

УДК 517.518

О ВЫРОЖДЕННОСТИ ОРБИТ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

А.В. ЛОБОДА, В.К. КАВЕРИНА

Аннотация. В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в статье обсуждаются 7-мерные орбиты в \mathbb{C}^4 двух семейств нильпотентных 7-мерных алгебр Ли. Подобно нильпотентным 5-мерным алгебрам голоморфных векторных полей в \mathbb{C}^3 большая часть из рассмотренных в статье алгебр не имеет невырожденных по Леви орбит. В частности, отсутствие таких орбит доказано для семейства разложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли (31 алгебра).

В то же время в семействе из 12 неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли, каждая из которых содержит не менее трех абелевых 4-мерных идеалов, четыре алгебры имеют невырожденные орбиты. У двух алгебр эти гиперповерхности голоморфно эквивалентны квадрикам, а несферические невырожденные орбиты еще двух алгебр представляют собой два голоморфно неэквивалентных обобщения (на случай 4-мерного комплексного пространства) известной поверхности Винкельманна из пространства \mathbb{C}^3 . Все орбиты алгебр из второго семейства допускают трубчатые реализации.

Ключевые слова: однородное многообразие, голоморфная функция, векторное поле, алгебра Ли, абелев идеал.

Mathematics Subject Classification: 32M12, 32A10, 17B66, 14N10, 13A15

1. ВВЕДЕНИЕ

В задаче описания (локально) голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств к настоящему времени полностью изучены двумерный [1] и трехмерный случаи [2]. Так, опираясь на классификацию 3-мерных вещественных алгебр Ли, Э. Картан показал, что в \mathbb{C}^2 все однородные гиперповерхности являются орбитами именно таких алгебр Ли; аналогичная идея использования классификации 5-мерных алгебр Ли позволила завершить описание локально однородных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств.

При этом важным шагом в случае 3-мерных комплексных пространств оказалось утверждение о вырожденности по Леви орбит большинства 5-мерных нильпотентных алгебр Ли: только у двух таких алгебр орбитами являются невырожденные квадрики

$$\operatorname{Im} z_3 = |z_1|^2 \pm |z_2|^2, \quad (1.1)$$

тогда как остальные нильпотентные алгебры не могут иметь в \mathbb{C}^3 невырожденных 5-мерных орбит [3]. В частности, это утверждение верно для трех разложимых нильпотентных алгебр Ли размерности 5.

В связи с этим представлялось естественным предположение о вырожденности по Леви несферических (не сводимых к аналогам квадрик (1.1)) орбит нильпотентных алгебр Ли

A.V. LOBODA, V.K. KAVERINA, ON DEGENERACY OF ORBITS OF NILPOTENT LIE ALGEBRAS.

© ЛОБОДА А.В., КАВЕРИНА В.К. 2022.

Исследование А.В. Лободы выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00497.

Поступила 2 марта 2021 г.

в пространствах произвольных размерностей. Однако в [4] были изучены однопараметрические семейства 7-мерных нильпотентных алгебр Ли и обнаружены их несферические Леви-невырожденные орбиты в \mathbb{C}^4 .

В настоящей статье обсуждаются 7-мерные орбиты в \mathbb{C}^4 нильпотентных 7-мерных алгебр Ли из двух достаточно обширных семейств. Первое из них – это семейство разложимых алгебр Ли; второе – семейство неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли, каждая из которых содержит не менее трех абелевых 4-мерных идеалов.

Для первого семейства, содержащего 31 алгебру Ли, доказано (Теорема 2.1), что по аналогии со случаем 3-мерного комплексного пространства, утверждение о Леви-вырожденности 7-мерных орбит всех таких алгебр сохраняет силу. Естественно в связи с этим выдвинуть гипотезу о Леви-вырожденности всех вещественных гиперповерхностей в пространствах \mathbb{C}^n (произвольной размерности), являющихся орбитами разложимых нильпотентных $(2n - 1)$ -мерных алгебр Ли.

При этом второе рассмотренное в статье семейство из 12 алгебр допускает невырожденные по Леви орбиты (Теорема 6.2). Здесь 8 алгебр подчиняются «общей» тенденции, связанной с вырождениями орбит многих нильпотентных алгебр Ли (см. также [5] и [6]). Вместе с тем, орбиты двух (из 12) алгебр голоморфно эквивалентны квадратам

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2. \quad (1.2)$$

При этом индефинитная сферическая поверхность (отвечающая знаку «минус» перед слагаемым $|z_3|^2$ в уравнении (1.2)) оказывается орбитой двух *разных* 7-мерных алгебр Ли, являющихся подалгебрами полной 24-мерной алгебры симметрий этой поверхности. Такой эффект отмечался в работах [7], [4], [2] как вполне естественный для многообразий с богатыми алгебрами симметрий, в частности, для сферических гиперповерхностей.

А несферическими интегральными гиперповерхностями еще двух алгебр из 12 являются (с точностью до голоморфной эквивалентности) поверхности, описываемые уравнениями

$$\operatorname{Im} z_4 = z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_3|^2 \pm |z_1|^4. \quad (1.3)$$

Эти поверхности имеют (см. [8]) самые богатые группы и алгебры симметрий среди несферических невырожденных однородных гиперповерхностей в \mathbb{C}^4 . Для каждой из них размерность голоморфного стабилизатора (т.е. локальной группы голоморфных преобразований, сохраняющих поверхность и фиксированную точку на ней) равна 6. Соответственно, размерность полной алгебры Ли голоморфных векторных полей на любой из них равна $6 + 7 = 13$.

Пару однородных несферических поверхностей (1.3), мы называем *обобщениями поверхности Винкельманна* ([9])

$$\operatorname{Im} z_3 = z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_1|^4 \quad (1.4)$$

из пространства \mathbb{C}^3 . На ней достигается максимума, равного 8, размерность алгебры Ли голоморфных векторных полей в классе однородных невырожденных несферических гиперповерхностей пространства \mathbb{C}^3 . Естественность связи поверхностей (1.3) с (1.4) подтверждается и сходством их уравнений.

Отметим, что именно к виду (1.3) приводятся несложными преобразованиями уравнения несферических невырожденных однородных гиперповерхностей в \mathbb{C}^4 , полученные в [4]. Напомним также, что вырожденность (в точке 0) гладкой поверхности в \mathbb{C}^4 , содержащей начало координат и заданной уравнением $\operatorname{Im} z_4 = F(z_1, z_2, z_3, \operatorname{Re} z_4)$, $dF(0) = 0$, означает вырожденность матрицы

$$H = (\partial^2 F / \partial z_k \partial \bar{z}_j)(0), \quad k, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Везде ниже мы подразумеваем возможность описания изучаемых однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами 7-мерных алгебр Ли, именно такими уравнениями.

Реализованная в настоящей статье техника развивает изложенные в [10] идеи реализации (представления) абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в многомерных комплексных пространствах. Рассмотрение только 7-мерных орбит таких алгебр в \mathbb{C}^4 , определяемых системой (семи базисных) уравнений

$$\operatorname{Re}(e_k(\Phi)|_M) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, 7, \quad (1.5)$$

означает полноту ранга этих алгебр. Условие такой полноты и требование невырожденности по Леви орбит обсуждаемых алгебр оказываются жесткими фильтрами, позволяющими свести рассмотрения больших семейств алгебр Ли к изучению лишь их отдельных представителей. На заключительном этапе системы уравнений в частных производных (1.5) интегрируются стандартными методами.

Настоящая статья представляет собой расширенное и уточненное содержание доклада, представленного на конференции «УОМШ-2020» в ноябре 2020 г. (см. [11], [12]).

Отметим еще один момент, возникший в связи с замечаниями рецензента по настоящей работе. Базой для рассуждений статьи является классификация 7-мерных (а также 6-мерных и 5-мерных) нильпотентных алгебр Ли. Для 7-мерного случая такая классификация имеется, например, в известной статье С. Seeley [13]. Однако, как показал М.Р. Gong в [14], статья С. Seeley содержит некоторые ошибки и неточности. В связи с этим авторы использовали необходимые классификационные списки именно из работы [14], считая их более надежными.

2. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ РАЗЛОЖИМЫХ АЛГЕБР ЛИ

Основным результатом первой части статьи является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Вещественная гиперповерхность в \mathbb{C}^4 , являющаяся орбитой нильпотентной разложимой 7-мерной алгебры Ли, может быть только вырожденной по Леви.*

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько случаев, связанных с возможными структурами разложимых алгебр и с размерностями содержащихся в них абелевых идеалов. Полное доказательство складывается из совокупности отдельных случаев, обсуждаемых в разделах 2-5 статьи.

Обсудим возможные структуры разложимых 7-мерных алгебр Ли.

Список таких алгебр несложно сформировать с учетом представления числа 7 в виде сумм нескольких меньших (натуральных) чисел, равных размерностям неразложимых алгебр-слагаемых. Формально говоря, таких разложений имеется 14; например, в виде суммы двух слагаемых число 7 представляется тремя способами:

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3.$$

Кроме того, имеется 4 представления этого числа в виде суммы трех слагаемых, 3 разложения из четырех слагаемых, 2 разложения из пяти слагаемых и по одному разложению из шести и из семи слагаемых.

Отметим, впрочем, что прямая сумма $g = g_1 \oplus \dots \oplus g_n$ алгебр Ли является нильпотентной тогда и только тогда, когда нильпотентно каждое слагаемое в этой сумме. Поскольку неразложимых двумерных нильпотентных алгебр не существует, из формальных представлений семерки в виде суммы меньших слагаемых нужно удалить все разложения, содержащие хотя бы одно вхождение слагаемого «2». Так получается уточненный список из 7 возможностей

$$\begin{aligned} 7 &= (6 + 1) = (4 + 3) = (5 + 1 + 1) = (3 + 3 + 1) = (4 + 1 + 1 + 1) \\ &= (3 + 1 + 1 + 1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Еще одним моментом является учет количества нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли «малых» размерностей. Согласно [14], имеется 20 таких алгебр размерности шесть, еще 6 нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли имеют размерность пять. Каждая из размерностей 1, 3, 4 имеет ровно по одному нильпотентному неразложимому представителю. В силу этого, набору разложений (2.1) соответствуют

$$20 + 1 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 31$$

различная нильпотентная разложимая 7-мерная алгебра Ли.

Для многих из обозначенных 31 разложимой алгебры Ли отсутствие вещественных Леви-невырожденных гиперповерхностей, являющихся орбитами голоморфных реализаций этих алгебр, устанавливается достаточно легко. Основанием для такого вывода является следующее утверждение, доказанное в [5].

Теорема 2.2. *Если 7-мерная алгебра Ли g_7 имеет 5-мерную абелеву подалгебру I_5 , и в дополнении $g_7 \setminus I_5$ имеется элемент, коммутирующий с 4-мерной подалгеброй $h_4 \subset I_5$, то все интегральные (гипер)поверхности голоморфной реализации алгебры g_7 в пространстве \mathbb{C}^4 вырождены по Леви.*

Замечание 2.1. *Очевидным следствием этой теоремы является утверждение о Леви-вырожденности всех орбит в \mathbb{C}^4 любой голоморфной реализации 7-мерной алгебры g_7 , имеющей 6-мерную абелеву подалгебру.*

Применим сначала теорему 2.2 и ее следствие к разложимым алгебрам, содержащим в своих разложениях не более, чем 4-мерные слагаемые.

