ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 3-22.

УДК 517.982, 517.983

МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПОТОКОВ

В.А. ГЛАЗАТОВ, В.Ж. САКБАЕВ

Аннотация. В настоящей статье исследуются гамильтоновы потоки в наделенном симплектической структурой вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Исследованы меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно потоков вполне интегрируемых гамильтоновых систем, и позволяющие описывать гамильтоновы потоки в фазовом пространстве посредством унитарных групп в пространстве квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций. Введенные инвариантные относительно вполне интегрируемых потоков меры применяются к изучению модельных линейных гамильтоновых систем, допускающих особенности типа неограниченного возрастания за конечное время кинетической энергии. Благодаря такому подходу решения уравнений Гамильтона, допускающие особенности, могут быть описаны посредством фазового потока в расширенном фазовом пространстве и соответствующей купмановскому представлению унитарной группы.

Ключевые слова: трансляционно инвариантная мера, теорема А. Вейля, гамильтонов поток, купмановское представление.

Mathematical Subject Classification: 28C20, 28D05, 37A05, 37K05

1. Введение

Изучение мер на не являющихся локально компактными топологических векторных пространствах, инвариантных относительно различных групп преобразований, приводит, согласно теореме А. Вейля, к анализу мер, не обладающих некоторыми из свойств меры Лебега.

Теорема 1.1 (А. Вейль). *Если топологическая группа G не является локально компактной, то не существует нетривиальной σ-аддитивной σ-конечной локально конечной борелевской лево-инвариантной меры на группе G.*

Построение аналогов меры Лебега на бесконечномерных локально выпуклых (в частности, гильбертовых) пространствах требуется для изучения процедуры квантования бесконечномерных гамильтоновых систем (в частности, вторичного квантования), для задач статистической механики, для изучения случайных унитарных групп и динамики открытых квантовых систем. Одним из важных свойств меры Лебега на конечномерном евклидовом пространстве как на абелевой топологической группе с операцией сложения элементов помимо перечисленных в теореме Вейля, является ее инвариантность относительно действия произвольного элемента группы (т.е. сдвига на произвольный вектор), но и относительно преобразований сдвигов вдоль траекторий гладких бездивергентных векторных полей, в частности, относительно гамильтоновых преобразований.

V.A. Glazatov, V.Zh. Sakbaev, Measures on Hilbert space that are invariant with respect to Hamiltonian flows.

Поступила 27 мая 2021 г.

В связи с этим можно сформулировать задачу исследования мер на бесконечномерном симплектическом пространстве (т.е. линейном пространстве снабженном невырожденной замкнутой дифференциальной 2-формой), инвариантных относительно группы симплектоморфизмов. В бесконечномерном симплектическом пространстве данная задача связана с рядом принципиальных сложностей, одной из которых является утверждение теоремы Вейля. Для получения позитивных результатов для решения поставленной задачи потребовалось ослабить налагаемые теоремой А. Вейля ограничения на искомую инвариантную меру – были найдены меры, не являющиеся либо счетно-аддитивными, либо сигма-конечными, либо обобщенными (являющимися линейными функционалами на пространстве пробных функций, но не функциями множества). Для описания мер, инвариантных относительно группы симплектоморфизмов бесконечномерного пространства, потребуется связать условия, предъявляемые к мере, с условиями, предъявляемыми к группе симплектоморфизмов.

Поскольку группа сдвигов на векторы пространства является подгруппой группы гамильтоновых потоков, порожденных линейными по координатам и импульсам функциями Гамильтона, то построение трансляционно инвариантных мер на локально выпуклых пространствах является важным шагом в исследовании поставленной задачи. Так, в [4], [12] была исследована инвариантная относительно сдвигов мера на пространстве последовательностей, не являющаяся локально конечной и σ-конечной. В [7] построена конечно-аддитивная мера на гильбертовом пространстве, инвариантная относительно сдвигов и ортогональных преобразований. В [10] были предложены обобщенные меры Лебега на гильбертовом пространстве, являющиеся функционалами на подходящем пространстве пробных функций, инвариантные относительно сдвигов и ортогональных преобразований. Заметим, что группа ортогональных преобразований евклидова пространства является, как и группа сдвигов, подгуппой в группе гамильтоновых преобразований наделенного симплектической структурой евклидова фазового пространства. Ортогональные преобразования порождаются обладающими определенной симметрией квадратичными гамильтонианами на фазовом пространстве (см. [11]).

В настоящей работе исследуются продолжения меры из работы [7] на более широкое кольцо подмножеств, инвариантные относительно потоков, порождаемых некоторыми гамильтоновыми полями. Так мера, полученная продолжением трансляционно инвариантной меры до инвариантной относительно всех ортогональных преобразований, обладает свойством инвариантности относительно всех изометрических симплектоморфизмов евклидова фазового пространства. Такой же группой инвариантности обладает и обобщенная мера Лебега-Фейнмана, построенная в работе [10]. Но ни одна из этих мер не инвариантна относительно гамильтоновых потоков, допускающих сжатия и растяжения по бесконечному набору направлений в евклидовом фазовом пространстве. В настоящей работе будет определено расширение трансляционно инвариантной меры из работы [8] до меры, инвариантной относительно подгруппы группы симплектоморфизмов евклидова фазового пространства, оставляющих инвариантными двумерные симплектические подпространства фазового пространства, тем самым, факторизующихся в счетное тензорное произведение двумерных гамильтоновых преобразований. Такие расширения будем называть симплектическими мерами.

Найденная группа преобразований инвариантной меры включает сдвиги на любой вектор, порождаемый произвольным линейным уравнением Шредингера поток, нешредингеровы линейные и некоторые нелинейные гамильтоновы потоки [11]. Исследован эффект неограниченного возрастания кинетической энергии гамильтоновой системы за конечное время, присущий сверхкритическому нелинейному уравнению Шредингера [2].

В настоящей статье унитарные преобразования гильбертова пространства, порождаемые уравнением Шредингера, изучаются как гамильтоновы потоки на бесконечномерном симплектическом пространстве, получаемом как овеществление гильбертова пространства квантовой системы. Исследуются также гамильтоновы потоки в наделенном симплектической структурой на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Приведен пример квадратичных гамильтонианов (гиперболических осцилляторов) на гильбертовом фазовом пространстве, для которых решения линейной системы уравнений Гамильтона допускают явление неограниченного возрастания кинетической энергии за конечное время. Показано, что динамика таких гамильтоновых систем допускает естественное продолжение с гильбертова фазового пространства на содержащее его локально выпуклое фазовое пространство. А именно, найдено продолжение симплектической формы с гильбертова пространства на топологическое векторное пространство числовых последовательностей, такое, что фазовый поток допускает единственное покоординатное продолжение в расширенное фазовое пространство. Симплектическая мера на гильбертовом фазовом пространстве допускает единственное продолжение до симплектической меры на расширенном локально выпуклом пространстве последовательностей. При этом преобразования из расширенного потока сохраняют симплектическую форму и симплектическую меру на расширенном фазовом пространстве.

В разделе 2 приведено описание однородной симплектической структуры на сепарабельном гильбертовом пространстве и гамильтоновой структуры шредингеровой динамики.

В разделе 3 построена конечно-аддитивная мера на вещественном сеперабельном гильбертовом пространстве, снабженном стандартной симплектической структурой, инвариантных относительно факторизующихся на инвариантные двумерные симплектические подпространства гамильтоновых потоков.

В разделе 4 дано описание овеществления унитарного пространства и комплексификации вещественного евклидова пространства, с помощью последней на вещественном евклидовом пространстве вводится симплектическая структура. Получен изоморфизм алгебры ограниченных операторов в унитарном пространстве с подалгеброй в алгебре ограниченных операторов в евклидовом пространстве, согласованном с симплектической структурой.

В разделе 5 рассмотрены приложения инвариантной меры к гамильтоновым системам и уравнению Шредингера. Рассмотрен пример гамильтновой системы «бесконечномерный гиперболический осциллятор», для которой установлены явление неограниченного возрастания кинетической энергии и явление неограниченного роста нормы фазового пространства на конечном временном интервале при движении по фазовой траектории. Этот эффект означает конечность времени пребывания траектории в рассматриваемом фазовом пространстве.

В разделе 6 определена процедура расширения фазового пространства и процедура продолжения траекторий гамильтоновой системы, покидающих фазовое пространство за конечное время, в расширенное симплектическое пространство. Получено купмановское представление гамильтонова потока в расширенном фазовом пространстве посредством унитарной группы в пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно симплектоморфизмов мере.

2. Симплектическая структура

Симплектической структурой на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма на пространстве E. Если симплектическая структура на гильбертовом пространстве E инвариантна относительно сдвигов, то она задается невырожденной кососимметрической билинейной формой ω на пространстве E (при этом гильбертово пространство E отождествляется со своим сопряженным). Ассоциированный с билинейной формой ω линейный оператор

$\mathbf{J}$ является невырожденным кососимметрическим оператором (см. [5], [9]). Симплектическая структура ω на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется естественной, если в пространстве E существует такой ортонормированный базис $\{g_k\} \equiv \mathcal{G}$, что $\omega(g_{2k-1}, g_j) = \delta_{j,2k},\ k, j \in \mathbb{N}$, $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера.

