ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 82-93.

УДК 517.53

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПЛОСКИХ КЛАССОВ ПРИВАЛОВА

Е.Г. РОДИКОВА

Аннотация. Задача описания тейлоровских коэффициентов аналитических в круге функций была впервые решена для класса Р. Неванлинны выдающимся советским математиком С.Н. Мергеляном в н. 20 века. В дальнейшем получению аналогичных оценок в различных классах аналитических функций занимались известные отечественные и зарубежные специалисты в области комплексного анализа: Г. Харди, Д. Литтлвуд, А.А. Фридман, Н. Янагиара, М. Столл, С.В. Шведенко и др. В статье вводится в рассмотрение плоский класс И.И. Привалова $\tilde{\Pi}_q\,(q>0)$, являющийся обобщением известного плоского класса Р. Неванлинны. В первой части статьи получена точная оценка роста произвольной функции из плоского класса Привалова, описаны коэффициенты разложения этой функции в ряд Тейлора. Во второй части работы на основе полученных оценок полностью описаны коэффициентные мультипликаторы из плоских классов Привалова в классы Харди. В упрощенном виде эта задача может быть сформулирована так: на какие множители нужно домножить тейлоровские коэффициенты функций из данного класса $\tilde{\Pi}_q\,(q>0)$, чтобы они стали тейлоровскими коэффициентами функций из класса Харди.

Ключевые слова: плоский класс Привалова, коэффициенты Тейлора, мультипликатор, рост, аналитические функции.

Mathematics Subject Classification: Primary 30H50; Secondary 30H10, 30H15

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, D – единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех функций, аналитических в D. При всех $0<q<+\infty$ определим класс Привалова Π_q:

$$\Pi_q=\left\{f\in H(D):\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+|f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta<+\infty\right\},$$

где $\ln^+ a=\max(\ln a,0)$ при любом $a>0$.

Впервые классы Π_q были рассмотрены И.И. Приваловым в [4]. При $q=1$ класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом функций ограниченного вида или классом Р. Неванлинны N [2]. Используя неравенство Гельдера, нетрудно доказать цепочку включений:

$$\Pi_q\,(q>1)\subset N\subset\Pi_q\,(0<q<1).$$

Исследованиями класса Π_q при $q>1$ занимались зарубежные математики М. Столл, М. Павлович, М. Йевтич, Р. Мештрович и отечественные специалисты по теории функций В.И. Гаврилов, А.В. Субботин, Д.А. Ефимов (см. [1] и цитированную в нем литературу).

E.G. Rodikova, On coefficient multipliers for planar Privalov classes.

Поступила 31 января 2021 г.

Случай $0 < q < 1$ изучался в работах автора статьи, а также Ф.А. Шамояна и его соавторов (см. [8]–[10], [14], [16], [23]–[25]).

При всех $0 < q < +\infty$ введем также в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны:

$$\mathbf{N} = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta dr < +\infty \right\}$$

или

$$\mathbf{N} = \left\{ f \in H(D) : \int\int_D \ln^+ |f(z)| dxdy < +\infty \right\}, \quad z = x + iy,$$

входящим в шкалу классов N_α Неванлинны – Джрбашяна:

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f) dr < +\infty \right\}, \quad \alpha > -1,$$

где $T(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$ (см. [2]):

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < 1.$$

В свою очередь, классы N_α входят в шкалу классов S_α^q:

$$S_\alpha^q = \left\{ \int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr < +\infty \right\}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < q < +\infty.$$

Классы S_α^q были введены и исследованы в [12] Ф.А. Шамояном.

Используя неравенство Гельдера, нетрудно доказать, что

$$\tilde{\Pi}_q \subset S_0^q \quad \text{при} \quad q > 1,$$
$$\tilde{\Pi}_q \supset S_0^q \quad \text{при} \quad 0 < q < 1.$$

Отметим, что классы $\tilde{\Pi}_q$ возникают естественным образом при исследовании интегро-дифференциальных операторов в пространствах И.И. Привалова. В недавней совместной работе автора статьи и Ф.А. Шамояна [25] было доказано, что класс И.И. Привалова не инвариантен относительно оператора дифференцирования при всех $q > 0$, то есть в пространствах Привалова гипотеза Блоха – Неванлинны неверна. В [25] также установлено, что производная произвольной функции, не имеющей нулей, из класса И.И. Привалова Π_q принадлежит классу И.И. Привалова по площади $\tilde{\Pi}_q$.

