ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 115-125.

УДК 517.968.72

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В статье рассматриваются интегрально весовые L_2 пространства на выпуклых областях $\mathbb{R}^n$ и исследуется задача описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье – Лапласа.

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и φ — выпуклая функция на этой области. Через $L_2(D,\varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций на D, для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int\limits_D |f(t)|^2 e^{-2\varphi(t)} dt.$$

При некоторых ограничениях на весовую функцию φ доказано, что целая функция F представляется в виде преобразования Фурье – Лапласа функции из $L_2(D,\varphi)$, то есть

$$F(\lambda) = \int\limits_D e^{t\lambda - 2\varphi(t)} \overline{f(t)} dt, \qquad f \in L_2(D,\varphi),$$

для некоторой функции $f \in L_2(D,\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\|F\|^2 := \int \frac{|F(z)|^2}{K(z)} \det G(\widetilde{\varphi}, x) dydx < \infty,$$

где $G(\widetilde{\varphi}, x)$ — матрица Гессе функции $\widetilde{\varphi}$,

$$K(\lambda) := \|\delta_\lambda\|^2, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

В качестве примера показано, что для случая, когда D — единичный круг и $\varphi(t) = (1-|t|)^\alpha$, то пространство преобразований Фурье – Лапласа изоморфно пространству целых функций $F(z)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}^2$, для которых

$$\|F\|^2 := \int |F(x+iy)|^2 e^{-2|x| - 2(a\beta)^{\frac{1}{\beta+1}}(a+1)|x|^{\frac{\beta}{\beta+1}}} (1+|x|)^{\frac{\alpha-3}{2}} dxdy < \infty,$$

где $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$.

Ключевые слова: весовые пространства, преобразование Фурье – Лапласа, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10

R.S. Yulmukhametov, Dual spaces to weighted spaces of locally integrable functions.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Поступила 25 августа 2021 г.

1. Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и φ — выпуклая функция на этой области. Через $L_2(D,\varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций на D, для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int\limits_D |f(t)|^2 e^{-2\varphi(t)}dt.$$

Система функций $e^{t\lambda}$, где $t=(t_1,...,t_n)$, $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ и $t\lambda=\sum_{k=1}^n t_k\lambda_k$, полна в гильбертовом пространстве $L_2(D,\varphi)$, поэтому преобразование Фурье – Лапласа

$$\mathcal{L}:\ S\to S(e^{t\lambda}),\qquad \lambda\in\mathbb{C}^n,$$

отображает сопряженное пространство $L_2^*(D,\varphi)$ на некоторое пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ функций на $\mathbb{C}^n$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств это пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ состоит из функций вида

$$\widehat{f}(\lambda)=\int\limits_D e^{t\lambda-2\varphi(t)}\overline{f(t)}dt,\qquad f\in L_2(D,\varphi),$$

в частности, $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ является подпространством пространства целых функций. Пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ гильбертово относительно наведенного скалярного произведения $(\widehat{f},\widehat{g})=(f,g)$.

Заметим, что точечные функционалы $\delta_\lambda : F\to F(\lambda)$ непрерывны в пространстве $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ при любом $\lambda\in\mathbb{C}^n$. Функцию

$$K(\lambda):=\|\delta_\lambda\|^2,\qquad \lambda\in\mathbb{C}^n,$$

называют функцией Бергмана.

В данной статье рассматривается вопрос о весовом описании наведенной нормы в этом пространстве. В одномерном случае вопрос полностью решен в работе [2], в окончательной формулировке из работы [1] ответ выглядит следующим образом.

Пусть D — интервал вещественной оси и φ выпуклая функция на этом интервале, тогда пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ изоморфно пространству целых функций F, удовлетворяющих условию

$$|F(z)|\le CK(z),\ z\in\mathbb{C},$$
$$\|F\|^2 := \int \frac{|F(z)|^2}{K(z)}dyd\widetilde{u}'_+(x)<\infty.$$

Будем считать, что $\varphi\in C^2$ и строго выпукла.

2. Выпуклые функции

В этом параграфе введем понятие регулярности и изложим некоторые его свойства.