Здесь и далее нильпотентные неразложимые слагаемые малых размерностей $k \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$, составляющие обсуждаемую 7-мерную алгебру, будем обозначать через \mathfrak{g}_k .

Предложение 2.1. *7-мерные орбиты в \mathbb{C}^4 любых реализаций пяти алгебр*

$$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_3, \quad 2\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_4 \oplus 3\mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_3 \oplus 4\mathfrak{g}_1, \quad 7\mathfrak{g}_1 \quad (2.2)$$

могут быть только вырожденными по Леви.

Доказательство. Доказательство предложения 2.1 начнем с конца списка (2.2). Абелева алгебра $7\mathfrak{g}_1$ содержит в себе 6-мерный абелев идеал, а потому, по следствию из теоремы 2.2 может иметь только вырожденные по Леви 7-мерные орбиты.

Трехмерная алгебра Гейзенберга \mathfrak{g}_3 с единственным соотношением

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad (2.3)$$

содержит пару коммутирующих векторов e_2, e_3 . Линейная оболочка h_2 этих векторов является 2-мерной абелевой подалгеброй (и даже абелевым идеалом) в \mathfrak{g}_3 . А в сумме с четырьмя одномерными абелевыми алгебрами h_2 образует 6-мерную абелеву подалгебру в 7-мерной алгебре Ли $\mathfrak{g}_3 \oplus 4\mathfrak{g}_1$.

Аналогично, у единственной нетривиальной 4-мерной нильпотентной алгебры Ли с соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4$$

имеется (большой по размерности) 3-мерный абелев идеал $h_3 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$. Тогда у 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_4 \oplus 3\mathfrak{g}_1$ также имеется 6-мерный абелев идеал.

У двух первых алгебр Ли из списка (2.2) имеется лишь 5-мерный абелев идеал. В случае алгебры $\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_3$ из двух слагаемых это $h_5 = h_3 + h_2$, а во втором случае $h_5 = h_2^{(1)} + h_2^{(2)} + \mathfrak{g}_1$, где $h_2^{(1)}, h_2^{(2)}$ – двумерные абелевы идеалы двух 3-мерных слагаемых, входящих в алгебру $g_7 = 2\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1$.

В дополнении к этому идеалу имеется элемент, коммутирующий с четырьмя независимыми векторами идеала h_5 .

В первом случае в качестве такого элемента можно взять e_5 из \mathfrak{g}_3 (считая, что эта подалгебра суммарной алгебры g_7 описывается соотношением $[e_5, e_6] = e_7$), не входящий в двумерный идеал h_2 . Этот элемент коммутирует с базисом e_2, e_3, e_4 идеала h_3 , а также с элементом e_7 из \mathfrak{g}_3 .

Во втором случае обозначим для наглядности два 3-мерных слагаемых, входящих в g_7 , через $\mathfrak{g}_3^{(1)}$ и $\mathfrak{g}_3^{(2)}$. Здесь элемент e_1 из первого 3-мерного слагаемого (с соотношением (2.3)), дополнительный к $h_2^{(1)}$, коммутирует с двумя базисными элементами двумерного идеала $h_2^{(2)}$ второй 3-мерной алгебры $\mathfrak{g}_3^{(2)}$, с одномерным слагаемым \mathfrak{g}_1 , а также с элементом e_3 .

Тогда, в силу теоремы 2.2 и ее следствия, для всех пяти алгебр Ли из (2.2) утверждение об отсутствии у них невырожденных орбит в \mathbb{C}^4 доказано. \square

Переходим теперь к исследованию разложимых алгебр Ли, содержащих, в соответствии с (2.1), 5-мерное или 6-мерное слагаемое.

3. АЛГЕБРЫ С 5-МЕРНЫМ И 6-МЕРНЫМ НЕРАЗЛОЖИМЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Предложение 3.1. *7-мерные орбиты в \mathbb{C}^4 любых реализаций алгебр Ли вида $\mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ с нильпотентным неразложимым слагаемым размерности 5 могут быть только вырожденными по Леви.*

Доказательство. Выпишем, в соответствии с [14] (см. также [15]), таблицу коммутационных соотношений для всех шести нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли размерности 5 (здесь и далее через s_{jk} обозначается коммутатор $[e_j, e_k]$).

Таблица 3.1: Неразложимые 5-мерные нильпотентные алгебры Ли [14]

Алгебры	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{34}	s_{35}	s_{45}
$N_{5,1}$	e_3	e_4	e_5		e_5					
$N_{5,2,1}$	e_3	e_4	e_5							
$N_{5,2,2}$	e_4		e_5		e_5					
$N_{5,2,3}$	e_3	e_4			e_5					
$N_{5,3,1}$	e_5							e_5		
$N_{5,3,2}$	e_4	e_5								

Из этой таблицы легко видеть, что алгебры $N_{5,2,1} \oplus 2\mathfrak{g}_1$ и $N_{5,3,2} \oplus 2\mathfrak{g}_1$ имеют 6-мерный абелев идеал $I_6 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \oplus 2\mathfrak{g}_1$.

А для остальных четырех алгебр \mathfrak{g}_5 из этой таблицы сумма $\mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ имеет 5-мерный абелев идеал вида $I_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$. Здесь для алгебры $N_{5,1}$ абелев идеал I_3 – это линейная оболочка $\langle e_3, e_4, e_5 \rangle$, для $N_{5,2,2}$ – это $\langle e_2, e_4, e_5 \rangle$, а для двух оставшихся алгебр $N_{5,2,3}$ и $N_{5,3,1}$ положим $I_3 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$.

Остается заметить, что в дополнении $\mathfrak{g}_5 \setminus I_3$ к каждому из этих 5-мерных идеалов имеется элемент, коммутирующий с двумя элементами I_3 :

e_2 коммутирует с $\langle e_4, e_5 \rangle \subset I_3$ в случае алгебр $N_{5,1}$, $N_{5,2,3}$ и $N_{5,3,1}$,

e_3 коммутирует с $\langle e_4, e_5 \rangle \subset I_3$ в случае алгебры $N_{5,2,2}$.

Тогда у любой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_7 = \mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ с первым слагаемым из таблицы 3.1 имеется 5-мерный абелев идеал I_5 и элемент в дополнении к этому идеалу, коммутирующий с четырьмя независимыми элементами I_5 . По теореме 2.2 все 7-мерные орбиты в \mathbb{C}^4 алгебр Ли, обсуждаемых в этом предложении, могут быть только вырожденными. \square

Исследование 20 разложимых алгебр, содержащих 6-мерное неразложимое слагаемое, начнем со следующего технического утверждения.

Предложение 3.2. Тринадцать из 20 алгебр вида $\mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_1$ имеют 5-мерный идеал и элемент в дополнении, коммутирующий с 4-мерной подалгеброй этого идеала. Пять из семи оставшихся алгебр имеют 5-мерный абелев идеал и элемент в дополнении к нему, коммутирующий лишь с 3-мерной подалгеброй такого идеала. Две алгебры из семи имеют лишь 4-мерный абелев идеал, а в дополнении к нему два элемента, коммутирующие с 2-мерными подалгебрами такого идеала.

Замечание 3.1. Для упомянутых 13 алгебр Ли из формулировки предложения 3.2 утверждение теоремы 2.1 выполняется в силу теоремы 2.2.

Замечание 3.2. Уточним, что у двух алгебр из этих 13 имеется 6-мерный абелев идеал и, тем самым, формальные условия о 5-мерном идеале, зафиксированные в формулировке предложения 3.2, для них также выполняются.

Доказательство. Доказательство предложения 3.2 требует аккуратного рассмотрения (например, с использованием компьютера) коммутационных соотношений, аналогичных приведенным выше в таблице 3.1 и имеющихся, например, в [14]. Мы кратко прокомментируем здесь лишь 3 алгебры из упомянутых 13, а подробно обсудим 7 наиболее интересных алгебр вида $\mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_1$, не удовлетворяющих условиям теоремы 2.2.

Итак, две 6-мерные алгебры:

$N_{6,2,1}$ с четырьмя коммутационными соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq 5$ и $N_{6,3,4}$ с тремя соотношениями $[e_1, e_2] = e_3; [e_2, e_3] = e_5; [e_2, e_4] = e_6$ содержат абелевы идеалы $I_5^{(1)} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ и $I_5^{(2)} = \langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ соответственно.

Одномерное слагаемое \mathfrak{g}_1 , включенное в прямую сумму с каждой из этих алгебр, очевидно, увеличивает размерность абелева идеала получаемых 7-мерных алгебр на единицу.

В качестве примера «общей» для 13 алгебр ситуации рассмотрим три нетривиальных коммутационных соотношения, задающих $N_{6,3,6}$, последнюю из 20 неразложимых 6-мерных нильпотентных алгебр в списке [14]:

$$[e_1, e_2] = e_4; \quad [e_1, e_3] = e_5; \quad [e_2, e_3] = e_6.$$

Эта алгебра имеет лишь 4-мерный абелев идеал $I_4 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$, а в ее прямой сумме с одномерной алгеброй \mathfrak{g}_1 мы получаем 5-мерный идеал $I_5 = I_4 \oplus \mathfrak{g}_1$. При этом элемент e_2 из дополнения к I_5 коммутирует с тремя полями e_4, e_5, e_6 из I_4 , а также с базисным полем одномерного слагаемого \mathfrak{g}_1 .

Опишем теперь в виде таблицы коммутационные соотношения для семи наиболее интересных алгебр (из двадцати), не удовлетворяющих условиям теоремы 2.2. При этом обратим внимание на принадлежность центру любой из 20 обсуждаемых алгебр Ли базисного элемента e_6 . По этой причине в таблице 3.2 выписаны лишь 10 (вместо формальных 15) коммутационных соотношений для каждой из включенных в нее алгебр: тривиальные соотношения с e_6 опущены.