В данной работе мы получим точные оценки максимума модуля и коэффициентов Тейлора функций из классов $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$ (часть 2), на этой основе опишем коэффициентные мультипликаторы из классов Привалова $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$ в классы Харди $H^p\,(0 < p \leqslant +\infty)$ (часть 3).

Заметим, что задача описания тейлоровских коэффициентов аналитических в круге функций была впервые решена выдающимся советским математиком С.Н. Мергеляном для класса Р. Неванлинны в н. 20 века (см. [5]). Аналог результата Мергеляна в классах Харди в круге доказан Г. Харди и Д. Литтлвудом, А.А. Фриданом (см. [19]), в классах В.И. Смирнова, Н. Янагиара [28], в плоских классах Р. Неванлинны, С.В. Шведенко [18], в классах И.И. Привалова Π_q при всех значениях параметра $q > 1$ точные оценки роста функции и коэффициентов Тейлора установил М. Столл в [26], при $0 < q < 1$ — автор этой статьи в [23].

Оценка тейлоровских коэффициентов тесно связана с описанием коэффициентных мультипликаторов в классах Привалова. Как отмечают авторы в [1], в упрощенном виде задача ставится так: на какие множители нужно домножить тейлоровские коэффициенты функций из данного класса, чтобы они стали обладать заданными свойствами; например, были бы ограниченными или образовывали абсолютно сходящийся ряд. Требуя, чтобы полученные произведения были тейлоровскими коэффициентами функций некоторого другого класса, приходим к общему определению коэффициентного мультипликатора.

Определение 1.1. *Пусть X и Y – некоторые классы аналитических в единичном круге D функций. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ называется коэффициентным мультипликатором из класса X в класс Y, если для произвольной функции $f \in X$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in Y$. Обозначается $CM(X,Y)$.*

Описанию мультипликаторов в различных классах голоморфных функций посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых. Отметим некоторые из них: [1], [3], [15], [17], [23], [27].

2. Оценка роста и коэффициентов Тейлора функций из плоских классов Привалова

Всюду далее, если не оговорено иное, будем считать, что $q > 0$. Через $c, c_1, ..., c_n(\alpha, \beta, ...)$ обозначим положительные константы, зависящие от α, β, ...

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Если $f \in \tilde{\Pi}_q$, то*

$$\ln^+ M(r,f) = o((1-r)^{-2/q}), \quad r \to 1-0, \tag{2.1}$$

где $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Доказательство. Выберем произвольно точку $z_0 \in D$. Обозначим

$$K_{z_0} = \{\zeta \in D : |\zeta - z_0| < \frac{1}{2}(1-|z_0|)\},$$

dm_2 – плоская мера Лебега. Из неравенства (см. [22, с. 144, теорема 9.1.1, оценка (9.3)])

$$(\ln^+ |f(z_0)|)^q \leqslant \frac{c(q)}{(1-|z_0|)^2} \int\limits_{K_{z_0}} (\ln^+ |f(\zeta)|)^q dm_2(\zeta),$$

получаем:

$$(\ln^+ |f(z_0)|)^q \leqslant \frac{c(q)}{(1-|z_0|)^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{|z_0|-\frac{1-|z_0|}{2}}^{|z_0|+\frac{1-|z_0|}{2}} (\ln^+ |f(\rho e^{i\theta})|)^q d\rho d\theta,$$

откуда имеем:

$$(\ln^+|f(z_0)|)^q \leqslant \frac{c(q)}{(1-|z_0|)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^1 (\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|)^q d\rho d\theta.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (2.1). □

Теорема 2.2. *Если* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ *– ряд Тейлора функции* $f\in\tilde{\Pi}_q$, *то*

$$\ln^+|a_k| = o\left(k^{\frac{2}{2+q}}\right), \quad k\to+\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из неравенства Коши и оценки (2.1) теоремы 2.1 следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует $r_\varepsilon\in(0,1)$, такое что

$$|a_k| \leqslant r^{-k}\exp\left\{\varepsilon(1-r)^{-\frac{2}{q}}\right\}, \quad r_\varepsilon<r<1, \quad k=0,1,..., \tag{2.3}$$

