ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 1 (2022). С. 3-22.

УДК 515.172.2

ОРБИТЫ РАЗЛОЖИМЫХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ С $\mathfrak{sl}(2)$-ПОДАЛГЕБРОЙ

А.В. АТАНОВ

Аннотация. Задача построения полной классификации голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств была решена Э. Картаном в 1932 г. Аналогичное описание в трехмерном случае было недавно получено А.В. Лободой. В работе обсуждается фрагмент классификации (локально) голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерного комплексного пространства, являющихся орбитами в $\mathbb{C}^4$ одного семейства 7-мерных алгебр Ли. Как показано в работах Белошапки и Коссовского, Лободы и др., применение идей Э. Картана позволяет относительно легко получать описания орбит для алгебр, имеющих абелевы идеалы достаточно больших размерностей. В частности, наличие 4-мерного абелева идеала в 7-мерной алгебре Ли голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ часто приводит к свойству трубчатости для всех орбит такой алгебры. Алгебры Ли из рассматриваемого в работе семейства являются прямыми суммами алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и нескольких 4-мерных алгебр Ли и имеют не более чем 3-мерные абелевы подалгебры. При помощи техники совместного «выпрямления» векторных полей получено полное описание всех невырожденных по Леви голоморфно однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в $\mathbb{C}^4$ рассматриваемых алгебр. Многие из полученных однородных гиперповерхностей также оказываются трубчатыми многообразиями. Вместе с тем вопрос о возможной сводимости к трубкам остальных поверхностей еще предстоит исследовать. Эффективным инструментом такого исследования, как и детального изучения вопросов о голоморфной эквивалентности получаемых орбит, может оказаться техника нормальных форм Мозера. С ее помощью в статье исследован вопрос о сферичности представителей одного из полученных семейств гиперповерхностей. Однако применение метода нормальных форм для гиперповерхностей в комплексных пространствах размерности 4 и выше требует дальнейшей разработки этой техники.

Ключевые слова: однородная гиперповерхность, голоморфное преобразование, разложимая алгебра Ли.

Mathematics Subject Classification: 17B66, 53B25, 32V40

1. Введение

Задача локального описания вещественных гиперповерхностей комплексных пространств, однородных относительно голоморфных преобразований, была полностью решена в $\mathbb{C}^2$ Э. Картаном (см. [1]). Аналогичная классификация в $\mathbb{C}^3$ разбивается на два больших фрагмента, один из которых содержит описание всех однородных вырожденных по Леви (см. [2]), а второй – невырожденных (см. [3]–[8]) гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$.

A.V. Atanov, Orbits of decomposable 7-dimensional Lie algebras with $\mathfrak{sl}(2)$ subalgebra.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00497.

Поступила 2 апреля 2021 г.

В связи с завершением классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ возникает естественный интерес к получению аналогичных описаний и в пространствах больших размерностей – в частности, в $\mathbb{C}^4$. Помимо очевидных трубок над аффинно однородными гиперповерхностями из $\mathbb{R}^4$ (см., например, [9]–[11]) известны лишь отдельные примеры голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$ (см. [12], [13]).

По аналогии с трехмерным случаем, задачу построения классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$ целесообразно разделить на две части: описание вырожденных и невырожденных по Леви гиперповерхностей. Напомним, что под вырожденностью по Леви (в точке 0) гладкой гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$, содержащей начало координат и определяемой уравнением $\operatorname{Im} z_4 = F(z_1, z_2, z_3, \operatorname{Re} z_4)$, $dF(0) = 0$ понимается равенство нулю (в точке 0) определителя матрицы Гессе $(\partial^2 F/\partial z_k \partial \bar{z}_l)$ $(k, l \in \{1, 2, 3\})$.

Цель данной работы состоит в построении полного описания всех невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в $\mathbb{C}^4$ четырех разложимых 7-мерных алгебр

$$\mathfrak{r}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{sl}(2),$$

где 3-мерная алгебра $\mathfrak{sl}(2)$ определяется коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3,$$

а коммутационные соотношения для 4-мерных алгебр $\mathfrak{h}_k$ $(k = 1, \dots, 4)$, даны (см. [14]) в следующей таблице $(|h| \leqslant 1, p \geqslant 0)$:

Таблица 1.1

Алгебры	$[e_1, e_3]$	$[e_1, e_4]$	$[e_2, e_3]$	$[e_2, e_4]$	$[e_3, e_4]$
$\mathfrak{h}_1$		$2e_1$	e_1	e_2	$e_2 + e_3$
$\mathfrak{h}_2$		$(h+1)e_1$	e_1	e_2	he_3
$\mathfrak{h}_3$		$2pe_1$	e_1	$pe_2 - e_3$	$e_2 + pe_3$
$\mathfrak{h}_4$	e_1	$-e_2$	e_2	e_1	

Выбор именно этих алгебр для рассмотрения объясняется тем, что максимальная размерность их абелевых подалгебр равна трем. Из работ [7], [12], [15] следует, что наличие в алгебре векторных полей в $\mathbb{C}^n$ абелевой подалгебры размерности n существенно облегчает изучение орбит таких алгебр и часто приводит либо к вырожденности по Леви этих орбит, либо к их трубчатой структуре. А наиболее интересные однородные Леви-невырожденные поверхности (см. [7], [15]) возникали при рассмотрении алгебр с абелевыми подалгебрами малых размерностей.

Отметим, что среди разложимых семимерных алгебр Ли, не имеющих абелевых подалгебр размерности 4, лишь восемь типов алгебр являются прямыми суммами четырехмерного и трехмерного слагаемых. Четыре из этих восьми типов – алгебры $\mathfrak{r}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{sl}(2)$ $(k = 1, \dots, 4)$, рассматриваемые в тексте. Еще четыре типа составляют алгебры $\mathfrak{s}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{su}(2)$ $(k = 1, \dots, 4)$ с теми же четырехмерными слагаемыми $\mathfrak{h}_k$, что и в первом случае. Изучение орбит алгебр $\mathfrak{s}_k$ автором в настоящее время еще не завершено.

Для построения описания всех невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр $\mathfrak{r}_k$ $(k = 1, \dots, 4)$ используется техника реализаций абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей на однородных многообразиях (см. [16]), развивающая идеи Э. Картана из работы [1].

Основной результат данной статьи содержится в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Пусть p – центр ростка вещественно-аналитической гиперповерхности M в $\mathbb{C}^4$, а $g(M)$ – 7-мерная алгебра ростков голоморфных векторных полей на M, имеющая в p полный ранг. Если $g(M)$ и $\mathfrak{r}_1$ изоморфны как алгебры Ли, то M может быть только вырожденной по Леви. Невырожденными по Леви 7-мерными орбитами* *алгебр $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ являются (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) лишь поверхности из следующих семейств:*

$$\mathfrak{r}_2: \qquad y_4 = y_3(y_1 + \ln y_3 + A \ln y_2), \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3: \qquad y_4 = A \ln y_1 - \ln\left(y_2 \pm y_3^2\right), \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1.2}$$

$$(y_4 \pm y_3^2)y_2 + y_1 = A|z_1|, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{r}_4: \qquad y_2 = |z_1||y_3 + iy_4|^A e^{B \arg(y_3 + iy_4)}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tag{1.4}$$

$$(x_1 - y_2 y_4)^2 + (y_1 - y_3 y_4)^2 = (1 - A)|z_1|^2, \quad A < 1, \quad A \neq 0, \tag{1.5}$$

$$y_1 y_4 + x_1 y_3 = |z_1|^2 (\ln y_2 + A \arg z_1), \quad A \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 – переменные в $\mathbb{C}^4$, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $k = 1, \ldots, 4$.