Таблица 3.2: 6-мерные алгебры Ли с «маломерными» абелевыми идеалами [14]

Алгебры	s_{12}	s_{13}	s_1	s_{15}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{34}	s_{35}	s_{45}
$N_{6,1,1}$	e_3	e_4	e_5	e_6	e_5	e_6				
$N_{6,1,2}$	e_3	e_4	e_5		e_5		e_6	$-e_6$		
$N_{6,1,4}$	e_3	e_4	e_6		e_6		e_6			
$N_{6,2,2}$	e_3	e_4	e_5				e_6	$-e_6$		
$N_{6,2,3}$	e_4		e_5	e_6	e_5			$-e_6$		
$N_{6,2,5}$	e_3	e_4		e_6	e_5	e_6				
$N_{6,3,1}$	e_4	e_5					e_6		e_6	

Из этой таблицы вытекают следующие уточнения предложения 3.2 об абелевых идеалах I_k обсуждаемых 7-мерных алгебр и элементах из дополнений к этим идеалам, коммутирующих с подалгебрами таких идеалов ($\mathfrak{g}_1 = \langle e_7 \rangle$):

- $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_5 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_2$ коммутирует с $\langle e_5, e_6, e_7 \rangle,$
 - $N_{6,1,4} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_5 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_1$ коммутирует с $\langle e_5, e_6, e_7 \rangle,$
 - $N_{6,2,3} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_5 = \langle e_2, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_3$ коммутирует с $\langle e_5, e_6, e_7 \rangle,$
 - $N_{6,2,5} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_5 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_1$ коммутирует с $\langle e_4, e_6, e_7 \rangle,$
 - $N_{6,3,1} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_5 = \langle e_1, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_2$ коммутирует с $\langle e_4, e_6, e_7 \rangle;$
 - $N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ и $N_{6,2,2} \oplus \mathfrak{g}_1 : I_4 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, e_2$ коммутирует с $\langle e_4, e_6, e_7 \rangle .$
- Предложение 3.2 считаем доказанным. □

Наши ближайшие рассуждения будут связаны именно с выделенными идеалами семи обсуждаемых алгебр.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 4.1. ([4]). Пусть вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ невырождена по Леви вблизи некоторой своей точки Q и является орбитой 7-мерной алгебры Ли \mathfrak{g} голоморфных векторных полей в этом пространстве. Пусть еще I_4 – 4-мерная абелева подалгебра в \mathfrak{g} с фиксированным базисом e_4, e_5, e_6, e_7 . Голоморфной заменой координат пространства \mathbb{C}^4 (определенной вблизи точки Q) этот базис можно привести к одному из трех видов

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, \end{pmatrix} & 2) \quad \begin{pmatrix} 0, & b_4(z_1), & c_4(z_1), & d_4(z_1), \\ 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, \end{pmatrix} & 3) \quad \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & c_5(z_1), & d_5(z_1), \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Лемма 4.2. Пусть $M \subset \mathbb{C}^4$ – невырожденная по Леви гиперповерхность, на которой имеется 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей с 5-мерной абелевой подалгеброй I_5 . Тогда первый из трех случаев леммы 4.1 невозможен ни для какой четверки независимых полей из I_5 .

Доказательство. Доказательство леммы 4.2. Рассмотрим какой-либо базис e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 5-мерной абелевой алгебры I_5 , считая четверку полей из этого базиса выпрямленной и имеющей (в некоторых координатах) вид

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Пятое базисное поле e_5 алгебры I_5 , коммутирующее со всей этой четверкой, обязано иметь постоянными все свои четыре компонента, т.к. каждое поле первой четверки означает дифференцирование по одной из комплексных переменных пространства \mathbb{C}^4 . Рассматривая вместо e_5 его линейную комбинацию с полями первой четверки, можно считать, что оно имеет вид

$$e_5 = (iA_5, iB_5, iC_5, iD_5),$$

где все A_5, B_5, C_5, D_5 – вещественные константы.

Но и векторное поле $e_5^* = -ie_5 = (A_5, B_5, C_5, D_5)$ также является касательным к M (как линейная комбинация полей первой базисной четверки), а это означает, что M вырождена по Леви. Полученное противоречие с условием невырожденности M доказывает лемму 4.2. □

Лемма 4.3. Пусть в 7-мерной алгебре g_7 голоморфных векторных полей на невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ имеется 5-мерная абелева подалгебра I_5 , а в ней 3-мерная подалгебра h_3 , с которой коммутирует некоторый элемент из дополнения $g_7 \setminus I_5$. Тогда при упрощении четверки независимых полей, содержащей какой-либо базис h_3 и произвольное четвертое поле из $I_5 \setminus h_3$, выпрямление только двух полей из h_3 (и третьего из $I_5 \setminus h_3$) невозможно.

Доказательство. Доказательство леммы 4.3. Будем считать базисом 5-мерной абелевой подалгебры I_5 поля e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 , причем $h_3 = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$. Упрощая четверку полей e_4, e_5, e_6, e_7 по схеме леммы 4.1, необходимо показать, что в обсуждаемой ситуации (при произвольном выборе базисных полей e_5, e_6, e_7) третий случай этой леммы невозможен.

Допуская, что он возможен, мы имеем в этом случае три выпрямленных поля e_4, e_6, e_7 , два из которых принадлежат 3-мерной подалгебре, а третье – нет. Поле

$$e_3 = (a_3(z), b_3(z), c_3(z), d_3(z)),$$

также входящее в абелеву алгебру I_5 , коммутирует с выпрямленной тройкой полей. Поэтому его компоненты могут зависеть только от переменной z_1 . При этом первая компонента $a_3(z_1)$ обязана быть тождественно нулевой, т.к. в противном случае, пользуясь техникой работы [10], поле e_3 можно выпрямить с сохранением выпрямленного вида полей e_4, e_6, e_7 (а это невозможно по доказанному в лемме 4.2).

Тогда у всей базисной пятерки полей e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 первые компоненты $a_k(z_1)$ являются нулевыми. Воспользуемся теперь существованием поля

$$e_1 = (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)) \in g_7 \setminus I_5,$$

коммутирующего с полями $e_5 = (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1)), e_6 = \partial/\partial z_3, e_7 = \partial/\partial z_4$. В силу условий $[e_1, e_6] = [e_1, e_7] = 0$ компоненты e_1 зависят не более, чем от переменных z_1, z_2 . Тогда

$$0 = [e_1, e_5] = a_1(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)).$$

Следовательно, $a_1(z_1, z_2)c_5'(z_1) \equiv 0, a_1(z_1, z_2)d_5'(z_1) \equiv 0$.

Здесь либо $a_1(z_1, z_2) \equiv 0$, либо оба коэффициента $c_5(z_1), d_5(z_1)$ в действительности не зависят и от переменной z_1 , т.е. являются константами.

Но для Леви-невырожденной поверхности M коэффициент $a_1(z)$ не может равняться нулю, т.к. 6 нулей в столбце первых компонент базисных полей означают вырождение M . А в линейной оболочке независимой (над \mathbb{R}) тройки векторных полей

$$e_5 = (0, 0, C_5, D_5), \quad e_6 = (0, 0, 1, 0), \quad e_7 = (0, 0, 0, 1)$$

с постоянными компонентами всегда можно найти два нетривиальных поля вида Z, iZ . Наличие такой пары полей, касательных к гиперповерхности M , также означает ее вырождение по Леви!

Полученные противоречия доказывают лемму 4.3. □

Следствие 4.1. В условиях леммы 4.3 можно выпрямить любой базис трехмерной подалгебры h_3 , коммутирующей с элементом из дополнения $g_7 \setminus I_5$.

Упрощенно говоря, поиски невырожденных однородных орбит для алгебр Ли с такими свойствами достаточно проводить, ограничиваясь лишь случаем 2 леммы 4.1.

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.1

Теорема 2.1 будет полностью доказана после рассмотрения орбит совокупности семи «исключительных» алгебр Ли из таблицы 3.2. Ниже обсуждаются две группы алгебр, на которые естественно распадается эта совокупность.

5.1. Разложимые алгебры с 5-мерными абелевыми идеалами.

Предложение 5.1. *Голоморфные реализации в пространстве \mathbb{C}^4 пяти алгебр*

$$N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad N_{6,1,4} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad N_{6,2,3} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad N_{6,2,5} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad N_{6,3,1} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad (5.1)$$

содержащих 5-мерный абелев идеал, не имеют Леви-невыврожденных 7-мерных орбит.

Доказательство. Для каждой из пяти обозначенных 7-мерных алгебр Ли воспользуемся вложениями $h_3 \subset I_5 \subset g_7$, приведенными в разделе 4, и соответствующими обсуждениями предыдущего раздела; также напомним, что h_3 коммутирует с некоторым элементом $g_7 \setminus I_5$.

При этом I_5, h_3 формируются, вообще говоря, по-разному в каждой из пяти алгебр. Например, для алгебры $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ имеем $I_5 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$, а элемент e_2 коммутирует с 3-мерной алгеброй $h_3 = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$.

Предложение 5.1 мы докажем именно для этой алгебры; справедливость его для остальных алгебр из списка (5.1) устанавливается аналогично.

Итак, при помощи голоморфной замены координат выпрямим, в соответствии со следствием из Леммы 4.3, четверку полей e_2, e_5, e_6, e_7 . Зафиксируем полученный вид базиса

$$\begin{aligned} e_1 &= (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)), \\ e_2 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_3 &= (0, b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)), \\ e_4 &= (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)), \\ e_5 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

алгебры $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ после такого выпрямления и продолжим рассмотрение коммутационных соотношений в реализации этой алгебры.

Из 21 соотношения для пар базисных полей остались нерассмотренными условия на шесть коммутаторов $[e_1, e_k]$ ($k = 2, \dots, 7$) и два коммутатора $[e_2, e_3]$, $[e_2, e_4]$. Из соотношений $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$ легко выводятся уточнения вида полей

$$e_3 = (0, z_1 + B_3, C_3, D_3), \quad e_4 = (0, B_4, z_1 + C_4, D_4), \quad (5.2)$$

где B_k, C_k, D_k – некоторые комплексные константы.

Еще два соотношения $[e_1, e_6] = [e_1, e_7] = 0$ означают, что компоненты поля e_1 не зависят от переменных z_3, z_4 . Уточнить зависимость этого поля от переменной z_2 позволяет соотношение $[e_1, e_5] = e_6$, из которого следует, что

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), -z_2 + c_1(z_1), d_1(z_1)) \quad (5.3)$$

с некоторыми голоморфными функциями a_1, b_1, c_1, d_1 .

Поле такого вида должно удовлетворять трем последним соотношениям

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5.$$

Однако, в самом последнем из них получаем противоречие, т.к. в силу (5.2) и (5.3) имеем:

$$[e_1, e_4] = a_1(z_1) \cdot (0, 0, 1, 0) - B_4 \cdot (0, 0, -1, 0) \neq (0, 1, 0, 0) = e_5.$$

Тем самым, допущение о существовании (хотя бы одной) невырожденной орбиты у алгебры Ли $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ приводит к противоречию.

Для этой алгебры утверждение предложения 5.1 доказано. Как отмечалось выше, остальные алгебры, включенные в формулировку этого предложения, рассматриваются аналогично. \square

5.2. Разложимые алгебры с 4-мерными абелевыми идеалами.

Предложение 5.2. *Голоморфные реализации в пространстве \mathbb{C}^4 алгебр $N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ и $N_{6,2,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ с 4-мерными максимальными абелевыми идеалами не имеют Леви-невырожденных орбит.*

Доказательство. Согласно таблице 3.2, две этих алгебры отличаются лишь в одном коммутаторе $[e_2, e_3]$. Рассуждения, приводимые ниже, не используют этот коммутатор и являются общими для обеих обсуждаемых алгебр.

Итак, допуская, что существует реализация какой-либо из обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли g_7 с невырожденными орбитами, рассмотрим три случая леммы 4.1 упрощения фиксированного базиса e_4, e_5, e_6, e_7 идеала I_4 этой алгебры, связанные именно с ее невырожденной орбитой.