Пусть K — выпуклая область, $\psi\in C^2(K)$ — строго выпуклая функция и

$$\nabla\psi(t)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t),...,\frac{\partial\psi}{\partial t_n}(t)\right)$$

— градиентный вектор, а

$$G(\psi,t)=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t_i\partial t_j}(t)\right)_{i,j=1}^n$$

— матрица Гессе функции ψ в точке $t\in K$.

Строгая выпуклость функции ψ равносильна положительной определенности ее матрицы Гессе:

$$(\omega, G(\psi,t)\omega) > 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\omega\| = 1, \qquad t \in D.$$

В частности, отображение $\nabla\psi(t)$ инъективно при каждом $t \in K$. Функция

$$\widetilde{\psi}(\tau) = \sup_{t\in K}(t\tau - \psi(t))$$

называется преобразованием Юнга. В общем случае преобразование Юнга $\widetilde{\psi}$ — выпуклая функция в некоторой выпуклой области $\widetilde{K}$. Если супремум достигается во внутренней точке области K, то, как следует из теоремы об обратной функции, $\widetilde{\psi}$ дифференцируема в точке τ, причем $\nabla\widetilde{\psi}(\nabla\psi(\tau)) \equiv \tau$. Дифференцируя это тождество, получим, что матрицы Гессе удовлетворяют равенству

$$G(\widetilde{\psi}, \nabla\psi(t))G(\psi,t) = E, \qquad t \in D,$$

где E — единичная матрица. Область

$$E(\psi,t_0,p) = \{t \in D: \ (t-t_0)G(\psi,t_0)(t-t_0) < p\}$$

будем называть p-эллипсоидом функции ψ в точке t_0.

В окрестности любой точки $t_0 \in K$ функция $\psi \in C^2$, представляется по формуле Тейлора

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \nabla\varphi(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)G(\varphi,t_0)(t-t_0) + \alpha(t_0,t-t_0)|t-t_0|^2,$$

где $\alpha(t_0,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Положим для положительного p

$$\Omega(\psi,t_0,p) = \{t \in D: \ \psi(t) - \psi(t_0) - \nabla\psi(t_0)(t-t_0) < p\},$$

тогда $\Omega(\psi,t_0,p)$ — некоторая выпуклая окрестность точки t_0.

Рассмотрим условие: существуют числа $q > 1, \ p > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2q}(t-t_0)G(\psi,t_0)(t-t_0) &\le |\psi(t) - \psi(t_0) - \nabla\psi(t_0)(t-t_0)| \\ &\le \frac{q}{2}(t-t_0)G(\psi,t_0)(t-t_0), \qquad t \in E(\psi,t_0,p).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi \in C^2$ — строго выпуклая функция в ограниченной выпуклой области D и $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $dist(t) \to 0$. Если $\widetilde{\varphi}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* (2.1)*, то*

$$E(\widetilde{\varphi},x,\frac{p}{q}) \subset \Omega(\widetilde{\varphi},x,p) \subset E(\widetilde{\varphi},x,4q^2p),$$

и

$$c_n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},x)}} \le |\Omega(\widetilde{\varphi},x,p)| \le c_n\frac{(4pq^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},x)}},$$

где через $|A|$ обозначен объем множества A, через $dist(t)$ — расстояние от точки $t \in D$ до границы D, а через c_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем, что $\Omega(\widetilde{\varphi},x,p) \subset E(\widetilde{\varphi},x,4q^2p)$. Не уменьшая общности, будем считать, что $x = 0$. Возьмем $\tau'' \in \partial\Omega(\widetilde{\varphi},0,p)$:

$$\widetilde{\varphi}(\tau'') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau'' = p.$$

Если $\tau'' \notin E(\widetilde{\varphi},0,p)$, то отрезок, соединяющий точку τ'' с точкой 0, пересекает границу эллипсоида $E(\widetilde{\varphi},0,p)$ в некоторой точке $\tau' \in \Omega(\widetilde{\varphi},0,p)$:

$$\tau' G(\widetilde{\varphi},0)\tau' = p.$$

По условию (2.1)

$$\widetilde{\varphi}(\tau') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau' \geq \frac{1}{2q}\tau' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau' = \frac{p}{2q}.$$