Замечание 1.1. *Уравнения (1.2) и (1.3) в приведенном списке связываются сразу с двумя семействами алгебр $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$. Такая запись означает, что каждое из семейств гиперповерхностей, задаваемых уравнениями (1.2) и (1.3), является орбитой $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}_3$ одновременно. Совпадение орбит двух разных алгебр Ли – нередкое явление (см., например,* [7]*) в том случае, когда эти алгебры являются подалгебрами полной алгебры $g(M)$ для исходной орбиты. Именно так обстоит дело с поверхностями (1.2) и (1.3), для каждой из которых размерность $g(M)$ оказывается большей, чем равная 7 размерность каждой из алгебр семейств $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$.*

Отметим, что гиперповерхности, задаваемые уравнениями (1.1), (1.2), относятся (а (1.4) – сводятся) к трубчатым многообразиям. Поверхности из семейств (1.3), (1.5), (1.6), предположительно, могут сводиться к трубкам лишь при отдельных значениях параметров. Однако, в целом, вопрос о такой сводимости достаточно сложен и требует отдельного рассмотрения. Важным свойством гиперповерхностей является также их сферичность, то есть локальная эквивалентность сфере или ее аналогам. Пример изучения вопроса о сферичности гиперповерхностей из одного полученного семейства приводится в последнем разделе статьи.

Замечание 1.2. *Вопрос о возможной эквивалентности однородных гиперповерхностей (1.1)–(1.6) друг другу при отдельных значениях параметров A и B требует специального изучения и в настоящей работе не рассматривается.*

2. Голоморфные реализации алгебр Ли

Известно несколько подходов к построению классификаций голоморфно однородных гиперповерхностей. Например, однородные гиперповерхности можно описывать с помощью нормальных (канонических) уравнений Мозера (см. [17]), то есть конечными наборами тейлоровских коэффициентов из определяющих эти гиперповерхности уравнений. Таким способом, например, были получены некоторые из упомянутых выше фрагментов классификации в $\mathbb{C}^3$ ([3], [4]). Другой подход связан с использованием для описания гиперповерхностей действующих на них групп и соответствующих им алгебр Ли. В работе [16] была продемонстрирована техника получения голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ на основе построения голоморфных реализаций абстрактных алгебр Ли. С помощью этого подхода была получена значительная часть результатов, составивших классификацию голоморфно однородных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ (см. [6], [7], [15]). Следует отметить, что иногда полезным оказывается и одновременное применение двух упомянутых выше подходов (см., например, [18]).

Рассмотрим подробнее технику построения голоморфных реализаций алгебр Ли, которая далее будет использована для доказательства теоремы 1.1.

Определение 2.1. *Вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ называется голоморфно однородной в точке $p \in M$, если существует алгебра Ли касательных к M голоморфных векторных полей, имеющая ранг 7 в окрестности точки p.*

Выберем некоторую вещественную семимерную алгебру Ли, заданную своими коммутационными соотношениями.

С выбранной нами семимерной алгеброй Ли свяжем набор из семи ростков (с центром в некоторой точке $p \in \mathbb{C}^4$) голоморфных векторных полей

$$\begin{aligned} e_k =& a_k(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + b_k(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} \\ &+ c_k(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_3} + d_k(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad k = 1, \dots, 7, \end{aligned} \tag{2.1}$$

линейно независимых над $\mathbb{R}$. В краткой записи,

$$e_k = (a_k, b_k, c_k, d_k)\,, \quad k = 1, \dots, 7,$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – ростки голоморфных (в точке p) функций комплексных переменных z_1, z_2, z_3, z_4. Вещественные и мнимые части переменных z_j в дальнейшем будем обозначать, соответственно, через x_j и y_j $(j = 1, \dots, 4)$.

Определение 2.2. *Алгебру Ли g голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ назовем голоморфной реализацией абстрактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если коммутационные соотношения у этих двух алгебр совпадают.*

Коммутатор двух полей $[e_k, e_j]$ вычисляется следующим общеизвестным образом:

$$[e_k, e_j] = \left(a_k\frac{\partial e_j}{\partial z_1} + b_k\frac{\partial e_j}{\partial z_2} + c_k\frac{\partial e_j}{\partial z_3} + d_k\frac{\partial e_j}{\partial z_4}\right) - \left(a_j\frac{\partial e_k}{\partial z_1} + b_j\frac{\partial e_k}{\partial z_2} + c_j\frac{\partial e_k}{\partial z_3} + d_j\frac{\partial e_k}{\partial z_4}\right).$$

Используя голоморфные преобразования, функциональные коэффициенты полей (2.1), связанных с алгеброй Ли, можно изменять и приводить к более «простому» виду (например, под простым здесь можно понимать поле, у которого один или больше коэффициентов равны нулю или после преобразования зависят от меньшего числа переменных, чем до выполнения преобразования). В частности, справедливо следующее утверждение (см., например, [12]).

Лемма 2.1. *Если на невырожденной по Леви гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ имеется пара ростков коммутирующих голоморфных векторных полей e_j и e_k, линейно независимых над $\mathbb{R}$, то эта пара может быть выпрямлена, то есть приведена к виду*

$$e_j = (0, 0, 0, 1), \quad e_k = (0, 0, 1, 0).$$

Упрощение даже двух полей до вида, указанного в лемме 2.1, приводит к значительным упрощениям и остальных полей за счет коммутационных связей полей друг с другом. Рассматривая при необходимости ряд подслучаев, связанных с равенством или неравенством нулю некоторых компонент векторных полей, мы в итоге приводим базис рассматриваемой алгебры Ли к виду, удобному для дальнейшего интегрирования (то есть получения по алгебре голоморфных векторных полей уравнения поверхности, которой она касается). При этом требуется еще учитывать и ранг системы векторных полей, который должен равняться семи, что значительно сужает количество требующих рассмотрения подслучаев.

Для алгебр векторных полей справедливо также следующее свойство, являющееся обобщением на случай $\mathbb{C}^4$ утверждений, приведенных в [16], [19].

Лемма 2.2. *Пусть в алгебре голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеется четверка линейно независимых векторных полей, три из которых имеют вид*

$$e_1 = (0,0,0,1), \quad e_2 = (0,0,1,0), \quad e_3 = (0,1,0,0).$$

Если компоненты четвертого поля с точностью до слагаемых $\varphi_k(z_1)$, $(k = 1,2,3,4)$ являются линейными функциями остальных переменных, то голоморфной заменой координат это поле освобождается от всех $\varphi_k(z_1)$. При этом выпрямленный вид первой тройки полей и линейные компоненты поля e_4 сохраняются.

Напомним, что в данной работе мы интересуемся только невырожденными по Леви голоморфно однородными гиперповерхностями. В связи с этим приведем два утверждения, которые в ряде случаев позволяют по виду векторных полей делать вывод о вырожденности соответствующих гиперповерхностей (эти утверждения легко переносятся на случай $\mathbb{C}^4$ со случая $\mathbb{C}^3$ (см. [7]) и потому приводятся здесь без доказательства).

Лемма 2.3. *Пусть заданы росток (с центром в точке p) вещественно-аналитической гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ и 7-мерная алгебра $g(M)$ ростков касательных к M голоморфных векторных полей, имеющая в точке p ранг 7. Если шесть базисных голоморфных полей указанной алгебры имеют нулевой коэффициент при одном и том же операторе $\frac{\partial}{\partial z_k}$, то гиперповерхность M вырождена по Леви.*

Лемма 2.4. *Пусть заданы росток (с центром в точке p) вещественно-аналитической гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ и 7-мерная алгебра $g(M)$ ростков касательных к M голоморфных векторных полей, имеющая в точке p ранг 7. Если четверка базисных голоморфных полей указанной алгебры имеет (с точностью до переобозначения переменных и перенумерации полей) вид*

$$e_j = (0,0,c_j(z_1,z_2,z_3,z_4), d_j(z_1,z_2,z_3,z_4)), \quad j = 1,\dots,4,$$

то гиперповерхность M вырождена по Леви.

3. Голоморфные реализации разложимых 7-мерных алгебр Ли с $\mathfrak{sl}(2)$-подалгеброй

При использовании описанной выше техники голоморфных реализаций для построения классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$ необходимо рассматривать, в частности, все 7-мерные алгебры Ли. Однако, в отличие от случая $\mathbb{C}^3$, где рассматривались 5-мерные алгебры, полного списка алгебр Ли, имеющих размерность 7, не существует. На данный момент известны описания алгебр Ли вплоть до размерности 6 (см. [20]), причем, если 5-мерных алгебр насчитывается лишь несколько десятков (см. [20], [21]), то список 6-мерных алгебр содержит уже сотни представителей. Классификация 7-мерных алгебр Ли, очевидно, будет еще более объемной. В связи с этим естественно изучать отдельные классы 7-мерных алгебр Ли, ориентируясь на опыт описания голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$.

