & \text{если} \quad m = 0, \ n \in \{\pm q e_j\}, \ q \in \mathbb{N}, \\ \alpha_p, & \text{если} \quad m \in \{\pm p e_j\}, \ n = 0, \ p \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{для других значений} \quad m, n \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_p, \beta_q > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p < \infty$, $\sum\limits_{q\in\mathbb{N}} \beta_q < \infty$, $e_j = (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{j}, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^\nu$.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ и $\mathcal{F} : l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu) \to L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$-преобразование Фурье, при котором функции $\phi(m,n)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ переходят в функции $f(x,y)$ на $\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ по правилу

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \phi(p^{(1)}, q^{(1)}) exp(i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]).$$

Лемма 3.1. *Преобразование Фурье $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ оператора $Q(\varepsilon)$ (3.1) действует в $L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ по формуле*

$$\widetilde{H}_2(\varepsilon) f(x,y) = H_0^{(2)} f(x,y) - \varepsilon K_2 f(x,y), \tag{3.2}$$

здесь

$$H_0^{(2)} f(x,y) = u_0^{(2)}(x,y) f(x,y), \quad K_2 f(x,y) = \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} k_2(x,y;s,t) f(s,t) ds dt$$

и

$$u_0^{(2)}(x,y) = 4a_1a_2 \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos x_k) \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k),$$

ядро $k_2(x,y;s,t)$ – *невырожденное:*

$$k_2(x,y;s,t)=\lambda_0\varphi_0(x,y)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(1)}(x_i)\varphi_p^{(1)}(s_i)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(2)}(x_i)\varphi_p^{(2)}(s_i)$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(1)}(y_i)\varphi_q^{(1)}(t_i)+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(2)}(y_i)\varphi_q^{(2)}(t_i),$$

где

$$\lambda_0=(2\pi)^{\nu}\alpha_0,\quad \lambda_p^{(1)}=(2\pi)^{2\nu}\alpha_p,\quad \lambda_q^{(2)}=(2\pi)^{2\nu}\beta_q;$$
$$\varphi_0(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{\nu}},\quad \varphi_p^{(1)}(x_i)=\frac{\cos px_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}}\pi^{\nu}},\quad \varphi_p^{(2)}(x_i)=\frac{\sin px_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}}\pi^{\nu}},\quad i=1,2,\ldots,\nu.$$

Доказательство. I. Сначала рассмотрим преобразование Фурье оператора Q_0:

$$\mathcal{F}:Q_0\to H_0^{(2)}.$$

Положим

$$Q_0\phi(m,n)=\psi_1(m,n),\qquad \psi_1(m,n)\in l_2(\mathbb{Z}^{\nu}\times\mathbb{Z}^{\nu}),\qquad \zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)=e^{i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}:\psi_1(m,n)\to g_1(x,y)=&\frac{1}{(2\pi)^{\nu}}\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\psi(p^{(1)},q^{(1)})e^{i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]}\\
=&\frac{1}{(2\pi)^{\nu}}\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\left[\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\phi(k,l)\right]\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\\
=&\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\left(\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\right)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\\
=&\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\\
=&\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{\substack{p^{(1)}-k=0\\ q^{(1)}-l=0\\ k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\\
&+\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{\substack{|p^{(1)}-k|=1\\ q^{(1)}-l=0\\ k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\\
&+\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{\substack{p^{(1)}-k=0\\ |q^{(1)}-l|=1\\ k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\\
&+\int_{\mathbb{T}^{\nu}}\int_{\mathbb{T}^{\nu}}f(s,t)\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^{\nu}}\sum_{\substack{|p^{(1)}-k|=1\\ |q^{(1)}-l|=1\\ k,l\in\mathbb{Z}^{\nu}}}v_0(p^{(1)}-k,q^{(1)}-l)\zeta_{p^{(1)},q^{(1)}}(x,y)\overline{\zeta_{k,l}(s,t)}dsdt\\
=&T_1f(x,y)+T_2f(x,y)+T_3f(x,y)+T_4f(x,y),\quad f\in L_2(\mathbb{T}^{\nu}\times\mathbb{T}^{\nu}).
\end{aligned}$$