что равносильно

$$\ln^+|a_k| \leqslant \varepsilon(1-r)^{-\frac{2}{q}} - k\ln r, \quad r_\varepsilon<r<1, \quad k=0,1,.... \tag{2.4}$$

Введем функцию

$$\phi(r)=\varepsilon(1-r)^{-\frac{2}{q}} - k\ln r.$$

Исследуем ее на точную нижнюю грань. Вычислим производную:

$$\phi'(r)=\frac{2\varepsilon}{q}\cdot\frac{1}{(1-r)^{\frac{2}{q}+1}}-\frac{k}{r}.$$

Найдем минимум функции $\phi(r)$, решив уравнение $\phi'(r)=0$:

$$\frac{2\varepsilon}{q}\cdot\frac{r}{(1-r)^{\frac{2}{q}+1}}=k. \tag{2.5}$$

Так как функция в левой части этого равенства возрастает и инъективна, то решение этого уравнения существует и единственно на интервале $(0,1)$. Обозначим точку минимума функции $\phi(r)$ через r_k.

Рассмотрим случай $0<q<1$.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$t_k=\frac{1}{\delta\sqrt{r_k}}; \quad s_k=\frac{1-r_k}{\delta\sqrt{r_k}},$$

где $\delta>1$.

Можно считать, что $s_k<t_k\leqslant 1$. Действительно, неравенство $s_k<t_k$ очевидно.

Далее, $t_k\leqslant 1$ равносильно

$$\sqrt{r_k}\geqslant\frac{1}{\delta}, \tag{2.6}$$

$s_k<1$ равносильно

$$\sqrt{r_k}>\frac{\sqrt{\delta^2+4}-\delta}{2}, \tag{2.7}$$

причем из (2.6) следует (2.7).

В новых обозначениях уравнение (2.5) примет вид:

$$\frac{2\varepsilon}{q\delta^2}\cdot\frac{1}{s_k^2}\cdot\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^{\frac{2}{q}-1}=k$$

или

$$\frac{s_k^{\frac{2}{q}+1}}{t_k^{\frac{2}{q}-1}} = \frac{2\varepsilon}{kq\delta^2}.$$

Так как $t_k \leqslant 1$, то из последнего равенства следует оценка:

$$s_k \leqslant \left(\frac{2\varepsilon}{kq\delta^2}\right)^{\frac{1}{2/q+1}}. \tag{2.8}$$

Из того же равенства получаем:

$$\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^{\frac{2}{q}} = \left(\frac{ks_k^2 q\delta^2}{2\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2-q}}.$$

Принимая во внимание теперь оценку (2.8), получаем:

$$\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^{\frac{2}{q}} \leqslant \left(\frac{q\delta^2}{2\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2+q}} \cdot k^{\frac{2}{2+q}}. \tag{2.9}$$

Используя полученные оценки (2.8), (2.9), оценим значение функции $\phi(r)$ в точке $r = r_k$ ее строгого минимума:

$$\phi(r_k) = \varepsilon(1-r_k)^{-\frac{2}{q}} - k\ln r_k.$$

Принимая во внимание теперь оценку (2.9), получаем:

$$\phi(r_k) \leqslant \varepsilon\left(\frac{q\delta^2}{2\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2+q}} \cdot k^{\frac{2}{2+q}} - k\ln r_k.$$

Для оценки последнего слагаемого заметим, что

$$\frac{(r_k)^{-\frac{1}{2}} - r_k^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\ln r_k\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\ln r_k\right)}{2} = -\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln r_k\right) = \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}\ln r_k\right) = \frac{s_k\delta}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} -\ln r_k =& 2arcsh\frac{s_k\delta}{2} \leqslant 2\frac{s_k\delta}{2}, \\ -k\ln r_k \leqslant& ks_k\delta. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\phi(r_k) \leqslant k^{\frac{2}{2+q}}\varepsilon^{\frac{q}{2+q}}\left(q\delta^2\right)^{\frac{2}{2+q}} \cdot \left(2 + \frac{1}{q\delta}\right). \tag{2.10}$$

Откуда и следует требуемая оценка (2.2).