Для доказательства теоремы 1.1 будем строить голоморфные реализации четырех 7-мерных разложимых алгебр Ли (являющихся прямыми суммами 3-мерной алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и нескольких 4-мерных алгебр), определяемых следующими коммутационными соотношениями:

Таблица 3.1

	$[e_1,e_2]$	$[e_1,e_3]$	$[e_2,e_3]$	$[e_4,e_6]$	$[e_4,e_7]$	$[e_5,e_6]$	$[e_5,e_7]$	$[e_6,e_7]$
$\mathfrak{r}_1$	e_1	$2e_2$	e_3		$2e_4$	e_4	e_5	e_5+e_6
$\mathfrak{r}_2$	e_1	$2e_2$	e_3		$(h+1)e_4$	e_4	e_5	he_6
$\mathfrak{r}_3$	e_1	$2e_2$	e_3		$2pe_4$	e_4	pe_5-e_6	e_5+pe_6
$\mathfrak{r}_4$	e_1	$2e_2$	e_3	e_4	$-e_5$	e_5	e_4	

Везде в этой таблице $|h| \leqslant 1$, $p \geqslant 0$.

Отметим, что максимальная размерность абелевых подалгебр для всех алгебр $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_4$ равна трем.

Будем строить голоморфные реализации для каждой из указанных алгебр, считая, что их базисные поля имеют вид

$$e_j = (a_j(z_1,z_2,z_3,z_4), b_j(z_1,z_2,z_3,z_4), c_j(z_1,z_2,z_3,z_4), d_j(z_1,z_2,z_3,z_4)), \quad j=1,\dots,7.$$

Изучение коммутационных соотношений для алгебр $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_4$ позволяет провести некоторые предварительные упрощения векторных полей, одинаковые для всех алгебр из списка.

Лемма 3.1. *Любая голоморфная реализация алгебр $\mathfrak{r}_1,\dots,\mathfrak{r}_4$, имеющая невырожденные по Леви интегральные гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, сводится (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) к алгебрам с базисами следующих видов:*

$$\begin{array}{rcl} e_1 &=& (0,1,0,0),\\ e_2 &=& (a_2(z_1), z_2+b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)),\\ e_3 &=& (2a_2(z_1)z_2+a_3(z_1), z_2^2+2b_2(z_1)z_2+b_3(z_1),\\ && 2c_2(z_1)z_2+c_3(z_1), 2d_2(z_1)z_2+d_3(z_1)),\\ e_4 &=& (0,0,0,1),\\ e_5 &=& (0,0,1,0),\\ e_6 &=& (a_6(z_1,z_3,z_4), b_6(z_1,z_3,z_4), c_6(z_1,z_3,z_4), d_6(z_1,z_3,z_4)),\\ e_7 &=& (a_7(z_1,z_3,z_4), b_7(z_1,z_3,z_4), c_7(z_1,z_3,z_4), d_7(z_1,z_3,z_4)). \end{array} \tag{3.1}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1, два (коммутирующих) векторных поля из семи для каждой алгебры можно выпрямить. Будем считать далее, что

$$e_4 = (0,0,0,1), \quad e_5 = (0,0,1,0).$$

Соотношения $[e_1,e_4]=0$, $[e_2,e_4]=0$, $[e_3,e_4]=0$ приводят к равенствам

$$\left(-\frac{\partial a_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial b_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial c_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial d_j}{\partial z_4}\right) = (0,0,0,0), \quad j=1,2,3,$$

из которых следует, что функциональные коэффициенты полей e_1, e_2, e_3 не зависят от переменной z_4.

Аналогично, используя равенства $[e_1,e_5]=0$, $[e_2,e_5]=0$, $[e_3,e_5]=0$, получаем

$$\left(-\frac{\partial a_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial b_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial c_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial d_j}{\partial z_3}\right) = (0,0,0,0), \quad j=1,2,3.$$

Следовательно, функциональные коэффициенты полей e_1, e_2, e_3 не зависят и от переменной z_3.

Согласно лемме 2.4, для невырожденных по Леви интегральных гиперповерхностей выполняется (в некоторой точке) хотя бы одно из двух неравенств

$$(a_k(z_1,z_2), b_k(z_1,z_2)) \not\equiv (0,0) \quad (k=1,2).$$

Не ограничивая общности рассмотрения, будем считать, что $(a_1(z_1,z_2), b_1(z_1,z_2)) \not\equiv (0,0)$. Тогда поле e_1 можно привести к виду

$$e_1 = (0,1,0,0).$$

С учетом упрощенного вида поля e_1, соотношения $[e_1,e_6] = 0$, $[e_1,e_7] = 0$ приводят к равенствам

$$\left(\frac{\partial a_6}{\partial z_2}, \frac{\partial b_6}{\partial z_2}, \frac{\partial c_6}{\partial z_2}, \frac{\partial d_6}{\partial z_2}\right) = (0,0,0,0),$$
$$\left(\frac{\partial a_7}{\partial z_2}, \frac{\partial b_7}{\partial z_2}, \frac{\partial c_7}{\partial z_2}, \frac{\partial d_7}{\partial z_2}\right) = (0,0,0,0).$$

Отсюда следует, что функциональные коэффициенты полей e_6, e_7 не зависят от переменной z_2.

Кроме того, так как $[e_1,e_2] = e_1$, то

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial z_2}, \frac{\partial b_2}{\partial z_2}, \frac{\partial c_2}{\partial z_2}, \frac{\partial d_2}{\partial z_2}\right) = (0,1,0,0),$$

из которого получаем следующий вид поля e_2:

$$e_2 = (a_2(z_1), z_2 + b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)).$$

Соотношение $[e_1,e_3] = 2e_2$ с учетом полученных упрощений дает равенство

$$\left(\frac{\partial a_3}{\partial z_2}, \frac{\partial b_3}{\partial z_2}, \frac{\partial c_3}{\partial z_2}, \frac{\partial d_3}{\partial z_2}\right) = (2a_2(z_1), 2z_2 + 2b_2(z_1), 2c_2(z_1), 2d_2(z_1)),$$

которое и позволяет привести поле e_3 к виду, выписанному в формулировке леммы.

Покажем теперь, что случай, когда $(a_1,b_1) \equiv (0,0)$, приводит к противоречию.

Пусть в некоторой точке поверхности $(a_1(z_1,z_2), b_1(z_1,z_2)) \equiv (0,0)$. Как было отмечено выше, в этом случае обязательно выполняется неравенство $(a_2(z_1,z_2), b_2(z_1,z_2)) \not\equiv (0,0)$. Следовательно, поле e_2 можно привести к виду

$$e_2 = (0,1,0,0).$$

Таким образом, поля e_1, e_2 и e_3 запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0,0,c_1(z_1,z_2), d_1(z_1,z_2))\,, \\ e_2 &= (0,1,0,0)\,, \\ e_3 &= (a_3(z_1,z_2), b_3(z_1,z_2), c_3(z_1,z_2), d_3(z_1,z_2))\,. \end{aligned}$$

Согласно коммутационным соотношениям алгебры, должно выполняться равенство $[e_1,e_3] = 2e_2$. Однако две первые компоненты в коммутаторе $[e_1,e_3]$ будут нулевыми, в то время как две первые компоненты поля e_2 имеют вид $(0,2)$. Следовательно, случай $(a_1,b_1) \equiv (0,0)$ невозможен.

Лемма доказана. □

Таким образом, будем считать, что набор из семи полей для каждой из алгебр $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_4$ имеет начальный вид (3.1).