Здесь через T_1, T_2, T_3, T_4 обозначены операторы, которые участвуют в последнем выражении по порядкам в слагаемых. Для каждого оператора T_k, $k = 1, 2, 3, 4$ имеет место следующее равенство:

$$T_1 f(x,y) = 4a_1a_2\nu^2 f(x,y), \quad T_2 f(x,y) = -4a_1a_2\nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k f(x,y),$$

$$T_3 f(x,y) = -4a_1a_2\nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k f(x,y), \quad T_4 f(x,y) = 4a_1a_2 \left(\sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k\right) f(x,y).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(x,y) =& \Bigg(4a_1a_2\nu^2 - 4a_1a_2\nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k - 4a_1a_2\nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k \\ &+ 4a_1a_2 \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k\Bigg) f(x,y) \\ =& 4a_1a_2 \sum_{k=1}^{\nu} (1-\cos x_k) \sum_{k=1}^{\nu} (1-\cos y_k) f(x,y). \end{aligned}$$

II. Теперь рассмотрим преобразование Фурье оператора Q_1:

$$\mathcal{F} : Q_1 \to K_2.$$

Положим, $Q_1\phi(m,n) = \psi_2(m,n)$, $\psi_2(m,n) \in l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \psi_2(m,n) \to g_2(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)},q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \psi(p^{(1)},q^{(1)}) e^{i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)},q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} v_1(p^{(1)},q^{(1)}) \phi(p^{(1)},q^{(1)}) e^{i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]} \\ &= \sum_{p^{(1)},q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} v_1(p^{(1)},q^{(1)}) \left(\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} f(s,t) e^{-i[(p^{(1)},s)+(q^{(1)},t)]} ds dt\right) e^{i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]} \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \sum_{p^{(1)},q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} v_1(p^{(1)},q^{(1)}) e^{-i(p^{(1)},s-x)-i(q^{(1)},t-y)} f(s,t) ds dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} k_2(x,y;s,t) f(s,t) ds dt. \end{aligned}$$

Для ядра $k_2(x,y;s,t)$ интегрального оператора K_2 получим

$$\begin{aligned} k_2(x,y;s,t) =& \sum_{p^{(1)},q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} v_1(p^{(1)},q^{(1)}) e^{-i(p^{(1)},s-x)-i(q^{(1)},t-y)} \\ =& \alpha_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q e^{-i(\pm qe_j,t-y)} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p e^{-i(\pm pe_j,s-x)} \\ =& \alpha_0 + I_1(y,t) + I_2(x,s), \end{aligned}$$

где

$$I_1(y,t)=\sum_{q=1}^{\infty}\beta_q e^{-i(\pm qe_j,t-y)}=2\sum_{q=1}^{\infty}\beta_q\sum_{i=1}^{\nu}\cos qy_i\cos qt_i+2\sum_{q=1}^{\infty}\beta_q\sum_{i=1}^{\nu}\sin qy_i\sin qt_i,$$

$$I_2(x,s)=\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p e^{-i(\pm pe_j,s-x)}=2\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p\sum_{i=1}^{\nu}\cos px_i\cos ps_i+2\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p\sum_{i=1}^{\nu}\sin px_i\sin ps_i.$$

Следовательно имеем,

$$k_2(x,y;s,t)=\lambda_0\varphi_0(x,y)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(1)}(x_i)\varphi_p^{(1)}(s_i)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(2)}(x_i)\varphi_p^{(2)}(s_i)$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(1)}(y_i)\varphi_q^{(1)}(t_i)+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(2)}(y_i)\varphi_q^{(2)}(t_i).$$

Таким образом, преобразование Фурье $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ оператора $Q(\varepsilon):l_2(\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}^\nu)\to l_2(\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}^\nu)$ действует в $L_2(\mathbb{T}^\nu\times\mathbb{T}^\nu)$ по формуле (3.2). Лемма 3.1 доказана.