Функция $\widetilde{\varphi}(t) - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)t$ выпукла по t, поэтому

$$p = \widetilde{\varphi}(\tau'') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau'' \geq \frac{\widetilde{\varphi}(\tau') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau'}{|\tau'|}|\tau''| \geq \frac{p}{2q}\frac{|\tau''|}{|\tau'|},$$

следовательно, $|\tau''| \leq 2q|\tau'|$ и

$$\tau'' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau'' = \frac{|\tau''|^2}{|\tau'|^2}\tau' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau' \leq 4q^2 p,$$

то есть $\tau'' \in E(\widetilde{\varphi}, 0, 4q^2 p)$ и требуемое вложение доказано.

Докажем включение $E(\widetilde{\varphi}, 0, \frac{p}{q}) \subset \Omega(\widetilde{\varphi}, 0, p)$. Пусть $\tau'' \in \partial E(\widetilde{\varphi}, 0, \frac{p}{q})$:

$$\tau'' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau'' = \frac{p}{q},$$

и предположим, что $\tau'' \notin \Omega(\widetilde{\varphi}, 0, p)$:

$$\widetilde{\varphi}(\tau'') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau'' > p.$$

Отрезок, соединяющий точку τ'' с точкой 0, пересекает границу $\Omega(\widetilde{\varphi}, 0, p)$ в некоторой точке τ':

$$\widetilde{\varphi}(\tau') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau' = p.$$

По условию (2.1)

$$\tau' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau' \geq \frac{2}{q}(\widetilde{\varphi}(\tau') - \widetilde{\varphi}(0) - \nabla\widetilde{\varphi}(0)\tau') = \frac{2p}{q},$$

значит,

$$\frac{p}{q} = \tau'' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau'' = \frac{|\tau''|^2}{|\tau'|^2}\tau' G(\widetilde{\varphi}, 0)\tau' \geq \frac{|\tau''|^2}{|\tau'|^2}\frac{2p}{q},$$

то есть $|\tau''| < |\tau'|$ и $\tau'' \in \Omega(\widetilde{\varphi}, 0, p)$. Получили противоречие, доказывающее включение $E(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{q}) \subset \Omega(\widetilde{\varphi}, x, p)$.

Из доказанных включений следует, что

$$\left| E\left(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{q}\right)\right| \leq |\Omega(\widetilde{\varphi}, x, p)| \leq |E(\widetilde{\varphi}, x, 4pq^2)|.$$

Если A — положительно определенная матрица, то полуоси эллипса $xAx \leq p$, равны $\sqrt{\frac{p}{\lambda_k}}$, где λ_k — собственные числа матрицы A. Объем эллипса будет равен $c_n \frac{p^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 ... \lambda_n}}$, где c_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, а $\det A = \lambda_1 ... \lambda_n$. Таким образом,

$$c_n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)}} \leq |\Omega(\widetilde{\varphi}, x, p)| \leq c_n \frac{(4pq^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)}}.$$

□

В работе [1] введено понятие «объемного расстояния». Оно определяется по индукции по размерности пространства.

Пусть E — некоторая выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $x \in E$. Если $n = 1$, то положим

$$vd(x, E) = \inf\{|x - y| : \ y \notin E\}$$

— обычное расстояние от точки $x \in E$ до границы E. Пусть величина $vd(x, E)$ определена в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Возьмем точку $x_0 \in \partial E$ такую, что

$$\inf\{|x - y| : \ y \notin E\} = |x - x_0|.$$

Если таких точек на границе больше одной, то возьмем любую из них. Через точку x_0 проходит единственная опорная гиперплоскость, ортогональная отрезку, соединяющему точки x и x_0. Пусть P — гиперплоскость, параллельная этой опорной гиперплоскости и проходящая через точку x. Размерность выпуклого множества $E_1 = P\bigcap E$ равна n и $x \in E_1$. По допущению индукции величина $vd(x, E_1)$ уже определена. Положим

$$vd(x,E) = vd(x,E_1)|x - x_0|.$$

Например, для эллипса E в $\mathbb{R}^n$ с полуосями $a_1, ..., a_n$ и с центром в начале координат, как легко видеть, $vd(0, E) = a_1...a_n$.