Рассмотрим случай $q > 1$.

Здесь для удобства введем следующие обозначения:

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{r_k}}; \quad s_k = \frac{1-r_k}{\sqrt{r_k}}.$$

В этом случае $s_k \leqslant 1 \leqslant t_k$.

В новых обозначениях уравнение (2.5) примет вид:

$$\frac{2\varepsilon}{q} \cdot \frac{1}{t_k^2} \cdot \left(\frac{t_k}{s_k}\right)^{\frac{2}{q}+1} = k,$$

что равносильно

$$s_k^{\frac{2}{q}+1} = \frac{2\varepsilon}{qk} \cdot \frac{t_k}{t_k^{2(1-1/q)}},$$

откуда имеем:

$$s_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{qk} \cdot t_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{qk} \cdot \sqrt{s_k^2 + 2}.$$

Окончательно получим следующую оценку для s_k:

$$s_k \leqslant \left(\frac{2\sqrt{3}\varepsilon}{kq} \right)^{\frac{1}{2/q+1}}. \qquad (2.11)$$

Далее рассуждения проводятся аналогичным образом, как в случае $0 < q < 1$. Теорема доказана полностью. □

3. Описание коэффициентных мультипликаторов из классов Привалова в классы Харди

При всех значениях параметра $0 < p < +\infty$ введем в рассмотрение классы Харди в круге:

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi < +\infty \right\},$$

H^∞ – класс ограниченных аналитических в D функций.

В этой части работы мы опишем коэффициентные мультипликаторы, действующие из плоских классов Привалова в классы Харди. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $q > 0$, $0 < p \leqslant +\infty$. *Для того чтобы* $\Lambda = CM(\tilde{\Pi}_q, H^p)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty, \quad c > 0. \qquad (3.1)$$

Доказательство этой теоремы основывается на вспомогательных утверждениях.

Лемма 3.1. *(см.* [1, с. 142, лемма 9.7]*) Пусть F и H — линейные классы голоморфных в единичном круге D функций с метриками, сходимость по которым не слабее равномерной сходимости на компактах внутри D. Тогда любой коэффициентный мультипликатор класса F в класс H является линейным и замкнутым как оператор линейных и метрических пространств F и H.*

Для формулировки следующей леммы введем в классе $\tilde{\Pi}_q$ метрику по правилу:

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta dr, \quad 0 < q < 1,$$

$$\rho(f, g) = \left(\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta dr \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q > 1.$$

Лемма 3.2. *Относительно введенной метрики $\tilde{\Pi}_q$ образует F-пространство.*

Доказательство. Пусть $0 < q < 1$, случай $q > 1$ доказывается аналогично.

Доказательство данного утверждения эквивалентно установлению следующих свойств метрики (см. [11]):

а) $\rho(f, g) = \rho(f - g, 0)$ – очевидно;

б) $\tilde{\Pi}_q$ – полное метрическое пространство.

Пусть $\{f_n\}$ – произвольная фундаментальная последовательность из класса $\tilde{\Pi}_q$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $n, m > N$ выполняется $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$. Покажем, что она сходится к некоторой функции $f \in \tilde{\Pi}_q$. Заметим, что функции $\ln(1+|f_n|)$ – субгармонические в D. Снова используя оценку из [22, с. 144, теорема 9.1.1], получим:

$$\ln^q(1+|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|) \leqslant \frac{c(q)}{(1-R)^2}\cdot \rho(f_n, f_m),$$

откуда

$$|f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})| \to 0, \quad n, m \to +\infty,$$

при всех $0 < r < R < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, фундаментальная последовательность $\{f_n\} \in \tilde{\Pi}_q$ равномерно сходится внутри круга D к некоторой функции $f \in H(D)$.