В первом случае при выпрямленной четверке базисных полей идеала I_4 рассмотрим коммутационные соотношения каждого из остальных базисных полей алгебры g_7 с этой четверкой. Для поля e_1 имеем

$$[e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = 0, \quad [e_1, e_6] = 0, \quad [e_1, e_7] = 0.$$

Из этих соотношений получаем упрощенный вид поля

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1)$$

с некоторыми (комплексными) константами A_1, B_1, C_1, D_1 . Аналогичные рассмотрения, связанные с полем e_3 , приводят его к виду

$$e_3 = (A_3, B_3, z_1 + C_3, D_3)$$

с константами A_3, B_3, C_3, D_3 . Вычисляя для таких полей их коммутатор и используя соотношение $[e_1, e_3] = e_4$, получим противоречие

$$A_1(0, 0, 1, 0) - A_3(0, -1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0).$$

Во втором случае четверку полей e_4, e_5, e_6, e_7 считаем имеющей вид

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)), \\ e_5 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Здесь мы рассмотрим коммутаторы полей e_1, e_3 с тремя выпрямленными полями идеала I_4 . Так как все шесть таких коммутаторов равны нулю, приходим к выводу о зависимости компонент пары полей e_1 и e_3 только от переменной z_1 . Отметим, что с учетом упрощенного вида базиса идеала I_4 в этом случае первые компоненты этих полей $a_1(z_1), a_3(z_1)$ не могут одновременно быть тождественно нулевыми.

Рассмотрим в связи с этим два подслучая. В первом, считая $a_1(z_1) \neq 0$, можно (аналогично обсуждениям двух предыдущих разделов) выпрямить базисное поле e_1 до вида $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ с сохранением выпрямленной тройки полей e_5, e_6, e_7 . Вид полей e_3 и e_4 также сохранится (но с измененными, вообще говоря, функциональными коэффициентами $a_k(z_1), b_k(z_1), c_k(z_1), d_k(z_1)$, $k = 3, 4$).

Тогда из пары коммутационных соотношений $[e_1, e_4] = e_5$ и $[e_1, e_3] = e_4$ получаем уточненный вид полей

$$e_4 = (0, z_1 + B_4, C_4, D_4), \quad e_3 = (A_3, \frac{1}{2}(z_1 + B_4)^2 + B_3, C_4 z_1 + C_3, D_4 z_1 + D_3).$$

Однако, вычисляя для них коммутатор $[e_3, e_4] = -e_6$, приходим к противоречию, т.к. левая часть последнего равенства $A_3 \cdot (0, 1, 0, 0)$ не совпадает с правой.

Во втором подслучае мы полагаем $a_1(z_1) \equiv 0$, но тогда $a_3(z_1) \neq 0$. По аналогии с предыдущим подслучаем поле e_3 выпрямим голоморфной заменой до состояния $e_3 = (1, 0, 0, 0)$.

Вычисляя в этом подслучае коммутатор $[e_3, e_4] = -e_6$, получим уточненный вид поля

$$e_4 = (0, B_4, -z_1 + C_4, D_4)$$

с некоторыми константами B_4, C_4, D_4 . Тогда из соотношения $[e_1, e_3] = e_4$ получим аналогичное уточнение (с дополнительными константами A_1, B_1, C_1, D_1)

$$e_1 = (A_1, -B_4 z_1 + B_1, \frac{1}{2}(z_1 - C_4), -D_4 z_1 + D_1).$$

Остается вычислить коммутатор полей e_1, e_4 с учетом полученных уточнений. Имеем:

$$[e_1, e_4] = A_1 \cdot (0, 0, -1, 0),$$

а это противоречит коммутационному соотношению $[e_1, e_4] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$.

Наконец, в *третьем случае* имеем четверку базисных полей идеала I_4 в виде

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1)), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Обсудим здесь еще два поля из дополнения к этому идеалу, а именно e_1 и e_3 . Коммутатор каждого из этих полей с полями e_6 и e_7 равен нулю. Поэтому компоненты полей e_1 и e_3 зависят не более, чем от переменных z_1, z_2 . Рассматривая с учетом этого коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [e_1, e_5] &= a_1(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0, \\ [e_3, e_5] &= a_3(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0, \end{aligned}$$

получаем одну из двух ситуаций:

- либо 1) $a_1(z_1, z_2) \equiv 0, \quad a_3(z_1, z_2) \equiv 0$,
- либо 2) $c_5(z_1) = C_5 = const, \quad d_5(z_1) = D_5 = const$.

В первой ситуации мы имеем на невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ шестерку линейно независимых голоморфных векторных полей e_k ($k = 1, 3, 4, 5, 6, 7$) с тождественно нулевыми первыми компонентами. Это, как отмечалось выше, невозможно.

Вторая ситуация также невозможна на невырожденной гиперповерхности, т.к. в линейной оболочке независимой (над \mathbb{R}) тройки векторных полей

$$e_5 = (0, 0, C_5, D_5), \quad e_6 = (0, 0, 1, 0), \quad e_7 = (0, 0, 0, 1)$$

с постоянными компонентами найдутся два нетривиальных поля вида Z, iZ . Наличие такой пары полей, касательных к гиперповерхности M означает ее вырождение по Леви.

Противоречия, возникающие в каждом из рассмотренных случаев и подслучаев, доказывают предложение 5.2. \square

В свою очередь это предложение является завершающим фрагментом доказательства теоремы 2.1 и первой части настоящей статьи.

Переходя ко второй ее части, отметим, что основным моментом приведенных выше рассуждений является наличие абелевых подалгебр (идеалов), размерности не меньшей 4, у рассматриваемых 7-мерных алгебр Ли. При этом, по крайней мере, некоторые из рассмотренных алгебр содержат более одной абелевой подалгебры (максимально возможной размерности).

Так, алгебра $N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ (см. таблицу 3.2) имеет помимо выписанного 4-мерного идеала $I_4 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$ еще три аналогичных абелевых идеала

$$I'_4 = \langle e_1, e_5, e_6, e_7 \rangle, \quad I''_4 = \langle e_2, e_4, e_6, e_7 \rangle, \quad I'''_4 = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle.$$

Такое свойство 7-мерных алгебр также является информативным в задаче описания их орбит. Мы используем его в завершающих разделах статьи.

6. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ АЛГЕБРЫ С ТРЕМЯ 4-МЕРНЫМИ ИДЕАЛАМИ

Ниже обсуждаются 7-мерные алгебры Ли, имеющие лишь 4-мерные абелевы идеалы, но количество таких идеалов в каждой рассматриваемой алгебре предполагается не меньшим, чем три. Среди 149 неразложимых нильпотентных алгебр Ли 4 алгебры (17, 157, 147A, 37D₁ в нумерации работы [14]) имеют больше трех абелевых идеалов и 8 алгебр

$$247D, \quad 247E, \quad 247Q, \quad 247R, \quad 147D, \quad 137D, \quad 1357A, \quad 1357D \quad (6.1)$$

– ровно три таких идеала.

Оказалось, что в отличие от первой части статьи, 4 из этих 12 алгебр Ли имеют невырожденные по Леви орбиты в пространстве \mathbb{C}^4 . Промежуточным, но идейно важным результатом описания таких поверхностей является следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть вещественная невырожденная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ является орбитой 7-мерной алгебры голоморфных векторных полей. Если эта алгебра не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, но имеет три 4-мерных абелевых подалгебры, то M голоморфно эквивалентна трубчатой гиперповерхности (уравнение которой зависит лишь от мнимых частей четырех комплексных переменных).*

Полное описание невырожденных орбит 12 рассматриваемых алгебр содержится в следующей теореме.

Теорема 6.2. *1) С точностью до голоморфной эквивалентности невырожденными по Леви орбитами в \mathbb{C}^4 7-мерной алгебры Гейзенберга 17, содержащей восемь различных 4-мерных абелевых идеалов, являются две сферические поверхности (квадрики)*

$$\text{Im } z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2; \quad (6.2)$$

2) три алгебры 157, 147A, 37D₁, имеющие по четыре различных абелевых идеала, не допускают невырожденных по Леви 7-мерных орбит в \mathbb{C}^4 ;

3) пять алгебр 247D, 247E, 247Q, 247R, 147D, содержащие по три различных абелевых идеала, также не допускают невырожденных 7-мерных орбит в пространстве \mathbb{C}^4 ;

4) с точностью до голоморфной эквивалентности невырожденными орбитами двух алгебр 137D, 1357A являются лишь несферические поверхности

$$\text{Im } z_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2 \pm |z_1|^4; \quad (6.3)$$

5) все невырожденные орбиты алгебры 1357D голоморфно эквивалентны indefinitной квадрике

$$\text{Im } z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2. \quad (6.4)$$

Доказательству теоремы 6.2 посвящена оставшаяся часть статьи. Всю совокупность 12 обсуждаемых в ней алгебр мы разобьем на отдельные блоки; интересующие нас свойства алгебр, составляющих блоки, сформулированы и доказаны в предложениях 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2. Теорема 6.1 будет получена как следствие одного из таких утверждений.

Перед тем, как приступить к рассмотрению этих утверждений, выпишем здесь коммутационные соотношения для всех 12 обсуждаемых алгебр. Для первой четверки алгебр 17, 157, 147A, 37D₁ они имеют в некоторых базисах вид:

$$\begin{aligned}
 17 : \quad & [e_1, e_2] = [e_3, e_4] = [e_5, e_6] = e_7 \\
 157 : \quad & [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_7, [e_2, e_4] = e_7, [e_5, e_6] = e_7; \\
 147A : \quad & [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7; \\
 37D_1 : \quad & [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_3] = -e_7, \\
 & [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = -e_5.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Коммутационные соотношения для восьми алгебр (6.1) представлены ниже:

$$\begin{aligned}
 247D : \quad & [e_1, e_k] = e_{k+2}, \quad k = 2, 3; [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7; \\
 247E : \quad & [e_1, e_k] = e_{k+2}, \quad k = 2, 3, 4; [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7; \\
 247Q : \quad & [e_1, e_k] = e_{k+2}, \quad k = 2, 3, 4; [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7; [e_3, e_4] = e_7; \\
 247R : \quad & [e_1, e_k] = e_{k+2}, \quad k = 2, 3, 4; [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, \\
 & [e_2, e_5] = e_7; [e_3, e_4] = e_7;
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
 147D : \quad & [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = -e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\
 & [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = -2e_7; \\
 137D : \quad & [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\
 & [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = -e_7; \\
 1357A : \quad & [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\
 & [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7; \\
 1357D : \quad & [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_k] = e_{k+2}, \quad k = 3, 4; \\
 & [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Выписывать интересующие нас 4-мерные идеалы рассматриваемых алгебр мы будем по мере необходимости. Отметим лишь, что выявление таких или других по размерности абелевых подалгебр и идеалов в большом списке [14] из 149 алгебр, а также определение количества таких идеалов в каждой алгебре естественно производить с помощью компьютерных программ (см. [16]). Для обсуждаемых здесь 12 алгебр все утверждения об идеалах несложно проверить непосредственно. Например, в алгебре 247D с выписанными выше коммутационными соотношениями имеются следующие абелевы идеалы:

$$I_4' = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle, \quad I_4'' = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, \quad I_4''' = \langle e_4, e_2, e_6, e_7 \rangle. \tag{6.8}$$

Отметим одну особенность ситуации с тремя абелевыми идеалами для обсуждаемых 12 алгебр, полезную для дальнейших обсуждений. Ее удобно сформулировать в терминах неупорядоченных наборов символов в 7-значном алфавите $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (с фиксированным количеством элементов в наборе).