Лемма 2.2. *Пусть $\varphi \in C^2$ — строго выпуклая функция в ограниченной выпуклой области D и $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $dist(t) \to 0$. Если $\widetilde{\varphi}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* (2.1)*, то*

$$\left(\frac{p}{2qn}\right)^n (\det G(\widetilde{\varphi},x))^{-\frac{1}{2}} \le vd(x, \Omega(\widetilde{\varphi},x,p)) \le (4q^2p)^n (\det G(\widetilde{\varphi},x))^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. В [1, Лемма 7] показано, что если C — выпуклое множество, содержащее начало координат, и $H(x)$ — опорная функция этого множества, то

$$\frac{1}{vd(0,C)} \le \int e^{-H(x)}dx \le \frac{(2n)^n}{vd(0,C)}.$$

По лемме 2.1

$$E\left(\widetilde{\varphi},x,\frac{p}{q}\right) \subset \Omega(\widetilde{\varphi},x,p) \subset E(\widetilde{\varphi},x,4pq^2). \tag{2.2}$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $x = 0$. Пусть $H(y)$ — опорная функция области $\Omega = \Omega(\widetilde{\varphi}, 0, p)$, H_-, H_+ — опорные функции эллипсоидов, соответственно, $E_- = E(\widetilde{\varphi}, 0, \frac{p}{q})$ и $E_+ = E(\widetilde{\varphi}, 0, 4pq^2)$. В силу последних двух соотношений

$$(2n)^{-n} vd(0,E_-) \le vd(0,\Omega) \le vd(0,E_+).$$

Как уже отмечалось выше, $vd\left(0, E\left(\widetilde{\varphi}, 0, \frac{p}{q}\right)\right)$ равна произведению полуосей эллипса, то есть $\left(\frac{p}{q}\right)^n (\lambda_1...\lambda_n)^{-\frac{1}{2}}$, где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — собственные числа матрицы Гессе $G(\widetilde{\varphi}, x)$, при этом

$$\det G(\widetilde{\varphi},x) = \lambda_1...\lambda_n.$$

□

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in C^2$ — строго выпуклая функция и $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $dist(t) \to 0$. Если $\widetilde{\varphi}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* (2.1) *с $p = 1$, то для $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $x = Re\ \lambda$*

$$\frac{(4q^2)^{-n}}{e(1+n!)}\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},x)}e^{2\widetilde{\varphi}(x)} \le K(\lambda) \le e^2(4n^2q)^n(1+n!)\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},x)}e^{2\widetilde{\varphi}(x)}.$$

Доказательство. По неравенству Коши для $F = \widehat{f} \in \widehat{L}_2(D, \varphi)$

$$|\delta_\lambda(F)|^2 = \left|\int\limits_D e^{\lambda t - 2\varphi(t)}\overline{f}(t)dt\right|^2 \le \|f\|^2 \int\limits_D e^{2xt-2\varphi(t)}dt, \qquad x = \mathrm{Re}\ \lambda,$$

причем в этой оценке равенство достигается на функции $\mathcal{E}_\lambda(t) = e^{\lambda t}$. Таким образом,

$$K(\lambda) = \int\limits_D e^{2\mathrm{Re}\ \lambda t - 2\varphi(t)}dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

В [1, Теорема 2] показано, что

$$\frac{1}{e(1+n!)vd(\Omega(\widetilde{\varphi},x,1))}e^{2\widetilde{\varphi}(x)} \le \int\limits_D e^{2xt-2\varphi(t)}dt \le \frac{e^2(1+n!)(2n)^n}{vd(\Omega(\widetilde{\varphi},x,1))}e^{2\widetilde{\varphi}(x)}, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Остается воспользоваться леммой 2.2. □

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi\in C^2$ — строго выпуклая функция в ограниченной выпуклой области и $|\varphi(t)|\to+\infty$ при $dist(t)\to 0$. Тогда сопряженная по Юнгу функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(y)|\le \sup_{t\in D}|t|\cdot|x-y|, \qquad x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Если $\widetilde{\varphi}$ в точке $x\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (2.1) с $p=1$, то

$$\det G(\widetilde{\varphi},x)\le(16q^2d^2)^n, \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $d=\sup_{t\in D}|t|$.