Докажем, что $f \in \tilde{\Pi}_q$.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(\ln^+|f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr &\leqslant \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(\ln(1+|f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr \\ &\leqslant \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\ln^q\left(1+|f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})| + |f_n(re^{i\theta})|\right) d\theta dr.\end{aligned}$$

Так как для любых $a > 0$, $b > 0$ справедливо неравенство $(a+b)^q \leqslant (a^q + b^q)$ при $0 < q < 1$ и $(a+b)^q \leqslant 2^q(a^q+b^q)$ при $q > 1$, то из последней оценки имеем:

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(\ln^+|f(re^{i\theta})|)^q d\theta \leqslant \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln^q(1+|f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|) + \ln^q(1+|f_n(re^{i\theta})|)\right] d\theta dr \leqslant const.$$

Значит, $\tilde{\Pi}_q$ полно.

в) Если f, $f_n \in \Pi_q$ и $\rho(f_n, f) \to 0$, $n \to +\infty$, то для любого $\beta \in \mathbb{C}$ $\rho(\beta f_n, \beta f) \to 0$, $n \to +\infty$.

При $|\beta| < 1$ сразу следует свойство. Предположим, что $|\beta| > 1$. Можно считать, что $\beta > 1$. Так как последовательность $\{f_n\}$ сходится, то она фундаментальная. Но из фундаментальности, как установлено выше, следует равномерная сходимость указанной последовательности внутри D.

Поскольку для любого $\beta \geqslant 1$ и $x \geqslant 0$ справедлива оценка $(1+\beta x) \leqslant (1+x)^\beta$, то

$$\begin{aligned}\rho(\beta f_n, \beta f) &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\ln^q(1+\beta|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|)d\theta dr \\ &\leqslant \beta^q\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\ln^q(1+|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|)d\theta dr = \beta^q\rho(f_n, f),\end{aligned}$$

откуда следует свойство в).

г) Если β_n, $\beta \in \mathbb{C}$ и $\beta_n \to \beta$, то $\rho(\beta_n f, \beta f) \to 0$, $n \to +\infty$ для любой функции $f \in \tilde{\Pi}_q$. Это свойство следует из неравенства

$$\ln(1+|\beta_n - \beta||f|) \leqslant \ln(1+|f|) + \ln(1+|\beta_n - \beta|).$$

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c_k \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty \tag{3.2}$$

для произвольной положительной последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $c_k \downarrow 0$, $k \to +\infty$. *Тогда найдется число* $c > 0$ *такое, что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *будет выполняться условие* (3.2).

Доказательство леммы 3.3 повторяет рассуждения, проведенные в работе [27] (см. лемму 1) с показателем степени $\frac{2}{2+q}$.

Лемма 3.4. *Пусть*

$$g(z) = \exp\frac{c}{(1-z)^{\frac{2}{q}}}, \quad z \in D, \tag{3.3}$$

где $0 < c < \frac{2}{q}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(c) z^n$ *– ряд Тейлора функции* g. *Тогда справедлива оценка:*

$$|a_n(c)| \geqslant \exp(c^{\frac{q}{2+q}} \cdot n^{\frac{2}{2+q}}). \tag{3.4}$$

Метод доказательства леммы 3.4 повторяет рассуждения, проведенные в диссертации автора этой статьи [7] с показателем $\frac{2}{q}$, и восходит к С.Н. Мергеляну (см. [5]).

Как показано выше, из сходимости $\rho(f_n, f) \to 0$, $n \to +\infty$ следует равномерная сходимость последовательности функций $f_n(z)$ к функции $f(z)$ в D. Следовательно, если $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} z^k$ и $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, то $a_k^{(n)} \to a_k$, $n \to +\infty$.

Пусть X — F-пространство, состоящее из комплексных последовательностей $\{b_k\}_k$ таких, что сходимость последовательности $\beta^{(n)} = \{b_k^{(n)}\}$ к $\beta = \{b_k\}$ при $n \to +\infty$ предполагает покоординатную сходимость $b_k^{(n)} \to b_k$, $n \to +\infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим коэффициентный мультипликатор $\Lambda = CM(\tilde{\Pi}_q, X)$. По лемме 3.1 Λ - замкнутый оператор, следовательно, по теореме о замкнутом графике (см. [11]) Λ - непрерывный оператор, и отображает ограниченные в классе $\tilde{\Pi}_q$ множества в ограниченные в классе X множества.

Докажем теперь теорему 3.1.