Замечание 3.1. *Везде далее в записях коэффициентов векторных полей символами A_k, B_k, C_k, D_k ($k = 1, \ldots, 7$) обозначены комплексные константы.*

3.1. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{r}_1$. Из коммутационных соотношений $[e_4, e_6] = 0$, $[e_4, e_7] = 2e_4$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_5, e_7] = e_5$ получаем:

$$\left(\frac{\partial a_6}{\partial z_4}, \frac{\partial b_6}{\partial z_4}, \frac{\partial c_6}{\partial z_4}, \frac{\partial d_6}{\partial z_4}\right) = (0,0,0,0),$$
$$\left(\frac{\partial a_7}{\partial z_4}, \frac{\partial b_7}{\partial z_4}, \frac{\partial c_7}{\partial z_4}, \frac{\partial d_7}{\partial z_4}\right) = (0,0,0,2),$$
$$\left(\frac{\partial a_6}{\partial z_3}, \frac{\partial b_6}{\partial z_3}, \frac{\partial c_6}{\partial z_3}, \frac{\partial d_6}{\partial z_3}\right) = (0,0,0,1),$$
$$\left(\frac{\partial a_7}{\partial z_3}, \frac{\partial b_7}{\partial z_3}, \frac{\partial c_7}{\partial z_3}, \frac{\partial d_7}{\partial z_3}\right) = (0,0,1,0).$$

Эти равенства позволяют привести поля e_6 и e_7 к виду

$$e_6 = (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1)),$$
$$e_7 = (a_7(z_1), b_7(z_1), z_3 + c_7(z_1), 2z_4 + d_7(z_1)).$$

Дальнейшее построение голоморфных реализаций алгебры $\mathfrak{r}_1$ требует рассмотрения ряда случаев.

Случай 1. Пусть $a_2(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_2 в наборе (3.1) можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Из равенств $[e_2, e_6] = 0$, $[e_2, e_7] = 0$ получаем соотношения:

$$(a_6'(z_1), b_6'(z_1) - b_6(z_1), c_6'(z_1), d_6'(z_1)) = (0,0,0,0),$$
$$(a_7'(z_1), b_7'(z_1) - b_7(z_1), c_7'(z_1), d_7'(z_1)) = (0,0,0,0).$$

Отсюда

$$a_6(z_1) = A_6, \quad b_6(z_1) = B_6 e^{z_1}, \quad c_6(z_1) = C_6, \quad d_6(z_1) = D_6,$$
$$a_7(z_1) = A_7, \quad b_7(z_1) = B_7 e^{z_1}, \quad c_7(z_1) = C_7, \quad d_7(z_1) = D_7.$$

Из равенства $[e_6, e_7] = e_5 + e_6$ получаем

$$(0, e^{z_1}(A_6B_7 - A_7B_6), C_6, z_3 - C_7 + 2D_6) = (A_6, B_6e^{z_1}, 1 + C_6, z_3 + D_6).$$

Сравнивая третьи компоненты слева и справа, приходим к равенству

$$C_6 = 1 + C_6.$$

Таким образом, случай 1 приводит к противоречию.

Случай 2. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \not\equiv 0$. Тогда в наборе (3.1) с учетом упрощенных полей e_6, e_7 можно получить

$$e_2 = (0, z_2 + b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)),$$
$$e_6 = (1, 0, 0, z_3).$$

Из равенства $[e_2, e_6] = 0$ получаем

$$(0, -b_2'(z_1), -c_2'(z_1), -d_2'(z_1) + c_2(z_1)) = (0,0,0,0).$$

Отсюда

$$b_2(z_1) = B_2, \quad c_2(z_1) = C_2, \quad d_2(z_1) = C_2z_1 + D_2.$$

Соотношение $[e_2, e_7] = 0$ приводит к следующему равенству:

$$(0, -b_7(z_1), C_2, -a_7(z_1)C_2 + 2C_2z_1 + 2D_2) = (0,0,0,0).$$

Получаем, что $C_2 = 0$, $D_2 = 0$.

Таким образом, поля e_1 и e_2 примут вид

$$e_1 = (0, 1, 0, 0)\,,$$
$$e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, 0)\,,$$

который невозможен для невырожденной гиперповерхности.

Случай 3. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \equiv 0$, $a_7(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_7 можно привести к виду

$$e_7 = (1, 0, z_3, 2z_4)\,.$$

Соотношение $[e_2, e_3] = e_3$ позволяет сразу сделать вывод о вырожденности гиперповерхностей в данном случае. Действительно, первая компонента коммутатора $[e_2, e_3]$ равна нулю, в то время как первая компонента поля e_3 равна $a_3(z_1)$. Таким образом, $a_3(z_1) \equiv 0$, и все первые компоненты полей $e_1, \ldots, e_6$ будут нулевыми, что дает вырожденность согласно лемме 2.3.

Таким образом, можно сделать вывод, что алгебра $\mathfrak{r}_1$ не имеет невырожденных голоморфных реализаций.

3.2. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{r}_2$. Здесь имеем коммутационные соотношения $[e_4, e_6] = 0$, $[e_4, e_7] = (h+1)e_4$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_5, e_7] = e_5$. Из них по аналогии с предыдущим случаем получим упрощенный вид полей e_6 и e_7:

$$e_6 = (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1))\,,$$
$$e_7 = (a_7(z_1), b_7(z_1), z_3 + c_7(z_1), (h+1)z_4 + d_7(z_1))\,.$$

Случай 1. Пусть $a_2(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_2 можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0)\,.$$

Из равенств $[e_2, e_6] = 0$, $[e_2, e_7] = 0$ получаем

$$(a_6'(z_1), b_6'(z_1) - b_6(z_1), c_6'(z_1), d_6'(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$
$$(a_7'(z_1), b_7'(z_1) - b_7(z_1), c_7'(z_1), d_7'(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

откуда следует, что

$$a_6(z_1) = A_6, b_6(z_1) = B_6 e^{z_1}, c_6(z_1) = C_6, d_6(z_1) = D_6,$$
$$a_7(z_1) = A_7, b_7(z_1) = B_7 e^{z_1}, c_7(z_1) = C_7, d_7(z_1) = D_7.$$

Соотношение $[e_2, e_3] = e_3$ приводит к равенству

$$\big(a_3'(z_1) + 2z_2, z_2^2 - b_3(z_1) + b_3'(z_1), c_3'(z_1), d_3'(z_1)\big) = (2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)),$$

из которого получаем упрощенный вид поля e_3:

$$a_3(z_1) = A_3 e^{z_1}, \quad b_3(z_1) = B_3 e^{2z_1}, \quad c_3(z_1) = C_3 e^{z_1}, \quad d_3(z_1) = D_3 e^{z_1}.$$

Рассмотрение оставшихся соотношений $[e_3, e_6] = 0$, $[e_3, e_7] = 0$, $[e_6, e_7] = he_6$ позволяет получить следующую систему уравнений, связывающую коэффициенты полей и параметр алгебры h:

$$\begin{gathered}
A_3A_6 + 2B_6 = 0, \quad A_3B_6 - 2A_6B_3 = 0, \quad A_6C_3 = 0, \quad A_6D_3 - C_3 = 0,\\
A_3A_7 + 2B_7 = 0, \quad A_3B_7 - 2A_7B_3 = 0, \quad C_3(A_7 - 1) = 0,\\
D_3(A_7 - h - 1) = 0, \quad hA_6 = 0, \quad A_6B_7 - A_7B_6 - B_6h = 0,\\
C_6(h-1) = 0, \quad D_6 - C_7 = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Эта система имеет восемь решений, при этом только три из них (выписанных ниже) дают базисы алгебры голоморфных векторных полей, соответствующие невырожденным гиперповерхностям.