Естественная симплектическая структура ω определяет разложение пространства E в прямую сумму двух подпространств $Q \oplus P$, ортонормированными базисами в которых являются соответственно ортонормированные системы $e_j = g_{2j-1}$, $j \in \mathbb{N}$ и $f_k = g_{2k},\ k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega(e_j, e_i) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \forall \quad i, j \in \mathbb{N}; \qquad \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk},\ j, k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

(см. [10]). В этом случае базис $\{g_i,\ i \in \mathbb{N}\} = \{e_j, f_k;\ j,\ k \in \mathbb{N}\}$ называется симплектическим базисом пространства E, соответствующим симплектической форме ω. Обозначим через $\mathbf{I}$ изоморфизм линейного пространства Q на линейное пространство P такой, что $\mathbf{I}(e_j) = f_j$, $j \in \mathbb{N}$. Естественная симплектическая форма ω на пространстве E с симплектическим базисом $\{e_j, f_k;\ j \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N}\}$ может быть задана как квадратичная форма кососимметрического симплектического оператора $\mathbf{J}$, задаваемого равенствами

$$\mathbf{J}(e_j) = -f_j, \quad \mathbf{J}(f_k) = e_k, \quad j \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N}.$$

При этом Q и P называются конфигурационным пространством и пространством импульсов соответственно, и предполагается, что P является сопряженным к Q пространством (см. [5], [10], [11]).

Гамильтоновой системой называется тройка $(E, \mathbf{J}, h)$, где $(E, \mathbf{J})$ – гильбертово пространство с симплектической структурой, $h:\ E_2 \to \mathbb{R}$ – определенная и непрерывно дифференцируемая по Гато на векторном подпространстве E_2 пространства E функция, называемая функцией Гамильтона.

Напомним, что функция $h\ :\ E_1 \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой относительно плотно вложенного в гильбертово пространства E гильбертова подпространства $E_2 \subset E_1$ в точке $z_0 \in E_2$, если существует вектор $h'(z_0) \in E$ такой, что для любого $z \in E_2$ выполняется равенство

$$h(z_0 + z) - h(z_0) - (h'(z_0), z)_E = o(\|z\|_E), \qquad z \to 0.$$

Функция $H:\ E_1 \to \mathbb{R}$ называется непрерывно дифференцируемой относительно линейного подпространства $E_2 \subset E_1$, если

$$\lim_{\|z\|_{E_2} \to 0} \|h'(z_0 + z) - h'(z_0)\|_E = 0$$

для любого $z_0 \in E_2$.

Например, если функция Гамильтона h определяется равенством

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k^2, \tag{2.2}$$

где $\{\lambda_k\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x_k = (x, e_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $\{e_k\}$ – некоторый ОНБ в пространстве E, то тогда

$$E_1 = \{x \in E:\ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| x_k^2 < \infty\}, \qquad E_2 = \{x \in E:\ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 x_k^2 < \infty\}.$$

Уравнение $z'(t) = \mathbf{J}(h'(z(t)))$, $t \in \Delta$, относительно определенной на вещественном промежутке Δ и принимающей значения в пространстве E_2 функции $z:\ \Delta \to E_2$ называется уравнением Гамильтона для гамильтоновой системы $(E, \mathbf{J}, h)$ ([5], [11]).

Линейное уравнение Шредингера является уравнением Гамильтона некоторой гамильтоновой системы с квадратичной функцией Гамильтона; роль фазового пространства здесь играет овеществление гильбертова пространства квантовой системы [11].

Плотно определенное векторное поле $\mathbf{v}: \ E_2 \to E$ называется гамильтоновым, если существует такая функция Гамильтона $h: \ E_1 \to \mathbb{R}$, что $\mathbf{v}(z) = \mathbf{J}Dh(z)$, $z \in E_2$. Здесь функция h дифференцируема на плотно вложенном в пространство E подпространстве $E_2 \subset E_1$, Dh – дифференциал функции h, $\mathbf{J}$ – линейный оператор, ассоциированный с билинейной формой ω в гильбертовом пространстве E.

Однопараметрическая группа Φ_t, $t \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых преобразований пространства E_2 называется гладким гамильтоновым потоком в пространстве E_2, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}: \ E_2 \to E$, если выполняется равенство $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}_t(q,p) = \mathbf{v}(\mathbf{\Phi}_t(q,p))$, $(q,p) \in E_2$. Если гамильтонов поток в пространстве E_2 допускает единственное продолжение по непрерывности с пространства E_2 на пространство E, то такое продолжение потока называется обобщенным гамильтоновым потоком в пространстве E, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}$ (гамильтонианом h). Такое продолжение гладкого гамильтонова потока до обобщенного существует, если гладкий поток не увеличивает норму векторов пространства E, что реализуется в случае потока, порождаемого связанной с линейным уравнением Шредингера гамильтоновой системой.

3. Меры, инвариантные относительно потоков

Поставим задачу определить меры на вещественном гильбертовом пространстве $E = Q \oplus P$ с симплектической формой $\mathbf{J}$, инвариантные относительно гамильтоновых потоков, сохраняющих стандартную симплектическую структуру $(E, \mathbf{J})$. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ – симплектический базис симплектической формы ω (см. (2.1)).

Определение 3.1. *Множество $\Pi \subset E$ называется абсолютно измеримым симплектическим брусом в гильбертовом пространстве E, если существует симплектическая форма ω на пространстве E, имеющая симплектический базис $\{e_j, f_k, \ j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ пространства E, и такая, что множество Π задается равенством*

$$\Pi = \{z \in E: \ ((z,e_i),(z,f_i)) \in B_i, \ i \in \mathbb{N}\}, \tag{3.1}$$

где B_i – измеримые по Лебегу множества в плоскости $\mathbb{R}^2$ такие, что выполняется условие $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max\{\ln(\lambda_2(B_j)), 0\} < +\infty$ (здесь λ_2 – мера Лебега на $\mathbb{R}^2$).

Множество всех абсолютно измеримых симплектических брусов в гильбертовом пространстве E обозначим символом $\mathcal{K}(E)$.

Заметим, что в определении 3.1 для каждого симплектического бруса симплектический базис может быть свой. Фиксировав симплектический базис $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$, обозначим через $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \equiv \mathcal{K}_{\mathcal{G}}(E)$ множество всех абсолютно измеримых симплектических брусов, имеющих вид (3.1) в заданном базисе $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$. Определим функцию множества $\lambda: \ \mathcal{K}(E) \to [0, +\infty)$, задаваемую равенством

$$\lambda(\Pi) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(B_j) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(\lambda_2(B_j))\right),$$

при условии, что $\Pi \neq \emptyset$; в случае $\Pi = \emptyset$ положим $\lambda(\Pi) = 0$.

Легко видеть, что если $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$, то выполняется условие $A \bigcap B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$; что класс множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ инвариантен относительно сдвига на произвольный вектор пространства E и что функция множества $\lambda: \ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ инвариантна относительно сдвига. Множество $\Pi \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ из (3.1) будем обозначать символом $\times_{j=1}^{\infty} B_j$.

Лемма 3.1. *Функция множества $\lambda: \ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ является аддитивной.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай объединения двух дизъюнктных множеств. Пусть $A = A^{(1)} \bigcup A^{(2)}$, где $A, A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ – непустые множества и $A^{(1)} \bigcap A^{(2)} = \emptyset$. Тогда существует по крайней мере одно $j \in \mathbb{N}$ (для определенности $j = 1$) такое, что

$$A = B_1 \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j), \quad A^{(1)} = B_1' \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j), \quad A^{(2)} = B_1'' \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j)$$

и при этом $B_1 = B_1' \bigcup B_1'', \quad B_1' \bigcap B_1'' = \emptyset$.

Действительно, пусть

$$A = B_1 \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j), \quad A^{(1)} = B_1' \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j'), \quad A^{(2)} = B_1'' \times (\times_{j=2}^{\infty} B_j'').$$

Ортогональными проекциями множеств $A, A^{(1)}, A^{(2)}$ на двумерное пространство $\pi_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$ есть множества $B_k, B_k' B_k''$ соответственно. Поэтому $B_k = B_k' \bigcup B_k''$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Случай $B_k = B_k' = B_k''$ при всех $k \in \mathbb{N}$ противоречит условию $A^{(1)} \bigcap A^{(2)} = \emptyset$, поэтому рассмотрим случай, когда существует $j \in \mathbb{N}$ (пусть $j = 1$) такое, что $B_1 \backslash B_1' \neq \emptyset$ и либо $B_1'' = B_1$, либо $B_1 \backslash B_1'' \neq \emptyset$.

Покажем, что если $B_1 \backslash B_1' \neq \emptyset$ и $B_1'' = B_1$, то $B_k'' = B_k$ при всех $k = 2, 3, \ldots$. Предположим противное, что существует $j \in \mathbb{N}$ (можно считать, что $j = 2$) такое, что $B_2 \backslash B_2'' \neq \emptyset$. Пусть $z_1 \in B_1 \backslash B_1'$ и $z_2 \in B_2 \backslash B_2''$. Тогда найдутся такие $z_k \in B_k$, $k = 3, 4, \ldots$, что $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots) \in A$, но при этом $z \notin A^{(1)}$, так как $z_1 \notin B_1'$ и $z \notin A^{(2)}$, так как $z_2 \notin B_2''$. Противоречие с условием $A^{(1)} \bigcup A^{(2)} = A$ показывает, что $B_k'' = B_k$ при всех $k = 2, 3, \ldots$. В таком случае $A^{(2)} = A$, а это противоречит требованию $A^{(1)} \neq \emptyset$ и $A^{(1)} \bigcup A^{(2)} = A$.