Доказательство. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - мультипликатор из класса $\tilde{\Pi}_q$ в класс Харди H^p $(0 < p \leqslant \infty)$. Докажем, что существует $c > 0$ такое, что выполняется оценка (3.1), то есть

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty.$$

Согласно лемме 3.3, нам достаточно показать, что последовательность Λ удовлетворяет условию (3.2) для произвольной положительной бесконечно малой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Итак, пусть дана произвольная положительная бесконечно малая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $\{c'_k\}_{k=1}^{+\infty}$,

$$c'_k = \min\left(\frac{1}{2}, \max\left(k^{-1/q}, c_k\right)\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Если условие (3.2) выполнятся для этой последовательности, то оно остается справедливым и для последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому можно предполагать, что члены последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ удовлетворяют следующему условию:

$$k^{-\frac{1}{q}} \leqslant c_k \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

при всех $k = 1, 2, ...$ Рассмотрим в классе $\tilde{\Pi}_q$ последовательность функций, удовлетворяющих условиям леммы 3.4:

$$f_k(z) = g(r_k z) = \exp \frac{c_k}{(1 - r_k z)^{\frac{2}{q}}}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.6}$$

где последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такова, что $r_k \to 1 - 0$, $k \to +\infty$, и

$$1 - \frac{1}{k} \leqslant r_k \leqslant 1 - \exp\left\{ - \left(\frac{\gamma_k}{c_k} \right)^q \right\}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.7}$$

здесь $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – положительная бесконечно малая последовательность такая, что $c_k = o(\gamma_k), \quad k \to +\infty$.

Покажем, что $f_k \in \tilde{\Pi}_q$.

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f_k(re^{i\theta})|)^q d\theta dr = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left| \exp \frac{c_k}{(1 - r_k re^{i\theta})^{\frac{2}{q}}} \right| \right)^q d\theta dr$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_k^q}{|1 - r_k re^{i\theta}|^2} d\theta \leqslant \int_0^1 \frac{c_k^q}{(1 - r_k r)} dr = c_k^q \ln \frac{1}{1 - r_k} = \gamma_k^q.$$

Покажем, что $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – ограниченная последовательность в классе $\tilde{\Pi}_q$, то есть докажем, что существует такое действительное число $0 < \lambda < 1$, что при всех натуральных k выполняется неравенство $\rho(\lambda f_k, 0) < \varepsilon$, где ε – фиксированное положительное число (см. [11, с. 31]). Для этого докажем сначала неравенство

$$\ln(1 + |\lambda||g|) \leqslant (\ln(1 + |\lambda|) + \ln^+ |g|). \tag{3.8}$$

Действительно, если $|g| \leqslant 1$, то $|\lambda||g| \leqslant |\lambda|$, и сразу следует оценка (3.8).

Если $|g| \geqslant 1$, то $\ln(1 + |\lambda||g|) \leqslant \ln(|g| + |\lambda||g|) \leqslant \ln(1 + |\lambda|) + \ln^+ |g|$.

Докажем теперь неравенство $\rho(\lambda f_k, 0) < \varepsilon$. Пусть $0 < q < 1$ (для $q > 1$ проверяется аналогично)

$$\rho(\lambda f_k, 0) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q(1 + |\lambda f_k(re^{i\theta})|) d\theta dr \leqslant 2\pi \left(\ln^q(1 + |\lambda|) + (\gamma_k)^q \right).$$

Поскольку $\gamma_k = o(1)$, $k \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $k \geqslant k_0$ будет выполняться неравенство $\gamma_k < \sqrt[q]{\frac{\varepsilon}{4\pi}}$. Выбрав такое λ_{k_0}, что $\ln(1 + |\lambda_{k_0}|) < \sqrt[q]{\frac{\varepsilon}{4\pi}}$, получим, что, начиная с номера k_0, все элементы последовательности $\{f_k\}$ будут содержаться в шаре радиуса ε.

Так как $\tilde{\Pi}_q$ — F-пространство, то для всех номеров $k < k_0$ найдется такое положительное число λ_k, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \leqslant \lambda_k$ будет выполнено $\rho(\lambda f_k, 0) < \varepsilon$. Полагая $\lambda_0 = \min(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k_0})$, получим, что при $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ вся последовательность $\{f_k\}$ будет содержаться в шаре радиуса ε, т.е. $\rho(\lambda f_k, 0) < \varepsilon$.