Закодируем для этого 4-мерный идеал, являющийся линейной оболочкой элементов $\{e_j, e_k, e_l, e_m\}$ 7-мерной алгебры, в виде (неупорядоченного) набора (j, k, l, m) длины 4. Тогда можно измерять *расстояние* (типа расстояния Хемминга) между двумя такими наборами как количество символов, отличающих один набор от другого.

Например, идеалам (6.8) алгебры $247D$ соответствуют наборы

$$J_1 = (3, 5, 6, 7), \quad J_2 = (4, 5, 6, 7), \quad J_3 = (4, 2, 6, 7). \quad (6.9)$$

При этом расстояние от набора J_2 как до J_1 , так и до J_3 , равно 1, а J_1 и J_3 удалены друг от друга на две единицы. Будем говорить в таком случае, что идеалам I'_4, I''_4, I'''_4 алгебры $247D$ соответствует (*равнобедренный*) *треугольник со сторонами (1,1,2)* во множестве обсуждаемых наборов длины 4.

Отметим еще, что у алгебры $37D_1$ имеется 4 абелевых идеала с кодовыми наборами

$$J_1 = (1, 5, 6, 7), \quad J_2 = (2, 5, 6, 7), \quad J_3 = (3, 5, 6, 7), \quad J_4 = (4, 5, 6, 7).$$

Любые два из них удалены на единичное расстояние друг от друга во множестве наборов длины 4, и это отличает алгебру $37D_1$ от алгебры $247D$. Оказывается, что среди 12 обсуждаемых алгебр только алгебра $37D_1$ является исключительной в смысле устройства 4-мерных идеалов.

Предложение 6.1. *Среди 4-мерных абелевых идеалов для каждой из 12 алгебр (6.1), (6.5), кроме алгебры $37D_1$, найдутся три идеала, образующие (1,1,2)-треугольник во множестве кодирующих их наборов длины 4.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения получается простым перебором; его иллюстрацией служат приведенные обсуждения идеалов алгебр $247D$ и $37D_1$. \square

Рассмотрим отдельно алгебру $37D_1$, выделенную в предложении 6.1, а после этого перейдем к рассмотрению остальных 11 алгебр из набора (6.1), (6.5).

Предложение 6.2. *Реализация алгебры $37D_1$ в виде алгебры голоморфных векторных полей на невырожденной по Леви гиперповерхности в \mathbb{C}^4 невозможна.*

Доказательство. Допуская существование невырожденной по Леви орбиты такой алгебры и пользуясь леммой 4.1, обсудим по отдельности три случая, которые возникают при попытках упрощения базиса e_4, e_5, e_6, e_7 абелева идеала I''_4 этой алгебры.

В первом случае считаем, что

$$e_4 = (1, 0, 0, 0), \quad e_5 = (0, 1, 0, 0), \quad e_6 = (0, 0, 1, 0), \quad e_7 = (0, 0, 0, 1). \quad (6.10)$$

Коммутационные соотношения (6.5) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры $37D_1$ с выпрямленными полями e_4, e_5, e_6, e_7 позволяют существенно упростить вид полей e_1, e_2, e_3 . Так из единственного нетривиального соотношения $[e_1, e_4] = e_7$ такого типа с участием поля e_1 получаем

$$e_1 = (A_1, B_1, C_1, -z_1 + D_1),$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 – некоторые комплексные константы.

Аналогично можно получить упрощенные представления для полей e_2, e_3 :

$$e_2 = (A_2, B_2, -z_1 + C_2, D_2), \quad e_3 = (A_3, z_2 + B_3, C_3, D_3).$$

Замечание 6.1. *Если в алгебре Ли векторных полей в \mathbb{C}^4 имеются два поля вида*

$$\begin{aligned} e_1 &= (a_1(z), B_1, c_1(z), d_1(z)), \\ e_2 &= (a_2(z), B_2, c_2(z), d_2(z)), \end{aligned}$$

где B_1, B_2 – некоторые константы, то вторая компонента коммутатора $[e_1, e_2]$ равна нулю.

Учитывая это замечание и имеющееся в алгебре $37D_1$ соотношение

$$[e_1, e_2] = e_5 = (0, 1, 0, 0),$$

приходим к противоречию.

Во втором случае леммы 4.1 выпрямлены (до состояния (6.10)) лишь три поля e_5, e_6, e_7 того же идеала, а $e_4 = (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1))$. Воспользуемся наличием в обсуждаемой алгебре еще одного 4-мерного идеала $I'_4 = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle$. Компоненты поля e_3 , коммутирующего с остальными тремя базисными полями I'_4 , могут зависеть лишь от одной переменной z_1 , т.е. все поле можно представить в виде

$$e_3 = (a_1(z_1), b_1(z_1), c_1(z_1), d_1(z_1)).$$

Если при этом компонента $a_1(z_1) \equiv 0$, то коммутатор $[e_3, e_4] = 0$, что противоречит соотношению $[e_3, e_4] = -e_5$, имеющемуся у данной алгебры. Следовательно, $a_1(z_1) \neq 0$ (возможно, в смещенной точке поверхности), и тогда все поле e_3 можно выпрямить до состояния $e_3 = (1, 0, 0, 0)$, пользуясь техникой работы [10] (см. также [7]).

Рассматривая теперь коммутаторы полей e_1, e_2 с выпрямленным базисом идеала I'_4 , можно, аналогично случаю 1, упростить эти поля до вида

$$e_1 = (A_1, B_1, z_1 + C_1, D_1), \quad e_2 = (A_2, B_2, C_2, z_1 + D_2).$$

По замечанию, использованному выше, вторая компонента коммутатора $[e_1, e_2]$ равна нулю, что противоречит соотношению $[e_1, e_2] = e_5$.

Наконец, в третьем случае, в преобразованных голоморфным преобразованием координатах, для нас важно, что $e_5 = (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1))$, и только пара полей e_6, e_7 имеет тот же вид, что и в (6.10). Так как два последних поля принадлежат центру $Z = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$ алгебры $37D_1$, то компоненты всех полей этой алгебры могут зависеть лишь от переменных z_1, z_2 .

Вычисляя в таком случае коммутаторы полей e_1, e_2, e_3 с полем e_5 , получим:

$$\begin{aligned} [e_1, e_5] &= a_1(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0, \\ [e_2, e_5] &= a_2(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0, \\ [e_3, e_5] &= a_3(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0. \end{aligned}$$

Формально говоря, три таких равенства возможны в двух случаях:

- a) $c_5(z_1) = Const, \quad d_5(z_1) = Const;$
- b) $a_1(z) = a_2(z) = a_3(z) = 0.$

Но для базисных векторных полей 7-мерной алгебры, касательных к невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$, невозможен ни один из них (см. доказательства леммы 4.3 и предложения 5.1).

Итак, при допущении существования невырожденной орбиты у алгебры $37D_1$ все три возможных ситуации упрощения идеала $I = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$ этой алгебры приводят к противоречиям. \square

Для описания орбит 11 остальных алгебр Ли из набора (6.1), (6.5) и доказательства теорем 6.1 и 6.2 мы воспользуемся зафиксированным в предложении 6.1 свойством взаимного расположения их 4-мерных абелевых идеалов.

7. СВЕДЕНИЕ К ТРУБКАМ И ВЫРОЖДЕННОСТЬ ОРБИТ ДЛЯ 8 АЛГЕБР

Предложение 7.1. Пусть 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей на вещественной невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, но имеет три абелевых 4-мерных подалгебры, образующих $(1,1,2)$ -треугольник (во множестве кодирующих их наборов длины 4). Тогда голоморфной заменой координат можно выпрямить четверку базисных полей одной из абелевых подалгебр.

Доказательство. Пусть g – 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей в \mathbb{C}^4 , удовлетворяющая условиям предложения 7.1. Переобозначим для удобства базисные поля алгебры g и ее 4-мерные абелевы подалгебры I' , I'' , I''' в соответствии с формулой (6.9), т.е. так, что

$$I' = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle, \quad I'' = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, \quad I''' = \langle e_2, e_4, e_6, e_7 \rangle.$$

Замечание 7.1. Так как алгебра Ли g не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, то ни один из двух коммутаторов $[e_3, e_4]$, $[e_2, e_5]$ не может быть нулевым.

Далее применим к базису идеала I'' лемму 4.1. Если этот базис удастся полностью выпрямить (случай 1), то предложение 7.1 верно.

Пусть набор полей (e_4, e_5, e_6, e_7) попадает во второй случай леммы 4.1. Тогда рассмотрим поле e_3 и абелев идеал I' . Так как три его поля e_5, e_6, e_7 выпрямлены, то компоненты коммутирующего с ними поля $e_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$ могут зависеть только от переменной z_1 .

Если при этом $a_3(z_1) \neq 0$, то все поле

$$e_3 = (a_3(z_1), b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)) \quad (7.1)$$

может быть приведено (как и при доказательстве леммы 4.3) голоморфной заменой координат к виду $e_3 = \partial/\partial z_1$ при одновременном сохранении выпрямленного вида остальных базисных полей e_5, e_6, e_7 подалгебры I' . Это снова означает справедливость предложения 7.1.

Ситуация же $a_3(z_1) \equiv 0$ в этом случае невозможна. В самом деле, для двух полей e_3 и e_4 , зависящих лишь от переменной z_1 и имеющих тождественно нулевые компоненты a_3, a_4 , их коммутатор $[e_3, e_4]$ также должен быть равен нулю. Но это противоречит замечанию, сделанному в начале доказательства.

Наконец, в третьем случае леммы 4.1 поля e_4, e_5, e_6, e_7 имеют вид

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1)), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Вспоминая о третьей абелевой подалгебре I''' , получим упрощенный вид поля e_2 , компоненты которого, подобно (7.1), оказываются зависящими не более, чем от z_1 . При этом, аналогично рассуждению для случая 2, компонента $a_2(z_1)$ не может быть тождественно нулевой (т.к. тогда коммутатор $[e_2, e_5] = 0$).

А поле $e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1))$ с ненулевой компонентой $a_2(z_1)$ можно выпрямить до состояния $e_2 = (1, 0, 0, 0)$ с сохранением вида выпрямленных полей e_4, e_6, e_7 . Предложение 7.1 оказывается справедливым и в этом случае. \square

Замечание 7.2. Вместе с предложением 7.1 доказана и теорема 6.1, т.к. выпрямление четверки независимых полей на гиперповерхности M означает именно свойство ее трубчатости.