Следовательно, возможен только случай, когда $B_1 \backslash B_1' \neq \emptyset$ и $B_1 \backslash B_1'' \neq \emptyset$. Покажем, что в таком случае $B_k = B_k' = B_k''$ при всех $k = 2, 3, \ldots$. Предположим противное, что существует $j \in \mathbb{N}$ (можно считать, что $j = 2$) такое, что $B_2 \backslash B_2' \neq \emptyset$ или $B_2 \backslash B_2'' \neq \emptyset$. Тогда если $z_2 \in B_2 \backslash B_2'$ и $z_1 \in B_1 \backslash B_1''$ (или наоборот), то найдется точка $z = (z_1, z_2, \ldots) \in A$ такая, что $z \notin A^{(1)} \bigcup A^{(2)}$. Следовательно, $B_k = B_k' = B_k''$ при всех $k = 2, 3, \ldots$.

Тогда из условий

$$A^{(1)} \neq \emptyset, \quad A^{(2)} \neq \emptyset, \quad A^{(1)} \bigcap A^{(2)} = \emptyset, \quad A^{(1)} \bigcup A^{(2)} = A$$

следует, что

$$B_1' \neq \emptyset, \quad B_1'' \neq \emptyset, \quad B_1' \bigcap B_1'' = \emptyset, \quad B_1' \bigcup B_1'' = B_1.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть

$$A = A^{(1)} \bigcup A^{(2)} \bigcup \ldots \bigcup A^{(N)},$$

где $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(N)} \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ – непустые множества и $A^{(i)} \bigcap A^{j)} = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пусть

$$A = (\times_{j=1}^{\infty} B_j), \qquad A^{(l)} = \times_{j=1}^{\infty} B_j^{(l)}), \qquad l = 1, \ldots, N.$$

Тогда существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $B_k = B_k^{(l)}$ при всех $k = M+1, M+2, \ldots,$ и всех $l = 1, \ldots, N$.

Предположим противное, тогда найдется строго возрастающая последовательность номеров $\{k_n\}$ такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ найдется $l_n \in \{1, \ldots, N\}$, при котором $B_{k_n} \backslash B_{k_n}^{l_n} \neq \emptyset$, в то время как $B_j \backslash B_j^j = \emptyset$ при всех $l = 1, \ldots, N$, если $j \neq k_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Если множество значений последовательности $\{l_n\}$ совпадает с множеством $\{1, \ldots, N\}$, то тогда, как показано выше, найдется точка $z \in A$ такая, что $z_{k_n} \notin B_{k_k}^{l_n}$, $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно $z \notin A^{(1)} \bigcup \ldots \bigcup A^{(N)}$, что противоречит условиям леммы. Если же множество значений последовательности $\{l_n\}$ является собственным подмножеством множества $\{1, \ldots, N\}$, то среди множеств $A^{(1)}, \ldots, A^{(N)}$ найдется хотя бы одно совпадающее с множеством A, а это противоречит условиям леммы.

Таким образом, справедливо утверждение – существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$B_k = B_k^{(l)}, \qquad k = M+1, M+2, M+3, \ldots, \qquad l = 1, \ldots, N.$$

Из полученного утверждения и аддитивности меры Лебега на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^M$ следует утверждение леммы. □

Пусть $r_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ – минимальное кольцо, порожденное системой множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Непосредственно легко проверить следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Класс Λ множеств вида*

$$A = \Pi \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \right),$$

где $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, является полукольцом.

Следствие 3.1. *Класс множеств $r_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, состоящий из конечных объединений множеств из полукольца Λ, является минимальным кольцом, содержащим класс множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.*

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим совокупность Λ_n множеств вида $A = \Pi \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i \right)$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, а также совокупность V_n множеств вида $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i$, где $\Pi_1, \ldots, \Pi_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Тогда $\Lambda_n \supset \Lambda_{n-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и справедливо равенство $\Lambda = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$.

Лемма 3.3. *Пусть $\Pi, Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ и $Q \subset \Pi$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\Pi \supset Q_N \supset Q$, $\lambda(Q_N) - \lambda(Q) < \epsilon$ и существуют попарно непересекающиеся симплектические брусы $\Pi_1, \ldots, \Pi_m \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ такие, что $\Pi \backslash Q_N = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Pi_j$.*

Доказательство. Если $\lambda(\Pi) = 0$, то утверждение верно при $Q_N = \Pi$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\lambda(\Pi) > 0$.

Пусть

$$\Pi = B_1 \times \ldots \times B_n \times \ldots, \qquad Q = G_1 \times \ldots \times G_n \times \ldots,$$

где $B_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $Q \subset \Pi$, то

$$G_j \subset B_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

При этом из условия $\lambda(\Pi) > 0$ следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{j=n+1}^{\infty} \lambda_2(B_j) = 1. \tag{3.2}$$

Выберем некоторое $\epsilon > 0$. Так как $\lambda(Q) = \lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{j=1}^{n} \lambda_2(G_j)$, то в силу условия (3.2) существует такое $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N$ выполняются неравенства

$$\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(G_j) \leqslant \prod_{j=1}^{N} \lambda_2(G_j) \prod_{j=N+1}^{\infty} \lambda_2(B_j) \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(G_j) + \epsilon.$$

Следовательно, множество

$$Q_N = G_1 \times \ldots \times G_N \times B_{N+1} \times B_{N+2} \times \ldots$$

удовлетворяет условиям

$$\Pi \supset Q_N \supset Q \quad \text{и} \quad \lambda(Q) \leqslant \lambda(Q_N) \leqslant \lambda(Q) + \epsilon.$$

Кроме того, множество $\Pi \backslash Q_N$ имеет вид

$$\left(\times_{j=1}^{\infty} B_j \right) \backslash \left(\times_{j=1}^{N} G_j \right) \times \left(\times_{j=N+1}^{\infty} B_j \right) = \left(\times_{j=1}^{N} B_j \backslash \times_{j=1}^{N} G_j \right) \times \left(\times_{j=N+1}^{\infty} B_j \right).$$

Поскольку в конечномерном простанстве $\mathbb{R}^{2N}$ разность двух симплектических брусов $\times_{j=1}^{N} B_j \setminus \times_{j=1}^{N} G_j$ является объединением некоторого конечного множества попарно непересекающихся симплектических брусов $\bigcup\limits_{k=1}^{m} C_k$, то $\Pi\setminus Q_N = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi_k$, где $\Pi_k = C_k \times \left(\times_{j=N+1}^{\infty} B_j\right)$ – абсолютно измеримый симплектический брус при каждом $k = 1, \dots, m$. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\Pi, Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ *и* $Q \subset \Pi$. *Тогда существует последовательность* $\{\Pi_k\}$ *попарно непересекающихся симплектических брусов из класса* $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ *такая, что* $\Pi\setminus Q = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ *и* $\lambda(\Pi) = \lambda(Q) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k)$.

Доказательство. Пусть

$$\Pi = B_1 \times \ldots \times B_n \times \ldots \quad \text{и} \quad Q = G_1 \times \ldots \times G_n \times \ldots,$$

где $B_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $Q \subset \Pi$, то

$$G_j \subset B_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$D_1 = B_1\setminus G_1, \quad Q_1 = G_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots, \qquad \Pi_1 = D_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots.$$

Тогда $Q \subset Q_1$, $Q_1 \bigcap \Pi_1 = \emptyset$ и $\Pi = \Pi_1 \bigcup Q_1$.

Положим

$$D_2 = B_2\setminus G_2, \quad Q_2 = G_1 \times G_2 \times B_3 \times \ldots, \qquad \Pi_2 = G_1 \times D_2 \times B_3 \times \ldots.$$

Тогда $Q \subset Q_2$, $Q_2 \bigcap \Pi_2 = \emptyset$, $Q_1 = \Pi_2 \bigcup Q_2$ и, следовательно, $\Pi = \Pi_1 \bigcup \Pi_2 \bigcup Q_2$.

Определим последовательность измеримых подмножеств плоскости $D_1, \dots, D_k, \dots$ посредством равенств $D_i = B_i\setminus G_i$, $i = 1, \dots, n, \dots$. Тогда, если при некотором $k \in \mathbb{N}$

$$Q_k = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k \times B_{k+1} \times \ldots, \qquad \Pi_k = G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times D_k \times B_{k+1} \times \ldots,$$

то множества $\Pi_1, \dots, \Pi_k, Q_k$ попарно не пересекаются, $Q \subset Q_k$ и

$$\Pi = \Pi_1 \bigcup \ldots \bigcup \Pi_k \bigcup Q_k. \tag{3.3}$$

Тогда $\{\Pi_k\}$ – последовательность абсолютно измеримых попарно непересекающихся симплектических брусов и справедливы равенства

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k = \Pi\setminus Q; \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k) = \lambda(\Pi) - \lambda(Q). \tag{3.5}$$

Действительно, для любого $x \in \Pi\setminus Q$ найдется $k : x_k \notin G_k$ и $x_j \in B_j$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть $k_x = \min\{k \in \mathbb{N} :\ x_k \notin G_k\}$. Тогда

$$x \in G_1 \times \ldots \times G_{k_x - 1} \times D_{k_x} \times B_{k_x+1} \times \ldots = \Pi_{k_x},$$

что и доказывает равенство (3.4). Чтобы доказать равенство (3.5) заметим, что в силу (3.3) равенство $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda(\Pi_j) = \lambda(\Pi) - \lambda(Q_k)$ справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\lambda(Q_k) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_2(G_k) \prod_{j=k+1}^{\infty} \lambda_2(B_j) \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

то в силу равенства (3.2) (в силу леммы 3.3) выполняется соотношение (3.5). □

Теорема 3.1. *Аддитивная функция множества* $\lambda: \ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0,+\infty)$ *имеет единственное аддитивное продолжение на полукольцо* Λ.