□

4. Дискретный спектр гамильтониана $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$

Согласно лемме 3.1, дискретный оператор Шредингера $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2) является оператором в модели Фридрихса с невырожденным ядром. Имеем $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2(\varepsilon))=[0,16a_1a_2\nu^2]$.

Теорема 4.1. *Пусть $\nu=1,2$. При всех $\varepsilon>0$ двухчастичный гамильтониан $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2) имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений.*

Доказательство. Пусть β – произвольное положительное число, для которого $\beta\geqslant 8\nu a_1a_2$. В пространстве $L_2(\mathbb{T}^\nu\times\mathbb{T}^\nu)$ определим оператор $\widetilde{H}_1(\varepsilon)$ в модели Фридрихса следующим образом

$$\widetilde{H}_1(\varepsilon)=H_0^{(1)}-\varepsilon K_1. \tag{4.1}$$

Здесь

$$H_0^{(1)}f(x,y)=\beta\sum_{k=1}^{\nu}(1-\cos y_k)f(x,y),\quad K_1f(x,y)=\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}k_1(x;s)f(s,t)dsdt,$$

где

$$k_1(x;s)=\lambda_0\varphi_0(x)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(1)}(x_i)\varphi_p^{(1)}(s_i)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(2)}(x_i)\varphi_p^{(2)}(s_i).$$

Пусть $\nu=1,2$. Очевидно, что $E_{min}(\widetilde{H}_1(\varepsilon))=E_{min}(\widetilde{H}_2(\varepsilon))=0$. Согласно лемме 2.3 и в силу предложения 2.1, оператор $\widetilde{H}_1(\varepsilon)$ (4.1) имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений, так как

$$\lim_{\xi\to0-0}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\frac{dy}{\beta\sum\limits_{k=1}^{\nu}(1-\cos y_k)-\xi}=+\infty$$

и $\dim\operatorname{Ran}K_1=\infty$. С другой стороны, $\widetilde{H}_2(\varepsilon)\leqslant\widetilde{H}_1(\varepsilon)$. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает утверждение теоремы 4.1.

□

Для каждого $\xi < 0$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ определим интегральный оператор $W(\xi)$:

$$W(\xi)f(x,y) = \int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} k_\xi(x,y;s,t)f(s,t)dsdt, \quad \text{где} \quad k_\xi(x,y;s,t) = \frac{k_2(x,y;s,t)}{u_0^{(2)}(s,t)-\xi}.$$

Рассмотрим уравнение для собственных значений $\xi < 0$:

$$u_0^{(2)}(x,y)f(x,y) - \varepsilon \int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} k_2(x,y;s,t)f(s,t)dsdt = \xi f(s,t), \quad f(s,t) \neq 0.$$

Определим функцию $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{u_0^{(2)}(x,y)-\xi} \in L_2(\Omega_\nu^2)$. Получим

$$\varepsilon W(\xi)g(x,y) = g(x,y),$$

т.е. число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $\varepsilon W(\xi)$.

Определим последовательность непрерывных функций на $(\mathbb{T}^\nu)^{4n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$F_n\left(\xi \left| \begin{matrix} x_1, x_2 \ldots, x_n, \ y_1, y_2 \ldots, y_n \\ s_1, s_2 \ldots, s_n, \ t_1, t_2 \ldots, t_n \end{matrix}\right.\right) = \begin{vmatrix} k_\xi(x_1,y_1;s_1,t_1) & \ldots & k_\xi(x_1,y_1;s_n,t_n) \\ k_\xi(x_2,y_2;s_1,t_1) & \ldots & k_\xi(x_2,y_2;s_n,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_\xi(x_n,y_n;s_1,t_1) & \ldots & k_\xi(x_n,y_n;s_n,t_n) \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