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(x)=xt_x-\varphi(t_x),$$

тогда

$$\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(y)\le xt_x-\varphi(t_x)-(yt_x-\varphi(t_x))=(x-y)t_x\le d|x-y|.$$

Поменяв местами x и y, получим первое утверждение леммы.

Из липшицевости следует, что множество $\Omega(\widetilde{\varphi},x,1)$ при любом $x\in\mathbb{R}^n$ содержит шар радиуса $\frac{1}{2d}$ с центром в x. В самом деле, если $|x-y|\le\frac{1}{2d}$, то поскольку $\nabla\widetilde{\varphi}(x)\in D$, то

$$\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(x)-\nabla\widetilde{\varphi}(x)(y-x)\le 2d|x-y|\le 1.$$

Следовательно,

$$|\Omega(\widetilde{\varphi},x,1)|\ge c_n(2d)^{-n}, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Отсюда и по лемме 2.1 получим второе утверждение. □

Возьмем некоторое $\varepsilon>0$ и положим

$$p(x,\varepsilon)=\max(1,(\det G(\widetilde{\varphi},x)^{-\varepsilon}).$$

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi\in C^2$ — строго выпуклая функция в ограниченной области D, $|\varphi(t)|\to+\infty$ при $dist(t)\to 0$ и $\widetilde{\varphi}$ в каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (2.1) с некоторым q, не зависящим от x, и с $p=p(x,\varepsilon)$, кроме того, выполнено условие: для некоторого $q_1>1$*

$$\frac{1}{q_1}\le\frac{\det G(\widetilde{\varphi},y)}{\det G(\widetilde{\varphi},x)}\le q_1 \quad \text{при} \quad y\in E(\widetilde{\varphi},x,p(x)), \qquad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{2yt}}{K(y)}\det G(\widetilde{\varphi},y)dy\asymp e^{2\varphi(t)}, \qquad t\in D.$$

Доказательство. По теореме 2.1

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{2yt}}{K(y)}\det G(\widetilde{\varphi},y)dy\asymp\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)}\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},y)}dy, \qquad t\in D,$$

значит, для $x=\nabla\varphi(t)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{2yt}}{K(y)}\det G(\widetilde{\varphi},y)dy\succ\int\limits_{E(\widetilde{\varphi},x,1)}e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)}\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi},y)}dy, \qquad t=\nabla\widetilde{\varphi}(x)\in D,$$

и по условию (2.3)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2yt}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \succ \sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)} \int\limits_{E(\widetilde{\varphi},x,1)} e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)} dy, \qquad t = \nabla\widetilde{\varphi}(x) \in D.$$

Поскольку

$$yt - \widetilde{\varphi}(y) - \varphi(t) = -(\widetilde{\varphi}(y) - \widetilde{\varphi}(x) - \nabla\widetilde{\varphi}(x)(y-x)) \geq -1, \qquad y \in \Omega(\widetilde{\varphi}, x, 1), \tag{2.4}$$

и из (2.2) это же верно для $y \in E\left(\widetilde{\varphi}, x, \frac{1}{q}\right)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \succ \sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)} \left| E\left(\widetilde{\varphi}, x, \frac{1}{q}\right)\right|, \qquad t = \nabla\widetilde{\varphi}(x) \in D,$$

и по лемме 2.1

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \succ 1, \qquad t \in D.$$

Перейдем к оценкам сверху. Положим $x = \nabla\varphi(t)$ и $E(\widetilde{\varphi}, x, p(x)) = E(x)$ и оценим интеграл по множеству $E(x)$. По теореме 2.1 и по условию (2.3)

$$\int\limits_{E(x)} \frac{e^{2yt}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \prec \sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)} \int\limits_{E(x)} e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)} dy, \qquad t \in D. \tag{2.5}$$

По представлению в (2.4) и по условию (2.1)

$$\int\limits_{E(x)} e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)-2\varphi(t)} dy \prec \int\limits_{E(x)} e^{-\frac{1}{2q}(y-x)G(\widetilde{\varphi},x)(y-x)} dy \prec \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2q}(y-x)G(\widetilde{\varphi},x)(y-x)} dy.$$