а) Решение системы (3.2):

$$B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = -\frac{1}{2}A_3A_6, \quad B_7 = -\frac{1}{2}A_3A_7,$$
$$C_3 = 0, \quad C_6 = 0, \quad C_7 = D_6, \quad D_3 = 0, \quad h = 0.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_2 &= (1,z_2,0,0)\,,\\
e_3 &= \left(2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, 0\right),\\
e_4 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_5 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_6 &= \left(A_6, -\frac{1}{2}A_3A_6e^{z_1}, 0, z_3 + D_6\right),\\
e_7 &= \left(A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7e^{z_1}, z_3 + D_6, z_4 + D_7\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

б) Решение системы (3.2):

$$A_6 = 0, \quad A_7 = 2, \quad B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -A_3, \quad C_3 = 0, \quad C_7 = D_6, \quad h = 1.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_2 &= (1,z_2,0,0)\,,\\
e_3 &= \left(2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, D_3e^{z_1}\right),\\
e_4 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_5 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_6 &= (0,0,C_6,z_3 + D_6)\,,\\
e_7 &= (2, -A_3e^{z_1}, z_3 + D_6, 2z_4 + D_7)\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

в) Решение системы (3.2):

$$A_6 = 0, \quad B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -\frac{1}{2}A_3A_7, \quad C_3 = 0, \quad C_7 = D_6, \quad D_3 = 0, \quad h = 1.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_2 &= (1,z_2,0,0)\,,\\
e_3 &= \left(2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, 0\right),\\
e_4 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_5 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_6 &= (0,0,C_6,z_3 + D_6)\,,\\
e_7 &= \left(A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7e^{z_1}, z_3 + D_6, 2z_4 + D_7\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Случай 2. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_6 можно привести к виду
$$e_6 = (1, 0, 0, z_3)\,.$$
Из соотношений $[e_2, e_6] = 0$, $[e_3, e_6] = 0$, $[e_6, e_7] = he_6$ получим равенства
$$\begin{gathered}(0, -b_2'(z_1), -c_2'(z_1), -d_2'(z_1) + c_2(z_1)) = (0, 0, 0, 0),\\ (-a_3'(z_1), -b_3'(z_1), -c_3'(z_1), -d_3'(z_1) + c_3(z_1)) = (0, 0, 0, 0),\\ (a_7'(z_1), b_7'(z_1), c_7'(z_1), z_3h - c_7(z_1) + d_7'(z_1)) = (h, 0, 0, hz_3).\end{gathered}$$
Решение этих уравнений позволяет упростить вид полей e_2, e_3 и e_7:
$$\begin{aligned}&e_2 = (0, z_2 + B_2, C_2, C_2z_1 + D_2)\,,\\ &e_3 = \big(A_3, z_2^2 + 2B2z_2 + B_3, 2C_2z_2 + C_3, 2(C_2z_1 + D_2)z_2 + C_3z_1 + D_3\big)\,,\\ &e_7 = (hz_1 + A_7, B_7, z_3 + C_7, (h+1)z_4 + C_7z_1 + D_7)\,.\end{aligned}$$
Коммутационное соотношение $[e_2, e_7] = 0$ для преобразованных полей даст равенство
$$(0, -B_7, C_2, C_2z_1 + D_2h + D_2 - A_7C_2) = (0, 0, 0, 0),$$
из которого следует, что
$$B_7 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_2(h+1) = 0.$$
При $C_2 = 0$ поле e_2 примет вид $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, D_2)$ и, если допустить, что $D_2 = 0$, мы получим поле вида $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, 0)$, которое при наличии $e_1 = (0, 1, 0, 0)$ даст вырожденность гиперповерхности. Поэтому случай $D_2 = 0$ невозможен и, следовательно, должно выполняться $h = -1$.

Запишем теперь в развернутом виде соотношение $[e_3, e_7] = 0$:
$$(-A_3, 0, C_3, A_3C_7 - C_3A_7 + C_3z_1) = (0, 0, 0, 0).$$
Получаем, что $A_3 = 0$ и $C_3 = 0$. Таким образом, все первые и третьи компоненты в полях $e_1, \ldots, e_4$ равны нулю, что, согласно лемме 2.4, означает вырожденность гиперповерхности.

Случай 3. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \equiv 0$ и при этом $a_7(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_7 можно привести к виду
$$e_7 = (1, 0, z_3, (h+1)z_4).$$
Первая компонента в коммутаторе $[e_2, e_3]$, очевидно, будет равна нулю, при этом должно выполняться равенство $[e_2, e_3] = e_3$. Так как первая компонента поля e_3 равна $a_3(z_1)$, то необходимо, чтобы $a_3(z_1) = 0$. Однако в таком случае все первые компоненты полей $e_1, \ldots, e_6$ будут нулевыми, что означает вырожденность гиперповерхности по лемме 2.3.

3.3. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{r}_3$.

Здесь из коммутационных соотношений $[e_4, e_6] = 0$, $[e_4, e_7] = 2pe_4$, $[e_5, e_6] = e_4$ получаем
$$\begin{aligned}&e_6 = (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1))\,,\\ &e_7 = (a_7(z_1, z_3), b_7(z_1, z_3), c_7(z_1, z_3), 2pz_4 + d_7(z_1, z_3))\,.\end{aligned}$$
Запишем теперь в развернутом виде соотношение $[e_5, e_7] = pe_5 - e_6$:
$$\left(\frac{\partial a_7}{\partial z_3}, \frac{\partial b_7}{\partial z_3}, \frac{\partial c_7}{\partial z_3}, \frac{\partial d_7}{\partial z_3}\right) = (-a_6(z_1), -b_6(z_1), p - c_6(z_1), -z_3 - d_6(z_1)).$$
Получаем отсюда следующий вид поля e_7:
$$\begin{aligned}e_7 = \Big(& -a_6(z_1)z_3 + a_7(z_1), -b_6(z_1)z_3 + b_7(z_1)\,,\\ & pz_3 - c_6(z_1)z_3 + c_7(z_1), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - d_6(z_1)z_3 + d_7(z_1)\Big)\,.\end{aligned}$$

Случай 1. Пусть $a_2(z_1) \not\equiv 0$, тогда поле e_2 можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0)\,.$$

Из соотношения $[e_2, e_6] = 0$ получаем равенство

$$(a_6'(z_1), b_6'(z_1) - b_6(z_1), c_6'(z_1), d_6'(z_1)) = (0,0,0,0),$$

которое позволяет упростить вид полей e_6 и e_7:

$$\begin{aligned} e_6 &= (A_6, B_6 e^{z_1}, C_6, z_3 + D_6)\,,\\ e_7 &= \Big(- A_6 z_3 + a_7(z_1), -B_6 e^{z_1} z_3 + b_7(z_1)\,,\\ &\quad pz_3 - C_6 z_3 + c_7(z_1), 2pz_4 - \frac{1}{2} z_3^2 - D_6 z_3 + d_7(z_1)\Big)\,. \end{aligned}$$

В результате соотношение $[e_2, e_7] = 0$ даст равенство

$$(a_7'(z_1), b_7'(z_1) - b_7(z_1), c_7'(z_1), d_7'(z_1)) = (0,0,0,0),$$

из которого найдем коэффициенты поля e_7. В итоге получим

$$\begin{aligned} e_7 = \Big(&- A_6 z_3 + A_7, -B_6 e^{z_1} z_3 + B_7 e^{z_1}\,,\\ &pz_3 - C_6 z_3 + C_7, 2pz_4 - \frac{1}{2} z_3^2 - D_6 z_3 + D_7\Big)\,. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь соотношением $[e_2, e_3] = e_3$:

$$\big(a_3'(z_1) + 2z_2, z_2^2 - b_3(z_1) + b_3'(z_1), c_3'(z_1), d_3'(z_1)\big) = \big(2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)\big)\,.$$

Отсюда

$$e_3 = \big(2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 + B_3 e^{2z_1}, C_3 e^{z_1}, D_3 e^{z_1}\big)\,.$$

Оставшиеся равенства $[e_3, e_6] = 0$, $[e_3, e_7] = 0$, $[e_6, e_7] = e_5 + pe_6$ приводят к системе уравнений, аналогичной системе (3.2). Часть решений этой системы, как и в случае (3.2), отвечает алгебрам, имеющим только вырожденные орбиты. Приведем здесь лишь решения, которые порождают более интересные для нас алгебры, допускающие невырожденные по Леви орбиты.

а) $A_6 = 0$, $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$, $B_6 = 0$, $B_7 = -\frac{1}{2}A_3 A_7$, $C_3 = 0$, $C_6 = \pm i$, $C_7 = D_6(p \mp i)$, $D_3 = 0$.

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0,1,0,0)\,,\\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0)\,,\\ e_3 &= \left(2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2 e^{2z_1}, 0, 0\right),\\ e_4 &= (0,0,0,1)\,,\\ e_5 &= (0,0,1,0)\,,\\ e_6 &= (0,0,\pm i, z_3 + D_6)\,,\\ e_7 &= \left(A_7, -\frac{1}{2}A_3 A_7 e^{z_1}, (z_3 + D_6)(p \mp i), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - D_6 z_3 + D_7\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

б) $A_6 = 0$, $A_7 = 2p$, $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$, $B_6 = 0$, $B_7 = -pA_3$, $C_3 = 0$, $C_6 = \pm i$, $C_7 = D_6(p \mp i)$.