Это свойство играет важную роль в общих описаниях голоморфно однородных гиперповерхностей в комплексных пространствах произвольной размерности подобно изученным ситуациям с однородностью в \mathbb{C}^2 и \mathbb{C}^3 . Впрочем, для содержательной иллюстрации теоремы 6.1 и завершения доказательства теоремы 6.2 необходимо еще уменьшить количество обсуждаемых алгебр Ли.

Предложение 7.2. *Семь алгебр Ли 157, 147A, 247D, 247E, 247Q, 247R, 147D, 4-мерные идеалы которых образуют (1,1,2)-треугольники во множестве кодов, не имеют невырожденных орбит в \mathbb{C}^4 .*

Доказательство. Использование предложения 7.1 позволяет сводить рассмотрение каждой алгебры, три абелевых идеала которой имеют структуру (1,1,2)-треугольника, к трем достаточно простым проверкам. Рассмотрим их на примере алгебры 247D.

Считая, что эта алгебра имеет Леви-невырожденную орбиту, рассмотрим отдельно три случая выпрямления базисных полей для каждого из трех абелевых идеалов алгебры. Сначала выпрямим поля

$$\begin{aligned} e_4 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

отвечающие набору J_2 из (6.9).

Коммутационные соотношения (6.6) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры g с выпрямленными полями e_4, e_5, e_6, e_7 позволяют существенно упростить вид полей e_1, e_2, e_3 . Так из единственного нетривиального соотношения $[e_1, e_4] = e_6$ такого типа с участием поля e_1 получаем

$$e_1 = (A_1, B_1, -z_1 + C_1, D_1),$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 – некоторые комплексные константы.

Аналогично, для полей e_2, e_3 получаем упрощенные представления вида

$$e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_2 + D_2), \quad e_3 = (A_3, B_3, C_3, -z_3 + D_3).$$

Для таких полей e_1, e_2 первая компонента их коммутатора равна нулю, что противоречит имеющемуся в алгебре 247D соотношению $[e_1, e_2] = e_4 = (1, 0, 0, 0)$.

Аналогичные противоречия получаются и при выпрямлении базисов идеалов I' и I''' алгебры 247D. Для идеала I' выпрямление его базисных полей e_3, e_5, e_6, e_7 и рассмотрение коммутаторов этих полей с оставшейся тройкой e_1, e_2, e_4 базисных полей алгебры 247D приводит к формулам

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1), \quad e_4 = (A_4, B_4, C_4, z_1 + D_4). \quad (7.2)$$

Применяя использованное выше замечание к коммутатору $[e_1, e_4] = e_6 = (0, 0, 1, 0)$ и к третьим компонентам полей (7.2), получим противоречие и в этом случае.

Наконец, после выпрямления базисных полей

$$\begin{aligned} e_2 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_6 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_7 &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

идеала I''' получим аналогичные представления для

$$\begin{aligned} e_1 &= (A_1, -z_1 + B_1, -z_2 + C_1, D_1), \\ e_3 &= (A_3, B_3, C_3, -z_2 + D_3), \\ e_5 &= (A_5, B_5, C_5, z_1 + D_5). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Рассматривая далее коммутационные соотношения $[e_1, e_5] = 0$ и $[e_3, e_5] = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} A_1(0, 0, 0, 1) - (A_5(0, -1, 0, 0) + B_5(0, 0, -1, 0)) &= 0, \\ A_3(0, 0, 0, 1) - B_5(0, 0, 0, -1) &= 0. \end{aligned}$$

Из равенства нулю отдельных компонент двух коммутаторов $[e_1, e_5]$ и $[e_3, e_5]$ легко получаются равенства $A_1 = A_3 = A_5 = 0$, означающие, что шесть базисных полей алгебры $247D$ имеют в этом случае тождественно нулевые первые компоненты. Такая ситуация несовместима с невырожденностью по Леви 7-мерной поверхности, на которой задана алгебра касательных полей $247D$.

Аналогично устанавливается противоречивость допущения о существовании невырожденных орбит для всех трех алгебр п. 2 теоремы 6.2 и у оставшихся четырех алгебр п. 3. \square

8. СФЕРИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ АЛГЕБР 17 И 1357D

В этом разделе мы покажем, что алгебры 17 и 1357 D имеют в пространстве \mathbb{C}^4 лишь сферические 7-мерные орбиты.

Предложение 8.1. *Невырожденными по Леви орбитами алгебры 17 с соотношениями $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = [e_5, e_6] = e_7$ являются с точностью до голоморфной эквивалентности лишь сферические поверхности (квадрики)*

$$\text{Im } z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2.$$

Доказательство. Для полных рассмотрений нам будет достаточно упомянуть лишь три из восьми 4-мерных абелевых идеалов, например,

$$I'_4 = \langle e_2, e_4, e_5, e_7 \rangle, \quad I''_4 = \langle e_2, e_4, e_6, e_7 \rangle, \quad I'''_4 = \langle e_2, e_3, e_6, e_7 \rangle. \quad (8.1)$$

В силу предложения 7.1 достаточно описать все невырожденные поверхности, являющиеся орбитами обсуждаемой алгебры при выпрямлении каждого из этих трех идеалов по отдельности. Заметим при этом, что симметрия соотношений (6.5) позволяет на самом деле обсуждать лишь один такой идеал.

В самом деле, переход от I'_4 к I''_4 или от I''_4 к I'''_4 означает лишь переименование пары полей, входящих в единственное содержащее эту пару коммутационное соотношение алгебры 17. Он не меняет качественную итоговую картину с орбитами этой алгебры.

Итак, рассмотрим идеал $I''_4 = \langle e_2, e_4, e_6, e_7 \rangle$, сразу считая его выпрямленным после некоторой голоморфной замены координат. Коммутационные соотношения (6.5) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры g с выпрямленными полями e_2, e_4, e_6, e_7 позволяют существенно упростить вид полей e_1, e_3, e_5 . В силу этих соотношений все они оказываются устроенными однотипно:

$$\begin{aligned} e_1 &= (A_1, B_1, C_1, -z_1 + D_1), \\ e_3 &= (A_3, B_3, C_3, -z_2 + D_3), \\ e_5 &= (A_5, B_5, C_5, -z_3 + D_5), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где A_k, B_k, C_k, D_k ($k = 1, 3, 5$) – некоторые комплексные константы.

Сдвигами переменных легко освободить последние компоненты этих трех полей от констант D_k . А рассматривая вместо полученных полей их комбинации с четверкой выпрямленных полей, можно считать все константы A_k, B_k, C_k чисто мнимыми. Вводя обозначения

$$A_k = ia_k, \quad B_k = ib_k, \quad C_k = ic_k \quad (a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}),$$

рассмотрим еще матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

В силу условия полного ранга обсуждаемой реализации алгебры 17 эта матрица является невырожденной.

Замечание 8.1. *Можно получить дополнительные ограничения на элементы этой матрицы, учитывая три еще не использованных соотношения $[e_1, e_3] = [e_3, e_5] = [e_1, e_5] = 0$. Но фактически такие ограничения не потребуются.*

Перейдем теперь от полей (8.2) к системе дифференциальных уравнений в частных производных $\text{Re}(e_k(\Phi)|_M) = 0$ ($k = 1, 3, 5$), описывающей основание трубчатой орбиты алгебры 17. В матричной форме эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial F / \partial y_1 \\ \partial F / \partial y_2 \\ \partial F / \partial y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}.$$

Невырожденность матрицы (8.3) позволяет переписать последнее уравнение в виде, разрешенном относительно частных производных функции $F(y_1, y_2, y_3)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = l_1(y_1, y_2, y_3), \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = l_2(y_1, y_2, y_3), \quad \frac{\partial F}{\partial y_3} = l_3(y_1, y_2, y_3)$$

с некоторыми линейными функциями $l_k(y_1, y_2, y_3)$.

Ясно, что решениями такой системы уравнений (при выполнении условий согласования) являются некоторые квадратичные формы

$$F = Q(y_1, y_2, y_3).$$

Возвращаясь к комплексным переменным пространства \mathbb{C}^4 , мы с необходимостью получим уравнения возможных орбит обсуждаемой реализации алгебры Гейзенберга в виде $\text{Im } z_4 = Q(\text{Im } z_1, \text{Im } z_2, \text{Im } z_3)$.

Удаление из правой части последнего уравнения голоморфных и антиголоморфных слагаемых приводит его к виду

$$\text{Im } z_4 = H(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$$

с некоторой эрмитовой формой в правой части. Интересуясь только невырожденными орбитами и используя линейные преобразования комплексных переменных, получаем всего две возможности для орбит алгебры Гейзенберга (при реализации, связанной с выпрямлением идеала I_4''):

$$\text{Im } z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2.$$

Остается заметить, что обе эти сферические поверхности представляют известные однородные поверхности, причем их однородность реализуется простыми линейными сдвигами по первой тройке переменных и квадратичным (по параметрам сдвига) преобразованием переменной z_4 . Алгебра Ли, соответствующая такой группе преобразований, является именно алгеброй Гейзенберга.

Завершая доказательство предложения 8.1, напомним еще раз о симметрии этой алгебры и о дословном повторении полученных выводов при выпрямлении любого из двух других идеалов I'_4, I'''_4 . \square

Замечание 8.2. После такого рассмотрения алгебры 17 легко показать отсутствие невырожденных 7-мерных орбит в \mathbb{C}^4 у алгебры 157, заданной соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_4] = [e_5, e_6] = e_7.$$

В самом деле, после перестановки $e_2 \leftrightarrow e_3$ три из четырех коммутационных соотношений последней алгебры совпадают с формулами (6.5) для алгебры 17, а дополнительное четвертое переписывается в виде $[e_1, e_3] = e_2$. Абелевы идеалы (8.1) остаются таковыми и в алгебре 157. Выпрямление любого из них приводит к аналогичному (8.2) виду полей, дополнительных к этим идеалам. Четвертое соотношение на эти поля, как несложно убедиться, во всех случаях приводит к противоречиям.