Положительно определенная форма G может быть приведена к диагональному виду с помощью поворотов пространства. После соответствующих замен получим

$$\int\limits_{E(x)} e^{2yt-2\widetilde{\varphi}(y)-2\varphi(t)} dy \prec \frac{(2q)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2} dt.$$

Отсюда и из (2.5) следует оценка

$$\int\limits_{E(x)} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \prec 1, \qquad t \in D. \tag{2.6}$$

Для оценки интеграла по $\mathbb{R}^n \backslash E(x)$ воспользуемся ограниченностью $\det G(\widetilde{\varphi}, x)$, доказанной в лемме 2.3, и теоремой 2.1:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash E(x)} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy &\prec \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash E(x)} e^{2(yt-\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(t))} \sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, y)} dy \\ &\prec \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash E(x)} e^{2(yt-\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(t))} dy, \qquad t \in D.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть $y \in \partial E(x)$, тогда по условию (2.1)

$$\widetilde{\varphi}(y) - \varphi(t) - xt = \widetilde{\varphi}(y) - \widetilde{\varphi}(x) - \nabla\widetilde{\varphi}(x)(y-x) \geq \frac{1}{2q}(y-x)G(\widetilde{\varphi}, x)(y-x) = \frac{p}{2q},$$

значит,

$$\widetilde{\varphi}(y) - \varphi(t) - xt \geq \frac{p}{2q}, \qquad y \notin E(x),$$

тем самым, $\mathbb{R}^n \setminus E(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{2q})$. Следовательно, из (2.7) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E(x)} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \prec \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{2q})} e^{2(yt-\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(t))} dy, \qquad t \in D. \tag{2.8}$$

Из представления

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{2q})} e^{2(yt-\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(t))} dy = \int\limits_{\frac{p(x)}{2q}}^{\infty} e^{-2t} d\alpha(t)$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\widetilde{\varphi}, x, \frac{p}{2q})} e^{2(yt-\widetilde{\varphi}(y)-\varphi(t))} dy = \alpha\left(\frac{p(x)}{2q}\right) e^{-\frac{p(x)}{q}} + 2\int\limits_{\frac{p(x)}{2q}}^{\infty} \alpha(t) e^{-2t} dp. \tag{2.9}$$

По лемме 2.1

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{p(x)}{2q}\right) e^{-\frac{p(x)}{q}} &\leq (2q)^n \frac{c_n}{\sqrt{\det G(\widetilde{\varphi}, x)}} (p(x))^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{p(x)}{q}} \\ &\leq (2q)^n \sup_p p^{\frac{n}{2}+\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\frac{p}{q}} := (2q)^n \cdot M. \end{aligned} \tag{2.10}$$

По неравенству Минковского для смешанных объемов функция $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ вогнута на $\mathbb{R}_+$, поэтому

$$(\alpha(t))^{\frac{1}{n}} \leq \left(\alpha\left(\frac{p(x)}{2q}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{2q}{p(x)} t$$

или

$$\alpha(t) \leq \alpha\left(\frac{p(x)}{2q}\right) \cdot \left(\frac{2q}{p(x)}\right)^n \cdot t^n.$$

По лемме 2.1 и по определению $p(x)$ $(p(x) \geq 1)$

$$\alpha(t) \leq (2q)^{2n} (p(x))^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{\varepsilon}} t^n \leq (2q)^{2n} t^n, \qquad \text{при} \quad -\frac{n}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \leq 0.$$

Если $-\frac{n}{2} + \frac{1}{\varepsilon} > 0$, то при $t \geq \frac{p(x)}{2q}$

$$\alpha(t) \leq (2q)^{2n} (p(x))^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{\varepsilon}} t^n \leq (2q)^{\frac{3n}{2}+\frac{1}{\varepsilon}} t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{\varepsilon}},$$

следовательно, в любом случае

$$2\int\limits_{\frac{p(x)}{2q}}^{\infty} \alpha(t) e^{-2t} dp \leq M_1(q, \varepsilon).$$

Отсюда и из (2.8)–(2.10) получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E(x)} \frac{e^{2yt-2\varphi(t)}}{K(y)} \det G(\widetilde{\varphi}, y) dy \prec 1.$$