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (0,1,0,0)\,,\\
&e_2 = (1, z_2, 0, 0)\,,\\
&e_3 = \left(2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, D_3e^{z_1}\right),\\
&e_4 = (0,0,0,1)\,,\\
&e_5 = (0,0,1,0)\,,\\
&e_6 = (0,0,\pm i, z_3 + D_6)\,,\\
&e_7 = \left(2p, -pA_3e^{z_1}, (z_3+D_6)(p\mp i), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - D_6z_3 + D_7\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Случай 2. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_6 можно привести к виду

$$e_6 = (1,0,0,z_3)\,.$$

Запишем в развернутом виде соотношения $[e_2, e_6] = 0$, $[e_6, e_7] = e_5 + pe_6$:

$$(0, -b_2'(z_1), -c_2'(z_1), -d_2'(z_1) + c_2(z_1)) = (0,0,0,0),$$
$$(a_7'(z_1), b_7'(z_1), c_7'(z_1), d_7'(z_1) - c_7(z_1) + pz_3) = (p, 0, 1, pz_3).$$

Решив выписанные уравнения, получим упрощенный вид полей e_2 и e_7:

$$\begin{aligned}
&e_2 = (0, z_2 + B_2, C_2, C_2z_1 + D_2)\,,\\
&e_7 = \left(pz_1 - z_3 + A_7, B_7, pz_3 + z_1 + C_7, 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_1^2 + C_7z_1 + D_7\right).
\end{aligned}$$

Используя теперь соотношение $[e_2, e_7] = 0$, получим

$$(-C_2, -B_7, pC_2, pC_2z_1 - A_7C_2 + 2pD_2) = (0,0,0,0),$$

откуда

$$C_2 = 0, \quad B_7 = 0, \quad pD_2 = 0.$$

Если допустить, что $D_2 = 0$, то получим $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, 0)$, что при наличии поля $e_1 = (0,1,0,0)$ возможно только в том случае, когда гиперповерхность вырождена. Значит можно считать, что $D_2 \neq 0$ и, следовательно, $p = 0$.

Из соотношения $[e_3, e_6] = 0$ получаем равенство

$$(-a_3'(z_1), -b_3'(z_1), -c_3'(z_1), -d_3'(z_1) + c_3(z_1)) = (0,0,0,0),$$

которое позволяет получить измененный вид поля e_3:

$$e_3 = \left(A_3, 2B_2z_2 + z_2^2 + B_3, C_3, C_3z_1 + 2D_2z_2 + D_3\right).$$

Используя равенство $[e_3, e_7] = 0$, записываемое в развернутом виде как

$$(-C_3, 0, A_3, A_3C_7 + A_3z_1 - C_3A_7) = (0,0,0,0),$$

получим, что $A_3 = C_3 = 0$, то есть

$$e_3 = \left(0, z_2^2 + 2B_2z_2 + B_3, 0, 2D_2z_2 + D_3\right).$$

Таким образом, в полях $e_1, \ldots, e_4$ все первые и третьи компоненты оказываются равными нулю, что означает вырожденность гиперповерхности по лемме 2.4.

Случай 3. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \equiv 0$ и при этом $a_7(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_7 можно привести к виду

$$e_7 = (1, -b_6(z_1)z_3, pz_3 - c_6(z_1)z_3, 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - d_6(z_1)z_3).$$

Для доказательства того, что в этом случае возможны только вырожденные гиперповерхности, заметим, что первая компонента в коммутаторе $[e_2, e_3]$ равна нулю, при этом первая компонента в поле e_3 равна $a_3(z_1)$. Так как должно выполняться равенство $[e_2, e_3] = e_3$, то необходимо, чтобы $a_3(z_1) = 0$, однако в этом случае все первые компоненты полей $e_1, \ldots, e_6$ оказывается нулевыми, что и дает вырожденность по лемме 2.3.

3.4. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{r}_4$. Разворачивая коммутационные соотношения $[e_4, e_6] = e_4$, $[e_4, e_7] = -e_5$, $[e_5, e_6] = e_5$, $[e_5, e_7] = e_4$, получим упрощенный вид полей e_6 и e_7:

$$\begin{aligned}
e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), z_3 + c_6(z_1), z_4 + d_6(z_1)),\\
e_7 &= (a_7(z_1), b_7(z_1), -z_4 + c_7(z_1), z_3 + d_7(z_1)).
\end{aligned}$$

Случай 1. Пусть $a_2(z_1) \not\equiv 0$. Тогда, используя голоморфные преобразования переменных, поле e_2 можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Соотношения $[e_2, e_6] = 0$, $[e_2, e_7] = 0$ приводят к равенствам

$$\begin{aligned}
(a_6'(z_1), b_6'(z_1) - b_6(z_1), c_6'(z_1), d_6'(z_1)) &= (0, 0, 0, 0),\\
(a_7'(z_1), b_7'(z_1) - b_7(z_1), c_7'(z_1), d_7'(z_1)) &= (0, 0, 0, 0),
\end{aligned}$$

из которых получаем

$$\begin{aligned}
e_6 &= (A_6, B_6 e^{z_1}, z_3 + C_6, z_4 + D_6),\\
e_7 &= (A_7, B_7 e^{z_1}, -z_4 + C_7, z_3 + D_7).
\end{aligned}$$

Еще одно соотношение $[e_2, e_3] = e_3$, приводящее к равенству

$$\left(a_3'(z_1) + 2z_2, b_3'(z_1) - b_3(z_1) + z_2^2, c_3'(z_1), d_3'(z_1)\right) = \left(2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)\right),$$

дает следующий вид поля e_3:

$$\left(2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 + B_3 e^{2z_1}, C_3 e^{z_1}, D_3 e^{z_1}\right).$$

Оставшиеся соотношения $[e_3, e_6] = 0$, $[e_3, e_7] = 0$, $[e_6, e_7] = 0$ и здесь приводят к достаточно объемной системе уравнений относительно коэффициентов полей e_3, e_6, e_7. Эта система имеет четыре решения, из которых три дают базисы алгебр голоморфных векторных полей, соответствующих невырожденным гиперповерхностям.

а) $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$, $B_6 = -\frac{1}{2}A_3 A_6$, $B_7 = -\frac{1}{2}A_3 A_7$, $C_3 = 0$, $C_6 = D_7$, $C_7 = -D_6$, $D_3 = 0$.

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 1, 0, 0),\\
e_2 &= (1, z_2, 0, 0),\\
e_3 &= \left(2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2 e^{2z_1}, 0, 0\right),\\
e_4 &= (0, 0, 0, 1),\\
e_5 &= (0, 0, 1, 0),\\
e_6 &= \left(A_6, -\frac{1}{2}A_3 A_6 e^{z_1}, z_3 + D_7, z_4 + D_6\right),\\
e_7 &= \left(A_7, -\frac{1}{2}A_3 A_7 e^{z_1}, -(z_4 + D_6), z_3 + D_7\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

б) Еще два решения, объединенных за счет знака «$\pm$»:

$$\begin{aligned}
&A_6 = 1, \quad A_7 = \pm i, \quad B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = -\frac{1}{2}A_3,\\
&B_7 = \mp\frac{i}{2}A_3, \quad C_3 = \pm iD_3, \quad C_6 = D_7, \quad C_7 = -D_6.
\end{aligned}$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (0, 1, 0, 0)\,,\\
&e_2 = (1, z_2, 0, 0)\,,\\
&e_3 = \left(2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, \pm iD_3e^{z_1}, D_3e^{z_1}\right),\\
&e_4 = (0, 0, 0, 1)\,,\\
&e_5 = (0, 0, 1, 0)\,,\\
&e_6 = \left(1, -\frac{1}{2}A_3e^{z_1}, z_3 + D_7, z_4 + D_6\right),\\
&e_7 = \left(\pm i, \mp\frac{i}{2}A_3e^{z_1}, -(z_4 + D_6), z_3 + D_7\right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Случай 2. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_6 можно привести к виду

$$e_6 = (1, 0, z_3, z_4)\,.$$

Используя соотношения $[e_2, e_6] = 0$, $[e_6, e_7] = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&(0, -b_2'(z_1), -c_2'(z_1) + c_2(z_1), -d_2'(z_1) + d_2(z_1)) = (0, 0, 0, 0),\\
&(a_7'(z_1), b_7'(z_1), c_7'(z_1) - c_7(z_1), d_7'(z_1) - d_7(z_1)) = (0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&e_2 = (0, z_2 + B_2, C_2e^{z_1}, D_2e^{z_1})\,,\\
&e_7 = (A_7, B_7, -z_4 + C_7e^{z_1}, z_3 + D_7e^{z_1})\,.
\end{aligned}$$