и положим

$$d_n(\xi) = \int\limits_{(\mathbb{T}^\nu)^n}\int\limits_{(\mathbb{T}^\nu)^n} F_n\left(\xi \left| \begin{matrix} s_1, s_2 \ldots, s_n, \ t_1, t_2 \ldots, t_n \\ s_1, s_2 \ldots, s_n, \ t_1, t_2 \ldots, t_n \end{matrix}\right.\right) ds_1 ds_2 \ldots ds_n dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

Следующее выражение

$$\Delta(\varepsilon;\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2(\varepsilon)) \tag{4.3}$$

является детерминантом Фредгольма для оператора $I - \varepsilon W(\xi)$, где I – тождественный оператор.

Лемма 4.1 ([23])**.** *Число $\xi \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2(\varepsilon))$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\varepsilon;\xi) = 0$.*

При $\xi \in (-\infty, 0)$ определим следующие функции

$$\Phi_2(\nu;\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dxdy}{4a_1a_2 \sum\limits_{k=1}^{\nu}(1-\cos x_k) \sum\limits_{k=1}^{\nu}(1-\cos y_k) - \xi}, \quad \text{где} \quad \mathbb{T} = [-\pi, \pi].$$

Пусть $\nu \geqslant 3$. Тогда, пользуясь леммой 2.3, можно доказать, что $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \Phi_2(\nu;\xi) < \infty$.

Положим,

$$M_\nu = \frac{2\nu}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \right), \quad A_\nu = \lim_{\xi \to 0-0} \Phi_2(\nu;\xi).$$

Тогда имеем $\Phi_2(\nu;\xi) \leqslant A_\nu$ при всех $\xi < 0$.

Теорема 4.2. *Пусть $\nu \geqslant 3$. Если $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, то отсутствует дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2).*

Доказательство. Пусть $\xi < 0$. Имеем

$$\Delta(\varepsilon;\xi) = 1 + \widetilde{\Delta}(\varepsilon;\xi), \quad \text{где} \quad \widetilde{\Delta}(\varepsilon;\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n(\xi).$$

Для ядра $k_2(x,y;s,t)$ оператора K_2 выполняется неравенство

$$k_2(x,y;s,t) \leqslant M_\nu, \quad \forall x,y,s,t \in \mathbb{T}^\nu. \tag{4.4}$$

Пользуясь неравенством Адамара и неравенством (4.4), получим

$$\left| F_n \left(\xi \left| \begin{matrix} x_1, x_2 \dots, x_n, \ y_1, y_2 \dots, y_n \\ s_1, s_2 \dots, s_n, \ t_1, t_2 \dots, t_n \end{matrix} \right. \right) \right| \leqslant \frac{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (u_0^{(2)}(s_k,t_k) - \xi)} \leqslant \frac{(M_\nu \sqrt{n})^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (u_0^{(2)}(s_k,t_k) - \xi)},$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{k_2^2(x_i,y_i;s_1,t_1) + k_2^2(x_i,y_i;s_2,t_2) + \ldots + k_2^2(x_i,y_i;s_n,t_n)}, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |d_n(\xi)| &\leqslant \int\limits_{(\mathbb{T}^\nu)^n} \int\limits_{(\mathbb{T}^\nu)^n} \frac{(M_\nu \sqrt{n})^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (u_0^{(2)}(s_k,t_k) - \xi)} ds_1 ds_2 \dots ds_n dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &= (M_\nu \sqrt{n})^n \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_1 dt_1}{u_0^{(2)}(s_1,t_1) - \xi} \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_2 dt_2}{u_0^{(2)}(s_2,t_2) - \xi} \cdots \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \int\limits_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_n dt_n}{u_0^{(2)}(s_n,t_n) - \xi} \\ &\leqslant (M_\nu \sqrt{n} A_\nu)^n. \end{aligned}$$

Для числовой последовательности $c_n = \frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$ справедливо неравенство $1 \geqslant c_n \geqslant c_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя последнее неравенство, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A_\nu M_\nu \sqrt{n})^n}{n!} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n.$$

Пусть $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n$ представляет сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n = \frac{\varepsilon A_\nu M_\nu}{1 - \varepsilon A_\nu M_\nu} < 1.$$

Таким образом,

$$\left| \widetilde{\Delta}(\varepsilon;\xi) \right| < 1, \qquad \forall \xi \in (-\infty, 0).$$

Отсюда вытекает, если $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, то $\Delta(\varepsilon;\xi) \neq 0$ при всех $\xi < 0$. Тогда, согласно лемме 4.1, у оператора $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ отсутствуют отрицательные собственные значения. Теорема 4.2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Фаддеев. *О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра.* В. кн.: Труды МИ АН СССР, **73**, М.: Наука, 292–313 (1964).
2. Р.А. Минлос, Я.Г. Синай. *Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа* // ТМФ. **4**:2, 230–243 (1970).
3. К.О. Фридрихс. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Мир, 1972.
4. С.Н. Лакаев, Р.А. Минлос. *О связанных состояниях кластерного оператора* // ТМФ. **39**:1, 83–93 (1979).

5. С.Н. Лакаев. *Об Эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц* // Функ. анализ и его прил. **27**:3, 15–28 (1993).
6. М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики.* Том 4: Анализ операторов. – М.: Мир, 1982.
7. K.O. Friedrichs. *Uber die Spectralzerlegung eines Integral operators* // Math. Ann. **115**:2, 249–300 (1938).
8. K.O. Friedrichs. *On the perturbation of continuous spectra* // Comm. Pure appl. Math. **1**:4, 361–406 (1948).
9. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* М.: Наука. 1973.
10. Ш.С. Маматов, Р.А. Минлос. *Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора* // ТМФ. **79**:2, 163–179 (1989).
11. Ю.Х. Эшкабилов. *Об одном дискретном "трехчастичном"операторе Шредингера в модели Хаббарда* // ТМФ. **149**:2, 228–243 (2006).
12. М.Э. Муминов, А.М. Хуррамов. *Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке* // Уфимск. матем. журн. **6**:4, 102–110 (2014).
13. Ю.Х. Эшкабилов. *Об одном оператора в модели Фридрихса* // УзМЖ. **3**, 85–93 (1999).
14. Ю.Х. Эшкабилов. *О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса* // Мат. труды. **14**:1, 195–211 (2011).
15. Ю.Х. Эшкабилов. *О бесконечности числа отрицательных собственных значений модели Фридрихса* // Наносистемы: физика, химия, математика. **3**:6, 16–24 (2012).
16. Ю.Х. Эшкабилов, Д.Ж. Култураев. *О бесконечности дискретного спектра операторов в многомерной модели фридрихса* // ЎзМУ Хабарлари. **1**, 83–89 (2014).
17. С.А. Имомкулов, С.Н. Лакаев. *Дискретный спектр одномерной модели Фридрихса* // Докл. АН УзСССР. **7**, 9–11 (1988).
18. С.Н. Лакаев. *О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса* // Докл. АН УзССР. **4**, 9–10 (1979).
19. С.Н. Лакаев. *Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса* // Тр. семинара Н.Г. Петровского. **11**, 210–238 (1986).
20. Ж.И. Абдуллаев. *Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке* // Узбек. матем. журн. **1**, 3–11 (2005).
21. K. Pankrashkin. *Introduction to the spectral theory.* Lecture notes of the course given at the University Paris-Sud. Orsay, France. 2014.
22. Ю.В. Жуков. *Теорема Иорио-О'Кэррола для N-частичного решетчатого гамильтониана* // ТМФ. **107**:1, 75–85 (1996).
23. Ф. Дж. Трикоми. *Интегральные уравнения.* ИЛ, М. 1960.

Юсуп Халбаевич Эшкабилов,
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17,
180100, г. Карши, Узбекистан
E-mail: `yusup62@mail.ru`

Даврон Жураевич Култураев,
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17,
180100, г. Карши, Узбекистан