С учетом (2.5), (2.6) имеем требуемую верхнюю оценку. □

3. Доказательство основной теоремы. Пространство функций конечного порядка в круге

В этом параграфе мы намерены доказать основной результат данной статьи.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in C^2$ — строго выпуклая функция в ограниченной области D, $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $dist(t) \to 0$ и $\widetilde{\varphi}$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (2.1) с $p = p(x)$ и условию (2.3). Тогда в пространстве $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ норма*

$$\|F\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 \frac{\det G(\widetilde{\varphi}, x) dxdy}{K(x)}$$

эквивалентна исходной (наведенной из $L_2^*(D, \varphi)$) норме.

Доказательство. Возьмем функцию $F \in \widehat{L}_2(D, \varphi)$, то есть для некоторой $f \in L_2(D, \varphi)$

$$F(x+iy) = \widehat{f}(x+iy) = \int\limits_D e^{iyt} \left(e^{xt-2\varphi(t)}\overline{f}(t)\right) dt.$$

При фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$g(t) = e^{xt-2\varphi(t)}\overline{f}(t), \qquad t \in D,$$

и $g(t) \equiv 0$ при $t \notin D$. Пусть $\widetilde{g}$ — классическое преобразование Фурье функции g. Тогда

$$F(x+iy) = \widetilde{g}(-y), \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

и по формуле Парсеваля

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 dy = \int\limits_D e^{2xt-4\varphi(t)} |\overline{f}(t)|^2 dt.$$

Следовательно,

$$\|F\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 dy \right) \frac{\det G(\widetilde{\varphi}, x)}{K(x)} dx$$

$$= \int\limits_D |\overline{f}(t)|^2 e^{-4\varphi(t)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2xt}}{K(x)} \det G(\widetilde{\varphi}, x) dx \right) dt.$$

По теореме 2.2

$$\|F\|^2 \asymp \int\limits_D |\overline{f}(t)|^2 e^{-2\varphi(t)} dt.$$

□

Замечание 3.1. *Поскольку утверждение теоремы 3.1 носит асимптотический характер, то будет верна и следующая теорема.*

Теорема 3.2. *Пусть $\varphi \in C^2$ — выпуклая функция в ограниченной области D и строго выпуклая в окрестности границы D, $|\nabla\varphi(t)| \to +\infty$ при $dist(t) \to 0$ и $\widetilde{\varphi}$ в точках $x \in \mathbb{R}^n$ с достаточно большим модулем удовлетворяет условию (2.1) с $p = p(x)$ и условию (2.3). Тогда в пространстве $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ норма*

$$\|F\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 \frac{\det G(\widetilde{\varphi}, x) dxdy}{K(x)}$$

эквивалентна исходной (наведенной из $L_2^*(D, \varphi)$) норме.

В качестве примера рассмотрим функции $\varphi(t) = a(1-|t|)^{-\beta}$, $\beta < 0$, в единичном круге $B(0,1)$. Непосредственно вычислим

$$\widetilde{\varphi}(x) = |x| - c|x|^{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$ и $c = (a\beta)^{\frac{1}{\beta+1}}(a+1)$. Для простоты будем считать, что $c = 1$ и $n = 2$:

$$\widetilde{\varphi}(x) = |x| - |x|^{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Проверим выполнение условий теоремы 3.1. В силу радиальности достаточно рассмотреть точки на луче $x = (t, 0),\ t > 0$. Непосредственно вычислим градиентный вектор

$$\nabla\widetilde{\varphi}(x) = (x_1(|x|^{-1} - \alpha|x|^{\alpha-2}), \qquad x_2(|x|^{-1} - \alpha|x|^{\alpha-2})),$$

и матрицу Гессе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_1^2} = x_2^2|x|^{-3} - \alpha|x|^{\alpha-2} - \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}x_1^2, \\ \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_2^2} = x_1^2|x|^{-3} - \alpha|x|^{\alpha-2} - \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}x_2^2, \\ \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_1\partial x_2} = -x_1x_2(|x|^{-3} + \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}). \end{cases} \tag{3.1}$$