Предложение 8.2. Любая невырожденная по Леви орбита алгебры 1357D в \mathbb{C}^4 голоморфно эквивалентна индефинитной квадрике

$$\text{Im } z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2.$$

Доказательство. Для алгебры 1357D из п. 5 теоремы 6.2 выпрямление базисов двух идеалов $I'_4 = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle$ и $I''_4 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$ приводит к противоречиям после применения замечания о коммутаторе полей, содержащих константы в фиксированной компоненте. А вот для идеала $I'''_4 = \langle e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ получаем четверку выпрямленных полей

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad e_5 = \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad e_7 = \frac{\partial}{\partial z_4} \quad (8.4)$$

и (после рассмотрения еще 12 коммутаторов выпрямленных полей с оставшейся тройкой) упрощенные представления

$$\begin{aligned} e_2 &= (A_2, z_1 + B_2, -z_2 + C_2, -z_3 + D_2), \\ e_4 &= (A_4, B_4, C_4, z_2 + D_4), \\ e_6 &= (A_6, B_6, C_6, z_1 + D_6). \end{aligned} \quad (8.5)$$

На этом этапе остается проверить три последних коммутационных соотношения

$$[e_2, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_6] = [e_4, e_6] = 0.$$

Из этих соотношений имеем (после сдвигов каждой из трех комплексных переменных z_1, z_2, z_3) следующие уточнения вида тройки полей (8.5):

$$\begin{aligned} e_2 &= (A_2, z_1 + B_2, -z_2, -z_3), \\ e_4 &= (0, -A_2, B_2, z_2 + D_4), \\ e_6 &= (0, 0, -A_2, z_1). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Далее необходимо проинтегрировать алгебру векторных полей 1357D с упрощенным базисом (8.4), (8.6). Наличие в этой алгебре четверки полей (8.4) означает, как отмечалось выше, трубчатую структуру обсуждаемой гиперповерхности M . Поэтому можно считать ее заданной уравнением $\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ или, с учетом интересующего нас свойства невырожденности M , в разрешенном относительно одной из переменных виде

$$y_4 = F(y_1, y_2, y_3). \quad (8.7)$$

Интегрировать в таком случае придется систему трех уравнений в частных производных, отвечающую полям (8.6). Отметим при этом, что за счет рассмотрения вместо полей e_2, e_4, e_6 их комбинаций с полями из выпрямленной четверки можно считать константы A_2, B_2, D_4 чисто мнимыми. Кроме того, при нулевом A_2 получается вырожденная по Леви

ситуация шести нулей в первых компонентах базисных полей алгебры, а потому считаем $A_2 \neq 0$.

Для практического интегрирования используем формальную запись касания произвольным полем e_k изучаемой поверхности M в виде уравнения

$$\operatorname{Re}(e_k(\Phi)|_M) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, 7.$$

В переменных y_1, y_2, y_3 с учетом упрощающих обозначений $A_2 = ia, B_2 = ib, D_2 = id$ так получается следующая система уравнений :

$$a \frac{\partial F}{\partial y_1} + (y_1 + b) \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} = y_3, \quad -a \frac{\partial F}{\partial y_2} + b \frac{\partial F}{\partial y_3} = y_2 + d, \quad -a \frac{\partial F}{\partial y_3} = y_1. \quad (8.8)$$

Последовательное (начиная с простейшего) решение уравнений этой системы приводит с учетом обозначения $\lambda = 1/a$ к формулам

$$F = \lambda y_1 y_3 + G(y_1, y_2), \quad \frac{\partial G}{\partial y_2} = \lambda^2 b y_1 - \lambda(y_2 + d), \quad G = \lambda^2 b y_1 y_2 - \frac{1}{2} \lambda (y_2 + d)^2 + H(y_1).$$

Для функции $H(y_1)$ получаем уравнение

$$H' = -\lambda^3 b y_1^2 + m y_1 + n$$

с некоторыми коэффициентами m, n в правой части. Тогда итоговая формула, описывающая все решения системы (8.8), имеет вид

$$y_4 = \lambda y_1 y_3 + \lambda^2 b y_1 y_2 - \frac{1}{2} \lambda (y_2 + d)^2 - \frac{1}{3} \lambda^3 b y_1^3 + P_2(y_1), \quad (8.9)$$

где $P_2(y_1)$ – некоторый многочлен второй степени.

Заметим, что при условии $b = 0$ уравнение (8.9) не содержит слагаемых третьей степени, а потому описывает (с точностью до аффинных преобразований переменных) индефинитную квадрику

$$v = y_1 y_3 + y_2^2 \quad (8.10)$$

пространства \mathbb{R}_y^4 .

В случае же $b \neq 0$ за счет аффинных преобразований

$$y_1^* = y_1 + \alpha, \quad y_2^* = y_2, \quad y_3^* = y_3 + \lambda b y_2 + m y_1 + n, \quad y_4^* = \frac{1}{\lambda} y_4 + Q y_2 + M y_1 + N,$$

с подходящими коэффициентами это уравнение преобразуется к виду

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2 + y_1^3. \quad (8.11)$$

Однако возвращаясь к комплексным переменным и используя не более чем квадратичные преобразования, несложно привести (см. Дополнение) оба уравнения (8.10) и (8.11) к единому виду

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$$

индефинитной квадрики в пространстве \mathbb{C}^4 . □

9. НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ АЛГЕБР 137D и 1357A

Обсудим теперь наиболее интересные алгебры 137D и 1357A из п. 4) теоремы 6.2.

Начнем с выписывания 4-мерных абелевых идеалов, имеющих в этих алгебрах. Легко проверяется, исходя из описаний (6.7), что такими идеалами, отвечающими кодовым (1,1,2)-треугольникам, являются:

$$\begin{aligned} 137D : I_4' &= \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, & I_4'' &= \langle e_2, e_5, e_6, e_7 \rangle, & I_4''' &= \langle e_3, e_4, e_6, e_7 \rangle, \\ 1357A : I_4' &= \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, & I_4'' &= \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle, & I_4''' &= \langle e_2, e_4, e_5, e_7 \rangle. \end{aligned}$$

При этом два первых идеала I'_4, I''_4 для каждой из этих алгебр невозможно выпрямить при условии существования хотя бы одной невырожденной орбиты у этих алгебр.

Например, по схеме, описанной выше, для базисных полей алгебры $137D$, дополнительных к идеалу I'_4 получаем:

$$e_1 = (A_1, B_1, -z_1 + C_1, D_1), \quad e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_1 + D_2).$$

Но при этом для их коммутатора должно выполняться равенство $[e_1, e_2] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$, не согласующееся с тем, что вторые компоненты этих полей являются константами.

При выпрямлении идеала I''_4 этой же алгебры имеем

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, -z_3 + D_1), \quad e_4 = (A_4, B_4, C_4, z_1 + D_4).$$

Такой вид этих полей противоречит условию $[e_1, e_4] = e_6 = (0, 0, 1, 0)$.

Для алгебры $1357A$ имеем при выпрямлении базиса I'_4 аналогичные упрощенные представления

$$e_1 = (A_1, B_1, C_1, -z_2 + D_1), \quad e_4 = (A_4, B_4, C_4, -z_1 + D_4),$$

противоречащие соотношению $[e_1, e_4] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$. А выпрямляя базис I''_4 , получаем $e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1)$, $e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_3 + D_2)$, что также противоречит соотношению $[e_1, e_2] = e_4 = (1, 0, 0, 0)$.

Перейдем к выпрямлению идеала I'''_4 для алгебры $1357A$. Повторяя в этом случае предыдущую схему обсуждения всех 21 коммутационных соотношений, приходим к непротиворечивым описаниям тройки полей

$$\begin{aligned} e_1 &= (ia, -z_1, -z_2, -z_3), \\ e_3 &= (0, -ia, z_1, z_2 + id_3), \\ e_6 &= (0, 0, -ia, z_1 + id_6). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Здесь a, d_3, d_6 – некоторые вещественные коэффициенты. При этом можно считать, что $a \neq 0$, т.к. при $a = 0$ первые компоненты шести базисных полей алгебры $1357A$ оказываются нулевыми, а это невозможно для независимых полей, касательных к невырожденной гиперповерхности M .

Обсудим теперь идеал I'''_4 для алгебры $137D$. Описанные выше процедуры уточнения вида тройки базисных полей e_1, e_2, e_5 , дополнительных к I'''_4 , приводят к следующим непротиворечивым формулам (здесь, как и в (9.1) $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} e_1 &= (ia, ib, -z_2 + ic, -z_3), \\ e_2 &= (0, 2ia, -z_1, -z_2), \\ e_5 &= (0, 0, ia, -z_1 + id). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Интегрирование алгебр $1357A$ и $137D$ с упрощенными базисами теперь проводится по схеме, описанной в предыдущем разделе. В каждом из двух случаев оно сводится к решению системы трех уравнений с частными производными.

Обсудим сначала систему, отвечающую полям (9.1) алгебры $1357A$. Задавая интегральную поверхность этой алгебры уравнением

$$y_4 = F(y_1, y_2, y_3), \tag{9.3}$$

мы имеем здесь три соотношения на частные производные функции F :

$$\begin{aligned} a \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} &= -y_3, \\ -a \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_3} &= y_2 + d_3, \\ a \frac{\partial F}{\partial y_3} &= y_1 + d_6. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Предложение 9.1. При $a \neq 0$ любая трубчатая гиперповерхность пространства \mathbb{C}^4 , описываемая уравнениями (9.3)-(9.4), голоморфно эквивалентна поверхности

$$v = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + |z_1|^4.$$

Доказательство. Решая уравнения системы (9.4) поочередно, в порядке нарастания их сложности, получим (например, с помощью символьных вычислений) следующие формулы

$$F = -\frac{1}{a} y_3 (y_1 + d_6) + G(y_1, y_2), \quad G(y_1, y_2) = -\frac{1}{2a} y_2^2 - \frac{1}{a^2} y_1 y_2 (y_1 + d_6) - \frac{d_3}{a} y_2 + H(y_1).$$

При этом на функцию $H(y_1)$ получаем уравнение

$$aH'(y_1) = \frac{y_1}{a} (y_1^2 + d_6 y_1 + d_3 a).$$

Общее решение системы (9.4) в итоге описывается формулой

$$\begin{aligned} y_4 &= -\frac{1}{12a^3} (3y_1^4 + 4d_6 y_1^3) - \frac{1}{a^2} y_2 y_1^2 \\ &\quad - \frac{y_1}{2a^2} (2d_6 y_2 + d_3 y_1 + 2y_3 a) - \frac{1}{2a} (y_2^2 + 2d_3 y_2 + 2d_6 y_3). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Временно усложним это уравнение, выделяя в нем интересующие нас слагаемые и вводя некоторые новые (менее существенные) коэффициенты:

$$\begin{aligned} y_4 &= -\frac{1}{4a^3} \left(y_1 + \frac{1}{3} d_6 \right)^4 - \frac{1}{a^2} y_2 \left(y_1 + \frac{1}{3} d_6 \right)^2 - \frac{1}{a} \left(y_1 + \frac{1}{3} d_6 \right) (y_3 + m y_1 + n y_2) \\ &\quad - \frac{1}{2a} y_2^2 + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) + \beta. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Далее воспользуемся аффинным преобразованием координат

$$y_1^* = y_1 + \frac{1}{3} d_6, \quad y_3^* = \frac{1}{2a} (y_3 + m y_1 + n y_2), \quad y_4^* = y_4 - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \beta). \quad (9.7)$$

Тогда уравнения полученных орбит упростятся до

$$y_4 = -\frac{1}{4a^3} y_1^4 - \frac{1}{a^2} y_2 y_1^2 - y_1 y_3 - \frac{1}{2a} y_2^2. \quad (9.8)$$

Замечание 9.1. Трубчатая гиперповерхность (9.8) голоморфно эквивалентна в пространстве \mathbb{C}^4 (см. Дополнение ниже) обобщению поверхности Винкельманна

$$v = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + |z_1|^4. \quad (9.9)$$

С учетом этого замечания предложение 9.1 можно считать доказанным. \square

Рассмотрим теперь аналогичным образом орбиты алгебры $137D$. Совокупность полей (9.2) порождает в этом случае следующую систему уравнений в частных производных относительно определяющих функций (9.3) таких орбит:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial F}{\partial y_1} + b \frac{\partial F}{\partial y_2} + (c - y_2) \frac{\partial F}{\partial y_3} &= -y_3, \\ 2a \frac{\partial F}{\partial y_2} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_3} &= -y_2, \\ a \frac{\partial F}{\partial y_3} &= d - y_1. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Предложение 9.2. При $a \neq 0$ любая трубчатая гиперповерхность пространства \mathbb{C}^4 , описываемая уравнениями (9.3), (9.10), голоморфно эквивалентна поверхности

$$v = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 - |z_1|^4.$$

Доказательство. Решение системы уравнений (9.10), так же, как и (9.4), можно получить пошаговым исследованием отдельных уравнений. Для функции $F = F(y_1, y_2, y_3)$, описывающей орбиты алгебры $137D$, имеем:

$$F = -\frac{1}{a}(b + y_1)y_3 + G(y_1, y_2); \quad G = -\frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}(b + y_1)y_1y_2 + H(y_1),$$

где функция $H(y_1)$ является решением ОДУ

$$aH' = \frac{by_1^2}{2a^2} + \frac{(2ac + b^2)y_1}{2a^2} + \frac{bc}{a}.$$

Это означает, что общее решение системы (9.10) имеет вид

$$y_4 = -\frac{1}{a}(b + y_1)y_3 - \frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}(b + y_1)y_1y_2 + \frac{b}{6a^3}y_1^3 + (\alpha y_1^2 + \beta y_1 + \gamma).$$

Упрощая это уравнение за счет аффинных преобразований переменных y_k подобно тому, как это делалось для решений системы (9.4), несложно привести его к виду

$$y_4 = y_1y_3 - \frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}y_1^2y_2 + \frac{b}{6a^3}y_1^3. \quad (9.11)$$

В свою очередь такая трубчатая алгебраическая поверхность третьей степени в пространстве \mathbb{C}^4 голоморфно эквивалентна (см. Дополнение) поверхности четвертой степени

$$v = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 - |z_1|^4. \quad (9.12)$$

Предложение 9.2 доказано. \square

Совокупность доказанных предложений 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2 позволяет считать завершенным и доказательство теоремы 6.2.

Отметим, что поверхности (9.9) и (9.12) представляют собой два голоморфно неэквивалентных обобщения известной поверхности Винкельманна

$$v = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_1|^4$$

в 3-мерном комплексном пространстве. Эти поверхности являются, как показано в [8], несферическими и имеют самые богатые, 13-мерные, алгебры симметрий среди всех однородных несферических гиперповерхностей в \mathbb{C}^4 . Рассмотренные нами подалгебры $1357A$ и $137D$ являются 7-мерными подалгебрами полных алгебр симметрий для поверхностей (9.9) и (9.12).

10. ДОПОЛНЕНИЕ (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТРУБОК)

В этом разделе мы приводим вычисления, относящиеся к трем различным фрагментам статьи, но имеющие общий характер. Рассмотрим голоморфные преобразования трех семейств алгебраических трубчатых гиперповерхностей пространства \mathbb{C}^4 , описываемых «похожими» уравнениями ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$):

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + C y_1^3, \quad (10.1)$$

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + B y_1^2 y_2 + C y_1^3, \quad (10.2)$$

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + B y_1^2 y_2 + D y_1^4. \quad (10.3)$$

Предложение 10.1. *При $A \neq 0$ независимо от значения коэффициента C справедливы следующие утверждения:*

1) поверхность (10.1) голоморфно эквивалентна индефинитной квадрике

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2;$$

2) при $B \neq 0$ поверхность (10.2) эквивалентна обобщению поверхности Винкельманна

$$\operatorname{Im} z_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2 - |z_4|^2;$$

3) при $6AD - B^2 = 0$ поверхность (10.3) сферична, а при $6AD - B^2 \neq 0$ эквивалентна одному из двух обобщений поверхности Винкельманна

$$\operatorname{Im} z_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2 \pm |z_4|^2.$$

Доказательство. Заметим, что можно обсуждать три уравнения (10.1)–(10.3) в виде одного общего уравнения

$$\operatorname{Im} z_4 = x_1 x_3 + A x_2^2 + B x_1^2 x_2 + C x_1^3 + D x_1^4, \quad (10.4)$$

в котором мы еще перешли от мнимых частей комплексных переменных z_1, z_2, z_3 к их вещественным частям за счет замены $z_k \rightarrow i z_k^*$.

Растяжениями двух переменных $z_2 = A z_2^*, z_4 = A z_4^*$ ненулевой коэффициент A из (10.4) превращается в единицу, а коэффициенты B, C, D заменяются на $B/A, C/A, D/A$ соответственно.

Перейдем к комплексным переменным, подставляя формулы $x_k = (z_k + \bar{z}_k)/2$ при $k = 1, 2, 3$ в (10.4). Раскрывая теперь скобки в правой части уравнения (10.4), отметим, что возникающую здесь сумму $\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}$ голоморфных и антиголоморфных слагаемых, можно из нее удалить. Это действие реализуется заменой $w^* = w - 2i\varphi(z)$ с последующим отбрасыванием звездочки. Следовательно, вместо (10.4) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z_4 = & \frac{1}{4}(z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + \frac{1}{4}|z_2|^2 + \frac{B}{8A}(z_1^2 \bar{z}_2 + 2z_1 z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1^2 + 2z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ & + \frac{3C}{8A}(z_1^2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_1^2) + \frac{D}{16A}(4z_1^3 \bar{z}_1 + 6|z_4|^2 + 4z_1 \bar{z}_1^3). \end{aligned}$$

Воспользуемся еще одной заменой координат

$$z_2^* = z_2 + \frac{B}{2A} z_1^2, \quad z_3^* = z_3 + \frac{B}{A} z_1 z_2 + \frac{3C}{2A} z_1^2 + \frac{D}{A} z_1^3, \quad z_4^* = 4z_4,$$

после которой уравнение (10.4) примет вид

$$\operatorname{Im} z_4 = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + \left(\frac{3D}{2A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) |z_1|^4.$$

Ясно теперь, что любая поверхность с уравнением (10.4) превращается голоморфными заменами либо в индефинитную квадрику

$$\operatorname{Im} z_4 = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 \quad (\text{или} \quad \operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 - |z_3|^2 + |z_2|^2),$$

если выполняется условие $6AD - B^2 = 0$; либо в поверхность

$$\operatorname{Im} z_4 = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + N|z_1|^4 \quad (10.5)$$

с ненулевым вещественным $N = (6AD - B^2)/4A^2$. Остается заметить, что при ненулевом N еще одна замена

$$z_2 \rightarrow \sqrt{|N|}z_2, \quad z_3 \rightarrow |N|z_3, \quad z_4 \rightarrow |N|z_4$$

превращает этот коэффициент в $\operatorname{sgn}(N) = \pm 1$.

Завершая доказательство, учтем, что в уравнении (10.1) $B = D = 0$, а потому для него выполнено условие сферичности $6AD - B^2 = 0$. Для уравнения (10.2) коэффициент $N = (6AD - B^2)/4A^2$, очевидно, является отрицательным. А для уравнения (10.3) этот коэффициент может быть произвольным вещественным числом (положительным, отрицательным или нулевым).

Эти выводы доказывают предложение 10.1. □

Возвращаясь к орбитам рассмотренных выше алгебр, приходим к выводу об их сферичности в случае алгебры $1357D$ из предложения 8.2.

В свою очередь, для орбит алгебр $137D$ и $1357A$, описываемых уравнениями (9.8) и (9.11) соответственно, наборы параметров (A, B, C, D) имеют вид

$$\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a^2}, 0, \frac{1}{4a^3} \right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{4a^2}, -\frac{1}{2a^2}, \frac{b}{6a^3}, 0 \right).$$

Для первого набора параметр $N = (6AD - B^2)/4A^2$ положителен, а для второго — отрицателен, что приводит к двум разным уравнениям (10.5).

Замечание 10.1. Уравнения полученных в [4] однородных поверхностей

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2 + y_1^2 y_2 + D y_1^4 \quad \text{и} \quad y_4 = y_1 y_3 + y_2^2 + x_1 y_1 y_2 + D y_1^4, \quad (10.6)$$

сводятся аналогичными выкладками при $D \neq 1/12$ к (9.9) и (9.12). При этом сферичность первой поверхности (10.6) при $D = 1/12$ доказана в [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Cartan. *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. **11**, 17–90 (1933).
2. А.В. Лобода. *Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в \mathbb{C}^3* // Труды ММО. **81**:2, 61–136 (2020).
3. Р.С. Акопян, А.В. Лобода. *О голоморфных реализациях нильпотентных алгебр Ли* // Функци. анализ и его прил. **53**:2, 59–63 (2019).
4. A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh. *On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:3, 360–372 (2020).
5. А.В. Лобода. *О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерных комплексных пространств* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. **331**, 194–212 (2020).
6. Р.С. Акопян, В.В. Крутских. *Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 5-мерные абелевы идеалы* // Материалы междунар. конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (ВЗМШ-2021). Воронеж, 32–33 (2021).
7. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в \mathbb{C}^3* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **173**, 86–115 (2019).
8. B. Kruglikov. *Submaximally symmetric CR-structures* // J. Geom. Anal. **26**:4, 3090–3097 (2016).
9. J. Winkelmann. *The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds*. Lect. Notes Math. 1062, Springer. Berlin etc. 1995.

10. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy. *Homogeneous hypersurfaces in \mathbb{C}^3 , associated with a model CR-cubic* // J. Geom. Anal. **20**:3, 538–564 (2010).
11. А.В. Лобода. *О вырожденности орбит разложимых алгебр Ли* // Сборник тезисов междунар. научн. конф. «УОМШ-2020». Ч.1. Уфа, 122–124 (2020).
12. А.В. Лобода, В.К. Каверина. *Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих три абелевых 4-мерных идеала* // Сборник тезисов междунар. научн. конф. «УОМШ-2020». Ч.1. Уфа, 125–127 (2020).
13. C. Seeley. *7-dimensional nilpotent Lie algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **335**:2, 479–496 (1993).
14. M.P. Gong. *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and \mathbb{R})* // PhD thesis. Waterloo: Univ. Waterloo, 1998. www.semanticscholar.org/paper/f72dbfc64f72f7b3d9a740c77181ae2186d58e22
15. Г.М. Мубаракзянов. *Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка* // Изв. вузов. Матем. **3**, 99–106 (1963).
16. В.В. Крутских, А.В. Лобода. *Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче* // Материалы научн. конф. ИПМТ-2021. <https://www.cs.vsu.ru/ipmt-conf/open/works?year=2021>
17. А.В. Исаев, М.А. Мищенко. *Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **52**:6, 1123–1153 (1988).

Александр Васильевич Лобода,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
Московский пр., 14,
394026, г. Воронеж, Россия
E-mail: lobvgasu@yandex.ru

Валерия Константиновна Каверина,
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,
Ленинградский пр., д. 49,
125993, г. Москва, Россия
E-mail: vkkaverina@fa.ru