Доказательство. Методом математической индукции будет доказано, что при любом $n \in \mathbb{N}$ аддитивная функция множества $\lambda: \ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0,+\infty)$ имеет единственное аддитивное продолжение на класс Λ_n и единственное аддитивное продолжение на класс множеств V_n. Это докажет утверждение теоремы поскольку $\Lambda = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$.

В силу леммы 3.1 при $n = 1$ функция λ является аддитивной функцией на классе множеств V_1, совпадающим с классом $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Шаг 1. Покажем, что функция λ имеет единственное аддитивное продолжение на класс Λ_1.

Пусть $A \in \Lambda_1$ и допустим, что $A = \Pi \backslash \Pi_1$ при некоторых $\Pi, \Pi_1 \in V_1$. Тогда $\Pi \bigcap \Pi_1 \in V_1$. Из требования аддитивности продолжения функции λ на класс Λ_1 следует, что

$$\lambda(A) = \lambda(\Pi) - \lambda(\Pi \bigcap \Pi_1). \tag{3.6}$$

Покажем, что значение $\lambda(A)$ не зависит от представления множества A в виде разности двух абсолютно измеримых симплектических брусов.

Пусть $A = Q_1 \backslash Q_2 = Q_1 \backslash (Q_1 \bigcap Q_2)$ и $A = Q_3 \backslash Q_4 = Q_3 \backslash (Q_3 \bigcap Q_4)$.

Поскольку в определении функции λ на классе Λ_1 по формуле (3.6) фигурирует только пересечение $\Pi \bigcap \Pi_1$, то мы можем считать, что $\Pi_1 \subset \Pi$, $Q_2 \subset Q_1$, $Q_4 \subset Q_3$. Покажем, что

$$\lambda(Q_1) - \lambda(Q_2) = \lambda(Q_3) - \lambda(Q_4). \tag{3.7}$$

Согласно лемме 3.4, существует такая последовательность $\{\Pi_k\}$ попарно непересекающихся симплектических брусов из класса $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$, что знакопостоянный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k)$ сходится, а брусы Q_i, $i = 1,2,3,4$ представимы как объединения некоторой части брусов из множества значений последовательности $\{\Pi_k\}$. При этом каждый брус Π_k либо целиком лежит в брусе Q_i, либо не имеет с брусом Q_i общих точек. Пусть

$$\mathbb{N}_i = \{k \in \mathbb{N}: \ \Pi_k \subset Q_i\}, \quad i = 1,2,3,4.$$

Тогда $\mathbb{N}_1 \backslash \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}_3 \backslash \mathbb{N}_4 = \{k \in \mathbb{N}: \ \Pi_k \subset A\} \equiv \mathbb{N}_A$. Значит, справедливо равенство (3.7).

Таким образом, функция λ имеет аддитивное продолжение с класса V_1 на класс Λ_1. Единственность такого продолжения следует из условия аддитивности, согласно которому формула (3.6) справедлива для любого множества $A = \Pi \backslash \Pi_1$.

Шаг 2. Заданная на классе множеств Λ_1 аддитивная функция λ имеет единственное аддитивное продолжение на класс $V_2 = \{\Pi_1 \bigcup \Pi_2, \ \Pi_1, \Pi_2 \in V_1\}$. В силу аддитивности

$$\lambda(\Pi_1 \bigcup \Pi_2) = \lambda(\Pi_1 \bigcap \Pi_2) + \lambda(\Pi_1 \backslash \Pi_2) + \lambda(\Pi_2 \backslash \Pi_1),$$

где $\Pi_1 \backslash \Pi_2, \Pi_2 \backslash \Pi_1 \in \Lambda_1$ и $\Pi_1 \backslash \Pi_2 \in V_1$. Это доказывает единственность продолжения на класс V_2.

Пусть $A = Q_1 \bigcup Q_2 = Q_3 \bigcup Q_4$. Покажем, что

$$\lambda(\Pi_1) + \lambda(\Pi_2 \backslash \Pi_1) = \lambda(Q_3) + \lambda(\Pi_4 \backslash \Pi_3). \tag{3.8}$$

Как и в предыдущем пункте, согласно лемме 3.4, существует такая последовательность $\{\Pi_k\}$ попарно непересекающихся симплектических брусов из класса $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$, что знакопостоянный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k)$ сходится, а брусы Q_i, $i = 1,2,3,4$ представимы как объединения некоторой части брусов из множества значений последовательности $\{\Pi_k\}$. При этом каждый брус Π_k либо целиком лежит в брусе Q_i, либо не имеет с брусом Q_i общих точек.

Пусть $\mathbb{N}_i = \{k \in \mathbb{N} :\ \Pi_k \subset Q_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$\mathbb{N}_2 \bigcup (\mathbb{N}_1 \backslash \mathbb{N}_2) = \mathbb{N}_4 \bigcup (\mathbb{N}_3 \backslash \mathbb{N}_4) = \{k \in \mathbb{N} :\ \Pi_k \subset A\} \equiv \mathbb{N}_A.$$

Следовательно, справедливо равенство (3.8).

Предположим, что аддитивная функция множества λ имеет единственное аддитивное продолжение на классы Λ_{n-1}, V_n при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Шаг 3. Покажем, что тогда существует единственное аддитивное продолжение функции λ на класс Λ_n. Пусть $A \in \Lambda_n$ и выполняется равенство $A = Q \backslash B = Q' \backslash B'$, где $Q, Q' \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ и $B, B' \in V_n$.

Согласно лемме 3.4, существует такая последовательность $\{\Pi_k\}$ попарно непересекающихся симплектических брусов из класса $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$, что знакопостоянный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k)$ сходится, а брусы Q, Q' и множества B, B' представимы как объединения некоторой части брусов из множества значений последовательности $\{\Pi_k\}$. При этом про каждый брус Π_k и любое из множеств Q, Q', B, B' можно сказать, что брус Π_k либо целиком лежит в множестве, либо не имеет с множеством общих точек. Далее доказательство формулы $\lambda(Q) - \lambda(B) = \lambda(Q') - \lambda(B')$ приводится также, как в пункте **1**. Следовательно, функция, заданная на классе множеств $\Lambda_n = \{Q \backslash B,\ Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\ B \in V_n\}$ равенством

$$\lambda(Q \backslash B) = \lambda(Q) - \lambda(Q \bigcap B), \tag{3.9}$$

определена на элементах класса Λ_n корректно в том смысле, что значение $\lambda(A)$ не зависит от представления множества $A \in \Lambda_n$ в виде $Q \backslash B,\ Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\ B \in V_n$. Такая функция является аддитивным продолжением функции λ с класса V_n на класс Λ_n, единственность которого следует из условия аддитивности и равенства (3.9).

Шаг 4. Покажем, что тогда существует единственное аддитивное продолжение функции λ на класс V_{n+1}. Пусть $A \in V_{n+1}$ и выполняется равенство $A = Q \bigcup B = Q' \bigcup B'$, где $Q, Q' \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ и $B, B' \in V_n$. Тогда если λ – аддитивное продолжение класса Λ_n на класс V_{n+1}, то

$$\lambda(A) = \lambda(B) + \lambda(Q \backslash B), \tag{3.10}$$

где $Q \backslash B \in \Lambda_n$. Независимость величины (3.10) от представления множества A от выбора представления в виде $Q \bigcup B,\ Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\ B \in \Lambda_n$, доказывается с помощью леммы 3.4 как и в предыдущем пункте.

В соответствии с принципом математической индукции аддитивная функция множества $\lambda :\ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ имеет единственное аддитивное продолжение на полукольцо Λ. $\square$

Пополнением меры $\lambda :\ \Lambda \to [0, +\infty)$ является полная мера $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} :\ \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$. Кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ определяется по кольцу Λ как совокупность множеств, на которых совпадают значения внешней и внутренней меры, построенных по мере λ.

Пространство $\mathcal{H} = L_2(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \mathbb{C})$ строится по мере $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} :\ \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$ стандартным образом как пополнение пространства классов эквивалентности простых функций по евклидовой норме.

Построенная выше мера $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ определена на пространстве l_2, порождаемом выбором базиса $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ в пространстве E. Меру, задаваемую аналогичным образом на прямом произведении счетной совокупности двумерных измеримых множеств, можно определить также и на банаховых пространствах l_p, $p \in [1, +\infty]$, и на топологическом векторном пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вещественнозначных числовых последовательностей с топологией поточечной сходимости.

4. Гамильтонова структура квантовой динамики

Пусть H – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, E – вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Пусть ω – однородная симплектическая форма на пространстве E и $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ – соответствующий симплектический базис и $\mathbf{J}$ – оператор, ассоциированный с формой ω (см. (2.1)).

Биективное отображение $\mathbf{R}: \ H \to E$ называется овеществлением комплексного пространства H, если (см. [11]) в пространстве H существует такой ортонормированный базис $\mathcal{H} = \{\psi_k\}$, что отображение задается равенством $\mathbf{R}(u) = q + p$ для любого вектора $u \in H$, где $q = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e_j \mathrm{Re}(\psi_j, u) \in Q$ и $p = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \mathrm{Im}(\psi_j, u) \in P$.

Отображение $\mathbf{C} = (\mathbf{R})^{-1}: \ E \to H$ называется комплексификацией вещественного пространства E.

Легко проверить, что отображение $\mathbf{R}$ обладает следующими свойствами относительно линейных операций в унитарном пространстве H:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}(ax) =& a\mathbf{R}(x) \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ x \in H;\\
\mathbf{R}(ix) =& \mathbf{J}\mathbf{R}(x) \quad \forall\, x \in H;\\
\mathbf{R}(x+y) =& \mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(y) \quad \forall\, x, y \in H.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Тогда в силу биективности оператора $\mathbf{R}$ и условия $\mathbf{CR}x = x, \ x \in H$ получим, что

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}(az) =& a\mathbf{C}z \quad \forall\, a \in R,\ z \in E;\\
\mathbf{C}(\mathbf{J}z) =& i\mathbf{C}(z) \quad \forall\, z \in E;\\
\mathbf{C}(z_1+z_2) =& \mathbf{C}(z_1) + \mathbf{C}(z_2) \quad \forall\, z_1, z_2 \in E.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Линейный оператор $\mathbf{U}$ в унитарном пространстве H индуцирует посредством отображения $\mathbf{R}$ оператор $\mathbf{U}_R$ в вещественном пространстве E по следующему правилу:

$$
\mathbf{U}_R(z) = \mathbf{U}_R(q,p) = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}(z), \qquad z \in E.
$$

Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $z \in E$ выполняется равенство $\mathbf{U}_R(\alpha z) = \alpha \mathbf{U}_R(z)$, а для любых $z_1, z_2 \in E$ выполняется равенство $\mathbf{U}_R(z_1+z_2) = \mathbf{U}_R(z_1) + \mathbf{U}_R(z_2)$. Из определения овеществления следует, что $(\mathbf{R}u, \mathbf{R}u)_E = (u,u)_H$ для любого $u \in H$. Тогда из биективности отображения $\mathbf{R}$ следует, что $(\mathbf{C}z, \mathbf{C}z)_H = (z,z)_E$ для любого $z \in E$. Если $u_1, u_2 \in H$, то в соответствии с определением овеществления $\mathbf{R}$ найдется ОНБ $\mathcal{H}$ такой, что $\mathbf{R}(u_j) = q_j + p_j$, $j = 1, 2$; следовательно, $(\mathbf{R}u_1, \mathbf{R}u_2)_E = (q_1, q_2)_Q + (p_1, p_2)_P$, в то время как

$$
\begin{aligned}
(u_1, u_2)_H =& (q_1, q_2)_Q + (p_1, p_2)_P + i[(q_1, \mathbf{I}p_2)_Q - (q_2, \mathbf{I}p_1)_Q]\\
=& (\mathbf{R}(u_1), \mathbf{R}(u_2))_E + i(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{J}\mathbf{R}(u_2))_E.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для любых $u_1, u_2 \in H$ выполняется равенство

$$
(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{R}(u_2))_E = (u_1, u_2)_H - i(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{J}\mathbf{R}(u_2))_E = \mathrm{Re}(u_1, u_2)_H. \tag{4.3}
$$

Следовательно, для любых $z_1, z_2 \in E$ выполняется равенство

$$
(z_1, z_2)_E = (\mathbf{C}z_1, \mathbf{C}z_2)_H - i(z_1, \mathbf{J}z_2)_E = \mathrm{Re}(\mathbf{C}z_1, \mathbf{C}z_2)_H. \tag{4.4}
$$

Теорема 4.1 ([11]). *Преобразование $\mathbf{U}: \ H \to H$ является унитарным тогда и только тогда, когда соответствующее линейное преобразование $\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{C}$ пространства E обладает следующими двумя свойствами:*

1) является ортогональным преобразованием пространства E;

2) сохраняет линейную симплектическую форму ω на пространстве E.

Доказательство. Если преобразование $\mathbf{U}$ унитарно, то для любых z_1, $z_2 \in E$ имеем (учитывая (4.3) во втором равенстве, унитарность в третьем и (4.4) в четвертом):

$$(\mathbf{U}_R z_2, \mathbf{U}_R z_1)_E = (\mathbf{RUC}z_2, \mathbf{RUC}z_1)_E = \mathrm{Re}(\mathbf{UC}z_2, \mathbf{UC}z_1)_H = (z_1, z_2)_E.$$

Аналогично, учитывая в первом и в последнем переходе равенство (4.4), получим

$$(\mathbf{U}_R z_2, \mathbf{JU}_R z_1)_E = \mathrm{Im}(\mathbf{CU}_R z_2, \mathbf{CU}_R z_2)_H = \mathrm{Im}(\mathbf{C}z_2, \mathbf{C}z_2)_H = (z_1, \mathbf{J}z_2)_E.$$

Изометрический оператор $\mathbf{U}_R$ является сюрьективным преобразованием пространства E, поскольку он является композицией трех биективных отображений. Значит оператор $\mathbf{U}_R$ ортогональный.

Наоборот, пусть линейное преобразование $\mathbf{V} = \mathbf{RUC}$ вещественного гильбертова пространства E удовлетворяет условиям $(\mathbf{V}z_1, \mathbf{V}z_2)_E = (z_1, z_2)$ при всех $z_1, z_2 \in E$ и $(\mathbf{V}z_1, \mathbf{JV}z_2)_E = (z_1, \mathbf{J}z_2)$ при всех $z_1, z_2 \in E$. Тогда в силу (4.4)

$$(\mathbf{C}z_1, \mathbf{C}z_2)_H = (\mathbf{CV}z_1, \mathbf{CV}z_2)_H = (\mathbf{UC}z_1, \mathbf{UC}z_2)_H$$

при всех $z_1, z_2 \in E$, откуда с учетом биективности отображения $\mathbf{C}$ получаем изометричность оператора $\mathbf{U}$. Ортогональный оператор $\mathbf{V}$ является сюрьективным, следовательно, оператор $\mathbf{U}$ также сюрьективен как композиция биективных операторов. Значит оператор $\mathbf{U}$ унитарен. □

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в вещественном евклидовом пространстве E индуцирует в унитарном пространстве H оператор $\mathbf{A}_C = \mathbf{CAR}$, действующий по правилу $\mathbf{A}_C = \mathbf{CAR}$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathbf{A}$ – линейный оператор в вещественном евклидовом пространстве E. Оператор $\mathbf{A}_C = \mathbf{CAR}$ является линейным оператором в комплексном пространстве H тогда и только тогда, когда $[\mathbf{J}, \mathbf{A}] = 0$.*

Доказательство. Линейность оператора $\mathbf{A}_C$ означает, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $u \in H$ выполняется равенство $\mathbf{A}_C(\alpha u) = \alpha \mathbf{A}_C(u)$, а для любых $u_1, u_2 \in H$ выполняется равенство $\mathbf{A}_C(u_1 + u_2) = \mathbf{A}_C(u_1) + \mathbf{A}_C(u_2)$.

Для любого $u \in H$ выполняется равенство $\mathbf{A}_C(iu) = \mathbf{CAR}(iu) = \mathbf{CAJR}(u)$. Поэтому условие линейности оператора $\mathbf{A}_C$ в пространстве H равносильно условию $\mathbf{A}_C(iu) = i\mathbf{A}_C u$, для выполнения которого необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mathbf{CAJR}(u) = i\mathbf{CAR}(u) = \mathbf{CJAR}(u) \qquad \forall\, u \in H.$$

В силу биективости отображений $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ последнее означает, что $\mathbf{JA} = \mathbf{AJ}$.

Наоборот, если $\mathbf{U}$ – линейный оператор в унитарном пространстве H, то оператор $\mathbf{U}_R = \mathbf{RUC}$ является линейным оператором в пространстве E. Действительно, в силу (4.1) и (4.2) выполнены равенства

$$\mathbf{RUCJ}z = \mathbf{RU}i\mathbf{C}z = \mathbf{R}i\mathbf{UC}z = \mathbf{JRUC}z.$$

□

Теорема 4.2 ([11]). *Отображение $\mathbf{U} \to \mathbf{U}_R$ осуществляет изоморфизм алгебры ограниченных линейных операторов $B(H)$, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, на подалгебру $\mathbf{J}$-коммутирующих ограниченных линейных операторов $B_{\mathbf{J}}(E)$ алгебры ограниченных линейных операторов $B(E)$, действующих в вещественном гильбертовом пространстве E.*

Группа линейных операторов $\mathbf{U}$ является изометрической (ортогональной) группой в пространстве E тогда и только тогда, когда ее генератор $\mathbf{L}$ является кососимметрическим в пространстве E, т.е. $\mathbf{L}^* + \mathbf{L} = 0$. Если $\mathbf{L} = \mathbf{JA}$, то это означает, что $\mathbf{A}^*\mathbf{J}^* + \mathbf{JA} = 0$ или

$$\mathbf{A}^*\mathbf{J} = \mathbf{JA}. \tag{4.5}$$

Если выполняется условие $[\mathbf{J},\mathbf{A}]=0$, то условие (4.5) равносильно условию $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$.

Группа линейных операторов $\mathbf{U}$ в пространстве E является группой, сохраняющей симплектическую форму $\mathbf{J}$, тогда и только тогда, когда ее генератор $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $\mathbf{L}^*\mathbf{J}+\mathbf{J}\mathbf{L}=0$. Если $\mathbf{L}=\mathbf{J}\mathbf{A}$, то с учетом равенств $\mathbf{J}^*\mathbf{J}=\mathbf{I},\ \mathbf{J}^*=-\mathbf{J}$ получаем, что $\mathbf{U}$ есть группа линейных симплектоморфизмов, если и только если

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}. \tag{4.6}$$

Таким образом, система линейных дифференциальных уравнений $\frac{d}{dt}z=\mathbf{L}z,\ z:\ \mathbb{R}\to E$ в пространстве E является гамильтоновой на фазовом пространстве $(E,\mathbf{J})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}^*\mathbf{J}+\mathbf{J}\mathbf{L}=0$. Система линейных уравнений является консервативной тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}^*=-\mathbf{L}$. Система линейных уравнений в пространстве E соответствует овеществлению линейного уравнения Шредингера, если она консервативна и гамильтонова.

Заметим, что на фазовом пространстве E могут быть заданы и другие симплектические формы – замкнутые невырожденные дифференциальные 2-формы на пространстве E. Выбор симплектической формы $\omega_{\mathbf{J}}$ определяет то ортогональное преобразование вещественного пространства E, которое соответствует линейному оператору умножения на мнимую единицу в унитарном пространстве H. Построенная нами симплектическая мера зависит от выбора симплектической формы $\mathbf{J}$. Мера будет инвариантна относительно $\mathbf{J}$-инвариантных гамильтоновых потоков $e^{it\mathbf{A}}$, для которых оператор $\mathbf{A}$ в некотором каноническом базисе формы $\omega_{\mathbf{J}}$ состоит из двумерных блоков. Примером такой гамильтоновой системы может служить счетная система гиперболических осцилляторов.

5. Инвариантность симплектической меры относительно гамильтоновых потоков

Пусть $h:E\to R$ – невырожденная квадратичная функция Гамильтона на евклидовом пространстве E. Симметричная квадратичная функция на E, порожденная квадратичной формой h, обладает каноническим базисом $\mathcal{G}$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Предположим также, что базис $\mathcal{G}$ является каноническим базисом для симплектической формы $\mathbf{J}$ на пространстве E. В базисе $\mathcal{G}$ форма $\mathbf{J}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{J}(g_{2k-1},g_{2k})=-\mathbf{J}(g_{2k},g_{2k-1})=1$ и $\mathbf{J}(g_l,g_m)=0$ в остальных случаях. Определим ортонормированные системы $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ в подпространствах P,Q таким образом, что $\mathcal{G}=\mathcal{E}\bigcup\mathcal{F}$ и $g_{2k-1}=e_k,\ g_{2k}=f_k,\ k\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим счетную систему невзаимодействующих осцилляторов.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{G}$ – канонический базис, в котором симплектическая форма ω имеет канонический вид (2.1). Пусть квадратичная функция h имеет в базисе $\mathcal{G}$ диагональный вид*

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(p_k^2+q_k^2),\qquad D(h)=E_1=\left\{(q,p)\in E:\ \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|(p_k^2+q_k^2)<+\infty\right\}, \tag{5.1}$$

где $\{\lambda_k\}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Тогда гамильтоново векторное поле $\mathbf{v}=\mathbf{J}\nabla h$ определено на пространстве

$$E_2=\left\{(q,p)\in E:\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(q_k^2+p_k^2)<+\infty\right\}$$

и задает на пространстве E_2 гладкий гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t\in\mathbb{R}$, допускающий единственное продолжение по непрерывности до гамильтонова потока на пространстве E. При этом симплектическая мера $\lambda_{\mathcal{G}}$ инвариантна относительно гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t\in\mathbb{R}$, на пространстве E.

Доказательство. Динамика гамильтоновой системы (5.1) описывается счетной системой ОДУ
$$q_k' = h_{p_k}' = \omega_k p_k; \quad p_k' = -h_{q_k}' = -\omega_k q_k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Система уравнений Гамильтона (5.2) обладает первым интегралом $h(u) = (u, \mathbf{H}u)$, $u \in E_1 = D(\mathbf{H})$, где $\mathbf{H}$ – самосопряженный оператор в вещественном пространстве E, каждому собственному значению λ_k которого отвечает двумерное собственное подпространство $\mathrm{span}(e_k, f_k)$. В каждом из собственных подпространств $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$ определен двумерный гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_{t,k}$, $t \in \mathbb{R}$ ортогональных преобразований пространств E_k, порождаемых двумерным квадратичным гамильтонианом $h_k = \lambda_k(q_k^2 + p_k^2)$. Поэтому определена однопараметрическая группа $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, ортогональных преобразований пространства E такая, что подпространства E_k приводят операторы группы $\mathbf{\Phi}_t$.

Так как $[\mathbf{H}, \mathbf{J}] = 0$, то первым интегралом системы уравнений Гамильтона является и квадратичная функция $h^{(2)}(u) = (u, \mathbf{H}^2 u)$, $u \in E_2 = D(\mathbf{H}^2)$. Поэтому подпространства E_1, E_2 инвариантны относительно операторов гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, сужение $(\mathbf{\Phi}_t)|_{E_2}$, $t \in \mathbb{R}$, является гладким гамильтоновым потоком в пространстве E_2, на котором определено векторное поле $\mathbf{v}$. При этом поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, представляет собой единственное продолжение по непрерывности гладкого гамильтонова потока в пространстве E_2.

Если множество $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, то $\mathbf{\Phi}_t(A) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ и $\lambda_{\mathcal{G}}(\mathbf{\Phi}_t(A)) = \lambda_{\mathcal{G}}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь и далее $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$). Следовательно, кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ инвариантно относительно потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$ и выполняется равенство $\lambda_{\mathcal{G}} \circ \mathbf{\Phi}_t = \lambda_{\mathcal{G}},\ t \in \mathbb{R}$. □

Поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, задаваемый квадратичным гамильтонианом из леммы 5.1, определяет однопараметрическую группу
$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)), \quad x \in E, \quad u \in S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C}), \quad t \in \mathbb{R},$$
линейных изометрий пространства простых функций $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ на себя. Заданная на плотном в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ линейном подпространстве $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ группа изометрий $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t}$, $t \in \mathbb{R}$, единственным образом продолжается по непрерывности до унитарной группы в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$, действующей по правилу
$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \quad x \in E, \tag{5.3}$$
и называемой купмановским представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$.

Рассмотрим уравнение Шредингера с гамильтонианом $\mathbf{H}$ с простым дискретным спектром $\{\omega_k\}$, лежащим на положительной полуоси. Порождаемая в унитарном пространстве H унитарная группа $\exp(-it\mathbf{H})$, $t \in \mathbb{R}$, может быть представлена как гамильтонов поток гамильтоновой системы с квадратичной функцией Гамильтона (5.1) в овеществлении E гильбертова пространства H, наделенном симплектической структурой $\mathbf{J}$. При этом $q_k = \mathrm{Re}(u, \phi_k)$, $p_k = \mathrm{Im}(u, \phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где u – искомая функция в уравнении Шредингера, $\{\phi_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов гамильтониана $\mathbf{H}$, а функция гамильтона задается равенством
$$h(q,p) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k(q_k^2 + p_k^2) = (u, \mathbf{H}u)_H, \qquad (q,p) \in E,$$
где $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (q_k + ip_k)\phi_k$.

Унитарная группа $e^{-it\mathbf{H}}$, $t \in \mathbb{R}$, представляется обобщенным гамильтоновым потоком в фазовом пространстве $Q \oplus P$, задаваемом гамильтоновой системой уравнений (5.2). Фазовый поток, порожденный в пространстве E гамильтонианом h, сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, также как и ротационно инвариантную меру из работы [7] и обобщенную меру Смолянова-Шамарова [10].

Следствие 5.1. *Однопараметрическое семейство* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *линейных операторов в пространстве* $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *действующих по правилу*

$$\mathbf{U}_{\Phi}(t)u(x) = u(\mathbf{\Phi}(t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \quad x \in E, \tag{5.4}$$

является группой унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Группа (5.4) называется купмановским представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$.

Рассмотрим систему гиперболических осцилляторов и явление blow-up.

Явление градиентного взрыва решения эволюционного нелинейного уравнения с частными производными состоит в существовании решения эволюционного уравнения на ограниченном временном промежутке, градиент которого неограничен в норме банахова пространства значений решения. Градиентный взрыв наблюдается при изучении решений уравнений газодинамики (уравнений Хопфа), при изучении явления самофокусировки для решений нелинейного уравнения Шредингера [2], [3], [6].

Мы приводим пример системы гиперболических осцилляторов как линейной гамильтоновой системы, решения которой допускают неограниченный рост за конечное время.