В силу произвольности выбора ε, заключаем, что $\{f_k\}$ – ограниченная последовательность в классе $\tilde{\Pi}_q$.

Итак, мы показали, что при всех натуральных k последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ограничена в $\tilde{\Pi}_q$, значит, и мультипликатор $\Lambda(f_k)$ ограничен в классе H^p.

Имеем:

$$\|\Lambda(f_k)\|_{H^p} \leqslant C, \quad C > 0.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$.

Если $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n \in \tilde{\Pi}_q$, то $\Lambda(f_k)(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n^{(k)} z^n \in H^p$, а значит, (см. [19, с. 98])

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leqslant c_p \|\Lambda(f_k)\|_{H^p} \cdot n^{\frac{1}{p}-1}, \quad \text{если} \quad 0 < p < 1,$$
$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leqslant c_p \|\Lambda(f_k)\|_{H^p}, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

откуда

$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leqslant C \cdot c_p \cdot n^{\frac{1}{p}-1}, \quad \text{если} \quad 0 < p < 1, \tag{3.9}$$
$$|\lambda_n a_n^{(k)}| \leqslant C \cdot c_p, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \tag{3.10}$$

где c_p — положительная константа, зависящая от параметра p.

Так как $f_k(z) = g(r_k z)$, то $a_n^{(k)} = a_n(c_k) r_k^n$. Согласно лемме 3.4,

$$|a_n^{(k)}| \geqslant r_k^n \exp\left(c_k^{\frac{q}{2+q}} n^{\frac{2}{2+q}}\right).$$

Учитывая неравенство (3.7), получим:

$$|a_k^{(k)}| \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \exp\left(c_k^{\frac{q}{2+q}} n^{\frac{2}{2+q}}\right). \tag{3.11}$$

Из (3.9), (3.11) заключаем:

$$|\lambda_k| \leqslant C \cdot c'_p \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-k} \cdot k^{\frac{1}{p}-1} \cdot \exp\left(c_k^{\frac{q}{2+q}} n^{\frac{2}{2+q}}\right),$$

откуда с учетом оценки (3.5) будем иметь:

$$|\lambda_k| \leqslant \widetilde{C} \exp\left(c_k^{\frac{q}{2+q}} n^{\frac{2}{2+q}}\right). \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12), применив лемму 3.3, делаем вывод о справедливости оценки (3.1). Аналогично при $1 \leqslant p < +\infty$ из (3.10), (3.12) получаем требуемую оценку.

Докажем обратное утверждение теоремы 3.1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ удовлетворяет условию (3.1) теоремы и $f \in \tilde{\Pi}_q$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Из теоремы 2.2 следует, что

$$|a_k| \leqslant C_1 \exp\left(\varepsilon_k k^{\frac{2}{2+q}}\right),$$

$\varepsilon_k \downarrow 0$, $k \to +\infty$.

Подбирая номер k_0 таким образом, чтобы $\varepsilon_k < \frac{c}{2}$ при всех $k \geqslant k_0$, получим:

$$|\lambda_k a_k| \leqslant C_2 \exp\left(-\frac{c}{2} k^{\frac{2}{2+q}}\right).$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{c}{2} k^{\frac{2}{2+q}}\right)$ сходится, то $\Lambda(f)(z) \in H^p$. Теорема 3.1 доказана. □

Замечание 3.1. *Отметим, что метод доказательства теоремы* 3.1 *восходит к работе* [27] *Н. Янагиара. Утверждение теоремы* 3.1 *останется справедливым и в случае, если вместо класса Харди взять класс Бергмана* A^p_α,

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-r)^\alpha |f(re^{i\theta})|^p d\theta r dr < +\infty \right\}, \quad p > 0, \quad \alpha > -1,$$

или класс $\tilde{\Pi}_{q'}$ $(0 < q < q')$.

Замечание 3.2. *Непосредственным следствием доказанной теоремы* 3.1 *служит утверждение о неулучшаемости оценок, полученных в теоремах* 2.2 *и* 2.1. *Доказательство неулучшаемости оценок проводится аналогичным образом, как в работе Р. Мештровича (см.* [1, с. 152], *Следствия 9.24, 9.26).*

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Гаврилов, А.В. Субботин, Д.А. Ефимов. *Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад).* Изд. МГУ, Москва (2012).
2. Р. Неванлинна. *Однозначные аналитические функции.* ГИТТЛ, Москва – Ленинград (1941).
3. М.А. Евграфов. *Поведение степенного ряда для функций класса H_δ на границе круга сходимости* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **16**:5, 481–492 (1952).
4. И.И. Привалов. *Граничные свойства однозначных аналитических функций.* Изд. МГУ, Москва (1941).
5. И.И. Привалов. *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва – Ленинград (1950).
6. Е.Г. Родикова. *Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций* // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения», Петрозаводск, 64–69 (2012).
7. Е.Г. Родикова. *Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций.* Диссертация . . . к.ф.-м.н. Брянск, 2014 г.
8. Е.Г. Родикова. *О свойствах нулей функций из классов И.И. Привалова в круге* // Ученые записки Брянского государственного университета. 4, 19–22 (2019).
9. Е.Г. Родикова. *Об интерполяционных последовательностях в пространстве И.И. Привалова* // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», оз. Банное, 52–53 (2020).
10. Е.Г. Родикова, В.А. Беднаж. *Об интерполяции в классах И.И. Привалова в круге* // Сиб. электрон. матем. изв. **16**, 1762–1775 (2019).
11. У. Рудин. *Функциональный анализ.* Мир, Москва (1975).
12. Ф.А. Шамоян. *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций* // Сиб. матем. журн., **40**:6, 1422–1440 (1999).
13. Ф.А. Шамоян. *Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой.* РИО БГУ, Брянск (2014).
14. Ф.А. Шамоян. *О некоторых свойствах нулевых множеств класса И.И. Привалова в круге* // Записки научн. семин. ПОМИ. **480**, 199–205 (2019).
15. Ф.А. Шамоян, Е.Н. Шубабко. *Об одном классе голоморфных в круге функций* // Зап. научн. сем. ПОМИ, Исследования по линейным операторам и теории функций. **282**, 244–255 (2001).
16. Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, О.В. Приходько. *О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций* // Вест. Брянского гос. унив.: естественные и точные науки. 4, 85–92 (2008).
17. С.В. Шведенко. *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. **23**, 3–124 (1985).
18. С.В. Шведенко. *О скорости роста и коэффициентах Тейлора функций класса Неванлинны* $\mathbf{N}$ *по площади* // Изв. вузов. Матем. **6**, 40–43 (1986).

19. P.L. Duren. *Theory of H^p spaces*. Pure and Appl. Math., vol. 38, Academic Press, NY (1970).
20. O. Frostman. *Sur les produits des Blaschke* // Kungl. Fysiografiska Sallskapets i Lund Forhandlingar, Proa. Roy. Physiog. Soa. Lund. **12**:15, 169–182 (1942).
21. W.K. Hayman, B. Korenblum. *A critical growth rate for functions regular in a disk* // Michigan Math. J. **27**, 21–30 (1980).
22. M. Pavlovic. *Introduction to function spaces in a disk*. Matematicki Institut SANU, Beograd (2004).
23. E.G. Rodikova. *Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **11**:6, 723–732 (2018).
24. E.G. Rodikova. *Multiple interpolation in the Privalov classes in a disk* // Filomat. **35**:1, (2021) (принято в печать).
25. E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan. *On the differentiation in the Privalov classes* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:5, 622–630 (2020).
26. M. Stoll. *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions* // Ann. Polon. Math. **35**:2, 139–158 (1977).
27. N. Yanagihara. *Multipliers and linear functionals for the class N^+* // Transactions of the Amer. Math. Soc. **180**, 449–461 (1973).
28. N. Yanagihara. *Mean growth and Taylor coefficients of some classes of functions* // Ann. Polon. Math. **30**, 37–48 (1974).

Евгения Геннадьевна Родикова,
Брянский государственный университет,
ул. Бежицкая, 14,
241050, г. Брянск, Россия
E-mail: evheny@yandex.ru