Коммутационное соотношение $[e_3, e_6] = 0$ приводит к равенству

$$(-a_3'(z_1), -b_3'(z_1), -c_3'(z_1) + c_3(z_1), -d_3'(z_1) + d_3(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

из которого получаем следующий вид поля e_3:

$$e_3 = \left(A_3, z_2^2 + 2B_2z_2 + B_3, (2C_2z_2 + C_3)e^{z_1}, (2D_2z_2 + DC_3)e^{z_1}\right).$$

Рассмотрение итоговых равенств $[e_2, e_3] = e_3$, $[e_2, e_7] = 0$, $[e_3, e_7] = 0$ приводит к трем допустимым наборам коэффициентов полей e_3, e_6, e_7. Из них только два (объединенных с использованием знака «$\pm$») дают базисы алгебр голоморфных векторных полей, допускающих невырожденные интегральные гиперповерхности.

Значения коэффициентов:

$$A_3 = 0, \quad A_7 = \pm i, \quad B_3 = B_2^2, \quad B_7 = 0, \quad C_2 = \pm iD_2, \quad C_3 = \pm 2iB_2D_2, \quad D_3 = 2B_2D_2.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (0, 1, 0, 0)\,,\\
&e_2 = (0, z_2 + B_2, \pm i D_2 e^{z_1}, D_2 e^{z_1})\,,\\
&e_3 = \left(0, (z_2 + B_2)^2, (\pm 2i D_2 z_2 \pm 2i B_2 D_2) e^{z_1}, 2 D_2 e^{z_1} (z_2 + B_2)\right),\\
&e_4 = (0, 0, 0, 1)\,,\\
&e_5 = (0, 0, 1, 0)\,,\\
&e_6 = (1, 0, z_3, z_4)\,,\\
&e_7 = (\pm i, 0, C_7 e^{z_1} - z_4, z_3 + D_7 e^{z_1})\,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Случай 3. Пусть $a_2(z_1) \equiv 0$, $a_6(z_1) \equiv 0$ и при этом $a_7(z_1) \not\equiv 0$. Тогда поле e_7 можно привести к виду

$$e_7 = (1, 0, -z_4, z_3).$$

Из соотношения $[e_2, e_6] = 0$ получим

$$(0, -b_6(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

откуда следует, что

$$e_2 = (0, z_2 + b_2(z_1), 0, 0).$$

Поле e_2 такого вида при наличии поля $e_1 = (0, 1, 0, 0)$ возможно только для вырожденных по Леви гиперповерхностей.

4. Получение уравнений гиперповерхностей

Следующим этапом после нахождения голоморфных реализаций алгебр Ли является получение их орбит. Для того чтобы вещественная гиперповерхность M, задаваемая уравнением $\Phi = 0$, была орбитой голоморфной реализации алгебры $\mathfrak{g}$, необходимо, чтобы для каждого базисного поля e_k этой алгебры выполнялось тождество

$$\mathrm{Re}\,\left(e_k\,(\Phi)|_M\right) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Таким образом, нахождение орбит голоморфных реализаций алгебр $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ сводится к решению систем уравнений в частных производных. Например, для одной из реализаций (3.6) требуется решить систему следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_2}\right) = 0, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_3}\right) = 0, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_4}\right) = 0,\\
&\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}\right) = 0,\\
&\mathrm{Re}\left(i \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} + (z_3 + D_6)\,\frac{\partial \Phi}{\partial z_4}\right) = 0,\\
&\mathrm{Re}\left((2z_2 + A_3 e^{z_1})\,\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \left(z_2^2 - \frac{A_3^2}{4} e^{2z_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z_2}\right) = 0,\\
&\mathrm{Re}\left(A_7 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \left(-\frac{A_3 A_7}{2} e^{z_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z_2} + (z_3 + D_6)\,(p - i)\frac{\partial \Phi}{\partial z_3}\right.\\
&\qquad \left. + \left(2p z_4 - D_6 z_3 - \frac{1}{2} z_3^2 - D_6 z_3 + D_7\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z_4}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что часто бывает удобно перед составлением системы уравнений сделать некоторые элементарные замены в коэффициентах полей. Например, в данном случае можно заменить e^{z_1} на z_1^*, что позволит работать с полностью полиномиальными компонентами полей (при этом в первых компонентах полей появится дополнительный множитель z_1^*, а остальные компоненты не изменятся). Уточним, что здесь и далее после каждого шага многоступенчатой замены переменных знак «$*$» опускается.

Первые три простейших равенства системы (4.2) при переходе к вещественным координатам позволяют сделать вывод о том, что определяющая функция гиперповерхности не зависит от переменных x_2, x_3, x_4. Решая (стандартными методами) остальные уравнения, получим после несложных итоговых голоморфных преобразований уравнение гиперповерхности

$$y_4 = A \ln y_1 - \ln \left(y_2 - y_3^2 \right). \tag{4.3}$$

Составляя и решая системы, подобные (4.2), можно получить все уравнения из теоремы 1.1. При этом могут возникать и вырожденные по Леви гиперповерхности, которые мы не рассматриваем.

Обсудим теперь кратко вопросы исследования некоторых свойств голоморфно однородных гиперповерхностей на примере уравнения (4.3). Мы применяем здесь метод нормальных форм Мозера [17].

Используя разложение в ряд Тейлора, представим уравнение невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ в виде

$$y_4 = H(z, \bar{z}) + \sum_{k,l \geqslant 2, m \geqslant 0} N_{klm}(z, \bar{z}) x_4^m, \tag{4.4}$$

где $H(z, \bar{z})$ – форма Леви гиперповерхности, содержащая эрмитовы слагаемые (линейные по переменным z и $\bar{z}$); $N_{klm}(z, \bar{z}, x_4)$ – однородные многочлены суммарных степеней k и l по переменным z и $\bar{z}$ соответственно ($z = (z_1, z_2, z_3)$). При этом многочлены N_{22k}, N_{32k}, N_{33k} удовлетворяют дополнительным ограничениям, называемым tr-условиями (см. [3], [4]).

Изучение младших слагаемых нормального уравнения (4.4) во многих случаях позволяет подтверждать или опровергать гипотезы о голоморфной эквивалентности различных гиперповерхностей. Например, известно, что однородная вещественно-аналитическая гиперповерхность в пространстве $\mathbb{C}^n$ является сферической тогда и только тогда, когда в ее нормальном уравнении Мозера слагаемое $N_{220}(z, \bar{z})$ тождественно равно нулю.

Покажем вычислительную процедуру проверки на сферичность на примере уравнения (4.3).

Сместимся в точку $(i, i, 0, 0)$ и выпишем разложение правой части уравнения

$$y_4 = A \ln(y_1 + 1) - \ln \left(y_2 + 1 - y_3^2 \right)$$

в ряд Тейлора до четвертой степени включительно (слагаемые нулевой и первой степеней, согласно процедуре нормализации, можно удалить):

$$y_4 = -\frac{1}{2} A y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + y_3^2 + \frac{1}{3} A y_1^3 - \frac{1}{3} y_2^3 - y_2 y_3^2 - \frac{1}{4} A y_1^4 + \frac{1}{4} y_2^4 + y_2^2 y_3^2 + \frac{1}{2} y_3^4 + \dots . \tag{4.5}$$

Перейдем к комплексным координатам и выпишем форму Леви данного уравнения:

$$H(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4} A |z_1|^2 + \frac{1}{4} |z_2|^2 + \frac{1}{2} |z_3|^2.$$

Как видно, при $A < 0$ данная форма будет положительно определенной (то есть гиперповерхность будет строго псевдовыпуклой), а при $A > 0$ получим знаконеопределенную (индефинитную) невырожденную форму. При $A = 0$ получаем вырожденную гиперповерхность. Рассмотрим далее случай $A < 0$.

Замена переменных

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{-A}} z_1^*, \quad z_2 = 2 z_2^*, \quad z_3 = \sqrt{2} z_3^*$$

приводит форму Леви к каноническому виду:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2.$$

После перехода к комплексным координатам и замены переменных разложение (4.5) примет вид (сгруппируем слагаемые по суммарным степеням входящих в данное выражение полиномов):

$$y_4 = \sum_{k+l\geqslant 2} F_{kl}(z,\bar z) = (F_{20}+F_{11}+F_{02}) + (F_{30}+F_{21}+F_{12}+F_{03}) + \ldots, \tag{4.6}$$

где k, l – степени соответствующих слагаемых по переменным z и $\bar z$ соответственно.

Согласно процедуре нормализации [17], с помощью голоморфной замены переменных можно удалить из уравнения (4.6) все слагаемые вида F_{k0}, F_{k1} (и, по симметрии, F_{0k}, F_{1k}). После выполнения указанных замен уравнение (4.6) примет вид

$$y_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + H_{22} + H_{32} + H_{23} + \ldots. \tag{4.7}$$

Для пересчета слагаемых при переходе от уравнения (4.6) к (4.7) можно воспользоваться обобщением формул, приведенных в работе [22]. В частности,

$$H_{22} = F_{22} - \langle f_2, f_2\rangle, \tag{4.8}$$

где F_{22} – слагаемое из уравнения (4.6), f_2 – вектор-функция, компонентами которой являются однородные полиномы второй степени относительно переменной z, вычисляемая из формулы $F_{21} = \langle f_2, z\rangle$. Здесь $\langle f, g\rangle = f^T H \bar g$, где f и g – вектор-функции, а H – матрица (эрмитовой) формы Леви.

Для рассматриваемого уравнения

$$F_{22} = -\frac{3}{2A} z_1^2\bar z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2\bar z_2^2 + \frac{1}{2} z_2^2\bar z_3^2 + 2 z_2\bar z_2 z_3\bar z_3 + \frac{1}{2} z_3^2\bar z_2^2 + \frac{3}{4} z_3^2\bar z_3^2,$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{-A}}{A} z_1^2 \\ \frac{i}{2}(2z_2^2 + z_3^2) \\ i z_2 z_3 \end{pmatrix},$$

$$\langle f_2, f_2\rangle = -\frac{1}{A} z_1^2\bar z_1^2 + z_2^2\bar z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2\bar z_2^2 + \frac{1}{2} z_2^2\bar z_3^2 + \frac{1}{4} z_3^2\bar z_3^2 + z_2 z_3\bar z_2\bar z_3.$$

По формуле (4.8) получаем

$$H_{22} = -\frac{1}{2A}|z_1|^4 + \frac{1}{2}|z_2|^4 + \frac{1}{2}|z_3|^4 + |z_2|^2|z_3|^2. \tag{4.9}$$

Полином H_{22} принадлежит 36-мерному пространству полиномов $\mathcal{F}_{22}$, которое раскладывается в прямую сумму 27-мерного пространства $\mathcal{N}_{22}$ и 9-мерного пространства $\mathcal{R}_{22}$, элементы которого делятся на форму $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$. При этом проекция H_{22} в пространство $\mathcal{N}_{22}$ – это в точности многочлен N_{220} из уравнения (4.4).

Указанное разложение для полинома (4.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{22} = {} & N_{220} + R_{220} = \frac{1}{40A}(A-1)(3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) \\ & + 3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) - (|z_2|^4 - 4|z_2|^2|z_3|^2 + |z_3|^4)) \\ & + \frac{1}{20A}\left(-(3A+7)|z_1|^2 + (9A+1)|z_2|^2 + (9A+1)|z_3|^2\right)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} N_{220} = {} & \frac{1}{40A}(A-1)(3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) \\ & + 3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) - (|z_2|^4 - 4|z_2|^2|z_3|^2 + |z_3|^4)). \end{aligned}$$

При $A < 0$ полином N_{220} не равен нулю, следовательно, гиперповерхность, описываемая уравнением (4.3), локально голоморфно не эквивалентна сфере.

Замечание 4.1. *Отметим, что при* $A = 1$ *обсуждаемое уравнение (4.3) можно переписать в виде*

$$y_1 = y_3^2 e^{y_4} + y_2 e^{y_4}.$$

Это уравнение описывает (см. [23], *формула 7 основной теоремы) индефинитную сферическую трубку.*

Таким же образом могут быть исследованы все уравнения, выписанные в теореме 1.1. Однако такое рассмотрение является достаточно объемным и выходит за рамки настоящей статьи.

Благодарности

Автор выражает благодарность А.В. Лободе за полезные обсуждения и ценные замечания при работе над текстом статьи, а также Д.В. Козориз за консультации по использованию метода нормальных форм в пространстве $\mathbb{C}^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Cartan. *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. **11**, 17–90 (1933).
2. G. Fels, W. Kaup. *Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5* // Acta Math. **201**, 1–82 (2008).
3. А.В. Лобода. *Однородные вещественные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ *с двумерными группами изотропии* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. **235**, 114–142 (2001).
4. А.В. Лобода. *Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ *с двумерными группами изотропии* // Мат. сб. **192**:12, 3–24 (2001).
5. B. Doubrov, A. Medvedev, D. The. *Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$ // Mathematische Zeitschrift. **297**, 669–709 (2021).
6. I. Kossovskiy, A. Loboda. *Classification of homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$ // Preprint: arXiv:1906.11345 (2019).
7. А.В. Лобода. *Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ // Тр. ММО. **81**:2, 61–136 (2020).
8. B. Doubrov, J. Merker, D. The. *The Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$ // IMRN, rnab147 (2021).
9. M.G. Eastwood, V.V. Ezhov. *Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. **235**, 57–70 (2001).
10. M.G. Eastwood, V.V. Ezhov. *A classification of non-degenerate homogeneous equiaffine hypersurfaces in four complex dimensions* // Asian J. Math. **5**:4, 721–740 (2001).
11. F. Dillen, L. Vrancken. *3-dimensional affine hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$ *with parallel cubic form* // Nagoya Math. J. **124**, 41–53 (1991).
12. A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh. *On the orbits of nilpotent 7-dimensional lie algebras in 4-dimensional complex space* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:3, 360–372 (2020).
13. Р.С. Акопян, А.В. Атанов. *Невырожденные орбиты в* $\mathbb{C}^4$ *разложимых 7-мерных алгебр Ли* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения – XXXI». 30–32 (2020).
14. Г.М. Мубаракзянов. *О разрешимых алгебрах Ли* // Изв. вузов. Матем. **1**, 114–123 (1963).
15. А.В. Атанов, И.Г. Коссовский, А.В. Лобода. *Об орбитах действий 5-мерных неразрешимых алгебр Ли в трехмерном комплексном пространстве* // ДАН. **487**:6, 7–10 (2019).
16. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy. *Homogeneous hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$*, associated with a model CR-cubic* // J. Geom. Anal. **20**:3, 538–564 (2010).
17. S.S. Chern, J.K. Moser. *Real hypersurfaces in complex manifolds* // Acta Math. **133**, 219–271 (1974).

18. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Об орбитах одной неразрешимой 5-мерной алгебры Ли* // Математическая физика и компьютерное моделирование. **22**:2, 5–20 (2019).
19. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в* $\mathbb{C}^3$ // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. **173**, 86–115 (2019).
20. L. Šnobl, P. Winternitz. *Classification and Identification of Lie Algebras.* AMS, Providence, R.I. (2014).
21. Г.М. Мубаракзянов. *Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка* // Изв. вузов. Матем. **3**, 99–106 (1963).
22. А.В. Лобода. *Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства* // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. : Физика. Математика. **2**, 71–91 (2009).
23. А.В. Исаев, М.А. Мищенко. *Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **52**:6, 1123–1153 (1988).

Артем Викторович Атанов,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: atanov.cs@gmail.com