Счетная система гиперболических осцилляторов задается функцией Гамильтона на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве $E = Q \oplus P$

$$h = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k (p_k^2 - q_k^2), \qquad (q,p) \in E_1 = \{(q,p) \in E: \ \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|(p_k^2 + q_k^2) < +\infty\}, \tag{5.5}$$

$\{\omega_k\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а ее динамика описывается бесконечной системой ОДУ

$$q_k' = h'_{p_k} = \omega_k p_k, \quad p_k' = -h'_{q_k} = \omega_k q_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Гамильтоново векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h$ определено на плотном в пространстве E подпространстве

$$E_2 = \left\{ (q,p) \in E: \ \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|^2 (p_k^2 + q_k^2) < +\infty \right\}.$$

Гамильтонову систему гиперболических осцилляторов на фазовом пространстве $(E, \omega_{\mathbf{J}})$ можно рассмотреть в терминах квантовой системы на комплексификации H пространства E, описываемой волновой функцией $u = q + ip$. При таком подходе функционал энергии выражается через волновую функцию равенством

$$\begin{aligned} h(q,p) =& -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} [(\mathbf{\Delta} u_k + \mathbf{\Delta}\bar{u}_k)(u_k + \bar{u}_k) + (\mathbf{\Delta} u_k - \mathbf{\Delta}\bar{u}_k)(u_k - \bar{u}_k)] \\ =& \frac{1}{4}[(\sqrt{\mathbf{\Delta}}(u - \bar{u}), \sqrt{\mathbf{\Delta}}(u - \bar{u}))_H - (\sqrt{\mathbf{\Delta}}(u + \bar{u}), \sqrt{\mathbf{\Delta}}(u + \bar{u}))_H] \\ =& -\operatorname{Re}(\sqrt{\mathbf{\Delta}}u, \sqrt{\mathbf{\Delta}}\bar{u})_H. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{\Delta}$ – самосопряженный оператор в пространстве H с простым дискретным неотрицательным спектром $\sigma(\mathbf{\Delta}) = \{\omega_{\mathbf{k}}\}$, а $\sqrt{\mathbf{\Delta}}$ – неотрицательный квадратный корень из оператора $\mathbf{\Delta}$.

Пусть $\{\psi_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{\Delta}$. Произвольный вектор $u \in H$ допускает разложение

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (q_k + ip_k)\psi_k = q + ip.$$

Тогда уравнения Гамильтона (5.6) обретают вид уравнения

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{\Delta}\bar{u}(t), \quad t \in R,$$

которое является гамильтоновым, но не является уравнением Шредингера поскольку, во-первых, не линейно над полем комплексных чисел, и, во-вторых, не консервативно.

Лемма 5.2. *Уравнения Гамильтона (5.6) определяют гладкий гамильтонов поток на пространстве E_2 тогда и только тогда, когда последовательность $\{\omega_k\}$ является ограниченной. Если гладкий гамильтонов поток определен на пространстве E_2, то он допускает единственное продолжение по непрерывности до обобщенного гамильтонова потока в пространстве E.*

Доказательство. Пусть $(q_0, p_0) = \{(q_{0k}, p_{0k})\} \in l_2$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ k-я пара уравнений гамильтоновой системы (5.6) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $(q_k(0), p_k(0)) = (q_{0k}, p_{0k})$

$$q_k(t) = q_{0k}\operatorname{ch}(\omega_k t) + p_{0k}\operatorname{sh}(\omega_k t), \quad p_k(t) = p_{0k}\operatorname{ch}(\omega_k t) + q_{0k}\operatorname{sh}(\omega_k t); \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Тогда если последовательность $\{\omega_k\}$ является ограниченной постоянной $M > 0$ ($|\omega_k| \leqslant M$ при всех $k \in \mathbb{N}$), то неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p_k^2(t) + q_k^2(t)) \leqslant e^{2Mt}\sum_{k=1}^{\infty}(p_{0k}^2 + q_{0k}^2)$$

выполняется для каждого $t \in \mathbb{R}$. Поэтому при условии ограниченности последовательности $\{\omega_k\}$ система уравнений Гамильтона (5.6) определяет однопараметрическую группу преобразований пространства E, задаваемую равенствами (5.7). При этом если $(q_0, p_0) \in E_2$, то $(q(t), p(t)) \in E_2$, причем справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(p_k^2(t) + q_k^2(t)) \leqslant e^{2Mt}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(p_{0k}^2 + q_{0k}^2).$$

Значит, равенства (5.7) определяют гладкий гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, в пространстве E_2. Гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t : \ (q_0, p_0) \to (q(t), p(t))$, $t \in \mathbb{R}$, определен на пространстве E_2, сохраняет функционал энергии H и симплектическую форму $\omega_{\mathbf{J}}$. При этом если последовательность начальных данных со значениями в пространстве E_2 фундаментальна в пространстве E, то последовательность значений, соответствующих начальным данным решений в каждый момент времени, является фундаментальной в пространстве E, что обеспечивает единственность продолжения гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$ с подпространства гладких начальных данных на все пространство E.

Наоборот, если последовательность $\{\omega_k\}$ не ограничена, то для любого момента времени $t > 0$ в фазовом пространстве E существуют:

такая точка $(q_0, p_0) \in E$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(p_k(t)^2 + q_k(t)^2)$, где $(q_k(t), p_k(t))$ определены равенством (5.7), расходится;

такая точка $(q_0, p_0) \in E_2$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(p_k(t)^2 + q_k(t)^2)$, где $(q_k(t), p_k(t))$ определены равенством (5.7), расходится.

В то же время, если $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, – гладкий поток в пространстве E_2, то для любого $(q_0, p_0) \in E$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$(e_k, \mathbf{\Phi}_t(q_0, p_0))_E = q_k(t), \qquad (f_k, \mathbf{\Phi}_t(q_0, p_0))_E = p_k(t),$$

где $(q_k(t), p_k(t))$ – решение k-й пары уравнений гамильтоновой системы (5.6), удовлетворяющее условию $(q_k(0), p_k(0)) = (q_{0k}, p_{0k})$. Следовательно, если последовательность $\{\omega_k\}$ не ограничена, то гладкий фазовый поток $\mathbf{\Phi}$ не определен на пространстве E_2. Для каждой точки $(q_0, p_0) \in E_2$ существует интервал Δ_2 существования классического решения системы уравнений Гамильтона (5.6), а для точки $(q_0, p_0) \in E$ – интервал Δ существования обобщенного решения системы уравнений Гамильтона (5.6). □

Следствие 5.2. *Если последовательность $\{\omega_k\}$ ограничена, то фазовый поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, линейных преобразований, порождаемых гамильнонианом (5.5) в симплектическом фазовом пространстве E с естественной симплектической формой $\mathbf{J}$, сохраняет симплектическую меру $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.*

Действительно, фазовое пространство E факторизуется на счетное множество инвариантных двумерных подпространств, а в каждом двумерном подпространстве фазовый поток сохраняет двумерную меру Лебега. Преобразование $\mathbf{\Phi}_t$ потока отображает семейство измеримых симплектических брусов $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ на себя и сохраняет значение меры $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Следовательно, кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ и мера $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ инвариантны относительно потока $\mathbf{\Phi}$.

Если начальное состояние счетной системы гиперболических осцилляторов задается вектором $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = (\{q_{0k}\}, \{p_{0k}\})$ таким, что кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p_{0k}^2$$

и полная энергия

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (p_{0k}^2 - q_{0k}^2)$$

конечны, то полная энергия является первым интегралом гамильтоновой системы уравнений (5.6), а кинетическая энергия может изменяться и может обращаться в бесконечность на ограниченном временном промежутке.

Таким образом, в отличие от случая гиперболического осциллятора с ограниченным множеством частот и в отличие от случая гармонического осциллятора плотно определенное на пространстве E гамильтоново векторное поле не позволяет определить группу гамильтоновых преобразований пространства E и пространства E_2.

Наблюдаемый неограниченный рост кинетической энергии гамильтоновой системы за конечное время представляет собой явление градиентного взрыва (см. [2], [3], [6]). Фазовые траектории гамильтоновой системы (5.6) покидают фазовое пространство за конечное время. Для рассматриваемой модельной гамильтоновой системы найдено естественное симплектическое расширение в локально выпуклое пространство последовательностей. Возникает предположение, что описать поведение гамильтоновых систем, допускающих явление градиентного взрыва, возможно с помощью определения подходящего расширения фазового пространства.

6. Расширение фазового пространства для определения гамильтонова потока

Если L – локально выпуклое пространство, в которое непрерывно и плотно вложено гильбертово пространство E, то можно поставить вопрос о продолжении гамильтонова потока с пространства E_1 на ЛВ пространство L.

Пусть $E = Q \oplus P$, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – ОНБ в гильбертовом пространстве E, в котором симплектическая форма ω_J имеет канонический вид:

$$\omega_J((\hat{q}, \hat{p}), (\tilde{q}, \tilde{p})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{q}_k \tilde{p}_k - \tilde{q}_k \hat{p}_k).$$

Согласно лемме 5.2, если набор частот $\{\omega_k\}$ является ограниченным, то гамильтонов поток в пространстве E определен при всех значениях параметра времени. В противном случае фазовые траектории покидают пространство E на любом временном интервале. Возникает задача выбора пространства для продолжения фазовых траекторий. Так как в случае неограниченного набора частот $\{\omega_k\}$ решения (5.7) системы уравнений Гамильтона (5.6) могут оказаться неограниченными в каждый момент времени $t > 0$ (для каждого

$t > 0$ найдется такое $z_0 \in E$ (здесь и далее $z = (q,p)$), что $\|\mathbf{\Phi}_t(z_0)\|_E = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |z_k(t)|^2 = +\infty$), то поставим задачу о продолжении траекторий бесконечномерной гамильтоновой системы в локально выпуклое пространство числовых последовательностей.

В качестве ЛВП L рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей, наделенное метризуемой топологией поточечной (покоординатной) сходимости. Тогда вложение гильбертова пространства E в ЛВП L непрерывно и плотно.

Пусть $L_{\mathbf{J}}$ есть подмножество таких элементов $z = (q,p) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в линейном пространстве L, что для любых $\hat{z}, \tilde{z} \in L_{\mathbf{J}}$ выполняется условие $\{(\hat{q}_k\tilde{p}_k - \hat{p}_k\tilde{q}_k)\} \in l_1$. Легко проверить, что $L_{\mathbf{J}}J$ является линейным подпространством в пространстве L. Индуцированная из L топология на $L_{\mathbf{J}}$ превращает $L_{\mathbf{J}}$ в локально выпуклое пространство.

Определим на пространстве $L_{\mathbf{J}}$ билинейную форму $\omega_{\mathbf{J}}$ с помощью равенства

$$\omega_{\mathbf{J}}(\hat{z}, \tilde{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{q}_k\tilde{p}_k - \hat{p}_k\tilde{q}_k), \quad \hat{z},\ \tilde{z} \in L_{\mathbf{J}}.$$

Тогда форма $\omega_{\mathbf{J}}$ является невырожденной кососимметрической билинейной формой на пространстве $L_{\mathbf{J}}$, сужение которой на пространство E совпадает с исходной симплектической формой $\omega_{\mathbf{J}}$.

Симплектической структурой на ЛВП $L_{\mathbf{J}}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $\omega_{\mathbf{J}}$, определенная на пространстве $L_{\mathbf{J}}$. Симплектическое пространство $(L_{\mathbf{J}}, \omega_{\mathbf{J}})$ является симплектическим расширением пространства $(E, \omega_{\mathbf{J}})$.

Симплектическая мера $\lambda_{\mathcal{G}}$ на пространстве E допускает единственное продолжение до симплектической меры на пространстве $L_{\mathbf{J}}$. Последняя однозначно восстанавливается по своему сужению на класс $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}(L_{\mathbf{J}})$ абсолютно измеримых симплектических брусов, как было показано в разделе 3.

Теорема 6.1. *Пусть $\mathcal{G}$ – ОНБ гильбертова пространства E, в котором симплектическая форма ω имеет канонический вид (2.1). Пусть квадратичная функция h представима в виде $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$, где h_k – симметричная квадратичная форма на двумерном подпространстве $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$. Пусть $L = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и пусть $(L_{\mathbf{J}}, \omega_{\mathbf{J}})$ – симплектическое расширение симплектического пространства $(E, \omega_{\mathbf{J}})$.*

Тогда гамильтоново векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h\ :\ E_0 \to L$ плотно определено на подпространстве E_0 пространства E, координаты векторов которого относительно базиса $\mathcal{G}$ являются финитными последовательностями. Векторное поле $\mathbf{v}$ задает в пространстве E_0 гладкий гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, допускающий единственное продолжение по непрерывности до гамильтонова потока на пространстве $L_{\mathbf{J}}$. При этом симплектическая мера $\lambda_{\mathcal{G}}$ инвариантна относительно гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, на пространстве $L_{\mathbf{J}}$.

Доказательство. Гамильтониан h определен на подпространстве E_0 пространства E. Пространство E_0 плотно как в гильбертовом пространстве E, так и в ЛВП L. Векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h :\ E_0 \to E$ плотно определено. Система уравнений Гамильтона имеет вид

$$\frac{d}{dt}p_k = -\frac{\partial}{\partial q_k}h_k(p_k, q_k), \quad \frac{d}{dt}q_k = \frac{\partial}{\partial p_k}h_k(p_k, q_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

При каждом $k \in \mathbb{N}$ k-е уравнение системы (6.1) имеет единственное глобальное решение $(q_k(t), p_k(t))$, $t \in \mathbb{R}$, а семейство преобразований $\mathbf{\Phi}_t^{(k)} :\ (q_{0,k}, p_{0,k}) \to (q_k(t), p_k(t)),\ t \in \mathbb{R}$ является гладким гамильтоновым потоком в двумерном симплектическом подпространстве $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$. Следовательно, однопараметрическое семейство $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, преобразований пространства L на себя, задаваемое равенством

$$\mathbf{P}_{E_k}(\mathbf{\Phi}_t(z)) = \mathbf{\Phi}_t^{(k)}(\mathbf{P}_{E_k}z), \quad z \in L, \quad t \in \mathbb{R}$$

(где $\mathbf{P}_{E_k}: \ L \to \mathbb{R}^2$ – оператор проектирования), является группой преобразований пространства L на себя. При этом подпространства E_0 и E_k, $k \in \mathbb{N}$, инвариантны относительно операторов группы $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Для каждого $z_0 \in E_0$ вектор-функция $z(t) = \mathbf{\Phi}(t)z_0$, $t \in \mathbb{R}$, является классическим решением Гамильтоновой системы (6.1). Таким образом, группа $\mathbf{\Phi}_t|_{E_0}$, $t \in \mathbb{R}$ является гладким гамильтоновым потоком, порожденным гамильтоновой системой $(L_{\mathbf{J}}, \mathbf{J}, h)$ в подпространстве E_0.

Если последовательность $\{z_{0,j}\}: \ \mathbb{N} \to E_0$ сходится в пространстве $L_{\mathbf{J}}$ к вектору $z_0 \in L_{\mathbf{J}}$, то последовательность $\{\mathbf{P}_{E_k} z_{0,j}\}$ сходится в пространстве $\mathbb{R}^2$ к вектору $\mathbf{P}_k z_0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому при каждом $T > 0$ последовательность $\{\mathbf{\Phi}_t^{(k)} \mathbf{P}_{E_k} z_{0,j}\}$ сходится равномерно на отрезке $[-T, T]$ к вектор-функции $\mathbf{\Phi}_t^{(k)} \mathbf{P}_{E_k} z_0$. Таким образом, гладкий поток $\mathbf{\Phi}_t|_{E_0}$, $t \in \mathbb{R}$ допускает единственное продолжение по непрерывности до обобщенного гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$ в пространстве $L_{\mathbf{J}}$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ сужение $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Phi}|_{E_k}$ представляет собой гамильтонов поток в двумерном фазовом пространстве E_k, сохраняющий меру Лебега в пространстве E_k. Следовательно, гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}$ сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ на пространстве E. □

Следствие 6.1. *Однопараметрическое семейство* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *линейных операторов в пространстве* $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *действующих по правилу*

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)u(x) = u(\mathbf{\Phi}(t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \quad x \in E, \tag{6.2}$$

является купмановским представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$ *однопараметрической группой унитарных преобразований пространства* $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Также, как и теорема 6.1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathcal{G}$ *– ОНБ гильбертова пространства* E, *в котором симплектическая форма* ω *имеет канонический вид (2.1). Пусть функция* h *представима в виде* $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$, h_k *– непрерывно дифференцируемая на двумерном подпространстве* $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$ *ограниченная функция. Пусть выполняется условие* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_{C_b(\mathbb{R}^2)} < \infty$. *Пусть* $L = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и пусть* $(L_{\mathbf{J}}, \omega_{\mathbf{J}})$ *– симплектическое расширение симплектического пространства* $(E, \omega_{\mathbf{J}})$.

Тогда гамильтоново векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h \ : \ E_0 \to L$ *плотно определено на подпространстве* E_0 *пространства* E, *координаты векторов которого относительно базиса* $\mathcal{G}$ *являются финитными последовательностями. Векторное поле* $\mathbf{v}$ *задает в пространстве* E_0 *гладкий гамильтонов поток* $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, *допускающий единственное продолжение по непрерывности до гамильтонова потока на пространстве* $L_{\mathbf{J}}$. *При этом симплектическая мера* $\lambda_{\mathcal{G}}$ *инвариантна относительно гамильтонова потока* $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, *на пространстве* $L_{\mathbf{J}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.М. Бусовиков. *Свойства одной конечно-аддитивной меры на l_p, инвариантной относительно сдвигов* // Труды МФТИ. **10**:2, 163–172 (2018).
2. С.Н. Власов, В.И. Таланов. *Распределенный волновой коллапс в модели нелинейного уравнения Шредингера.* В сб. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука. 1989.
3. Л.С. Ефремова, В.Ж. Сакбаев. *Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп* // Теор. матем. физ. **185**:2, 252–271 (2015).
4. Д.В. Завадский. *Аналоги меры Лебега в пространствах последовательностей и классы интегрируемых по ним функций* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **151**, 37–44 (2018).

5. В.В. Козлов, О.Г. Смолянов. *Гамильтонов подход к вторичному квантованию* // Докл. РАН. **483**:2, 138–142 (2018).
6. С.Н. Кружков. *Лекции по уравнениям с частными производными.* М.: МГУ. 1970.
7. В.Ж. Сакбаев *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига* // Теор. матем. физ. **191**:3, 473–502 (2017).
8. В.Ж. Сакбаев. *Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов* // Дифференциальные уравнения. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **140**, 88–118 (2017).
9. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. *Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы* // Докл. РАН. **488**:3, 243–247 (2019).
10. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. *Квантование по Шредингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона* // Докл. РАН. **492**, 65–69 (2020).
11. А.Ю. Хренников. *Симплектическая геометрия на бесконечномерном фазовом пространстве и асимптотическое представление квантовых средних гауссовыми функциональными интегралами* // Изв. РАН. Сер. Мат. **72**:1, 137–160 (2008).
12. R. Baker. *"Lebesgue measure" on R^∞* // Proceedings of the AMS. **113**:4, 1023–1029 (1991).
13. V.Zh. Sakbaev. *Averaging of Random Flows of Linear and Nonlinear Maps* // J. Phys. Conf. Ser. **990(1)**:012012 (2018).

Владимир Андреевич Глазатов,
Институт информационных технологий, математики и механики,
пр. Гагарина, 23,
603022, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: glaz96@yandex.ru

Всеволод Жанович Сакбаев,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4,
125047, Москва, Россия;
МФТИ (национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9,
141700, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия;
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия.
E-mail: fumi2003@mail.ru