В точке $x_0 = (t,0)$ имеем

$$\nabla\widetilde{\varphi}(x_0) = (1 - \alpha t^{\alpha-1},\ 0),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x_0)}{\partial x_1^2} = \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}, \\ \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x_0)}{\partial x_2^2} = t^{-1} - \alpha t^{\alpha-2}, \\ \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x_0)}{\partial x_1\partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Матрица Гессе в точке x_0 имеет диагональный вид, следовательно,

$$\lambda_1(x_0) = \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}, \qquad \lambda_2(x_0) = t^{-1} + (1-\alpha)\alpha t^{\alpha-2}$$

— собственные числа матрицы $G(\widetilde{\varphi}, x_0)$ и при $\varepsilon = \frac{\alpha}{2(3-\alpha)}$

$$p(x_0) \asymp t^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad t \to \infty.$$

Проверим выполнение условий (2.1) и (2.3).

Оценим полуоси эллипса $E(\widetilde{\varphi}, x_0, p(x_0))$

$$a_1(x_0) = \sqrt{\frac{p(x_0)}{\lambda_1(x_0)}} \asymp t^{1-\frac{\alpha}{4}}, \qquad a_2(x_0) = \sqrt{\frac{p(x_0)}{\lambda_2(x_0)}} \asymp t^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}},$$

в частности, для $x \in E(\widetilde{\varphi}, x_0, p(x_0))$

$$|x_2| \prec t^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}, \qquad |x_1| \asymp |x_0| = t, \qquad |x - x_0| \asymp t. \tag{3.3}$$

Пусть $x \in E(\widetilde{\varphi}, x_0, p(x_0))$ и положим $\omega = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, $x = y\omega + x_0$, $u(y) = \widetilde{\varphi}(y\omega + x_0),\ y > 0$.

Из (3.3) получим

$$\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_1^2}\omega_1^2 \prec t^{\alpha-2}\omega_1^2, \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_2^2}\omega_2^2 \prec t^{-1}\omega_2^2. \tag{3.4}$$

Поскольку $x_2 = |x - x_0|\omega_2$, то

$$\left|\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(x)}{\partial x_1\partial x_2}\omega_1\omega_2\right| \prec t^{-1}\omega_2^2.$$

Отсюда и из (3.2), (3.4) имеем

$$\omega G(\widetilde{\varphi}, x)\omega \prec \omega G(\widetilde{\varphi}, x_0)\omega.$$

Меняя местами x_0 и x получим

$$\omega G(\widetilde{\varphi}, x)\omega \asymp \omega G(\widetilde{\varphi}, x_0)\omega. \tag{3.5}$$

По теореме о среднем

$$\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(x_0)-\nabla\widetilde{\varphi}(x_0)(x-x_0)=(x-x_0)G(\widetilde{\varphi},x^*)(x-x_0),$$

где x^* — точка на отрезке, соединяющем x_0 с x. По соотношению (3.5)

$$\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(x_0)-\nabla\widetilde{\varphi}(x_0)(x-x_0)\asymp(x-x_0)G(\widetilde{\varphi},x^*)(x-x_0),$$

то есть выполняется условие (2.1).

В силу (3.2) $\det G(\widetilde{\varphi},x)\asymp|x|^{\alpha-3}$, поэтому условие (2.3) выполняется очевидным образом. Таким образом верна теорема.

Теорема 3.3. *Если* $D=\{t\in\mathbb{R}^2,\ |t|<1,\ \varphi(t)=a(1-|t|)^{-\beta},\ \beta<0\}$, *то пространство* $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ *как нормированное пространство изоморфно пространству целых функций* $F(z)$, $z=x+iy\in\mathbb{C}^2$, *для которых*

$$\|F\|^2:=\int|F(x+iy)|^2e^{-2|x|-2(a\beta)^{\frac{1}{\beta+1}}(a+1)|x|^{\frac{\beta}{\beta+1}}}(1+|x|)^{\frac{\alpha-3}{2}}dxdy<\infty,$$

где $\alpha=\frac{\beta}{\beta+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р.А. Башмаков, К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимск. матем. журн. **2**:1, 3–16 (2010).
2. В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметов. *Обобщение теоремы Пэли – Винера на весовые пространства* // Матем. заметки, **48**:5, 80–87 (1990).

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru