ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 65-81.

УДК 517.968.72

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Н.А. РАУТИАН

Аннотация. Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина – Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупугости и теории распространения тепла.

Представленные результаты базируются на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Представлены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Установлено экспонециальное убывание полугруппы при известных предположениях для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость исходной начальной задачи для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с соответсвующими оценками решения.

Предлагаемый подход может быть также использован для исследования других интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегральные слагаемые вида вольтерровой свертки.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, полугруппы операторов.

Mathematics Subject Classification: 47G20, 45K05, 35R09, 47D06

1. Введение

Мы будем рассматривать абстрактное интегро-дифференциальное уравнение, возникающее в теории линейной вязкоупругости, представляя общую схему, которую можно применить ко многим другим линейным моделям, содержащим вольтерровы интегральные

N.A. Rautian, Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations.

Исследование выполнено в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288 А).

Поступила 27 февраля 2021 г.

операторы. Указанное абстрактное интегро-дифференциальное уравнение может быть реализовано как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) =&\rho^{-1}\left[\mu\Delta u(x,t) + (\mu+\lambda)/3\cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,t))\right] \\ &-\int_0^t K(t-\tau)\rho^{-1}\mu\left[\Delta u(x,\tau) + 1/3\cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,\tau))\right]d\tau \\ &-\int_0^t Q(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\left[1/3\cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,\tau))\right]d\tau + f(x,t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ρ, постоянная плотность $\rho > 0$, λ, μ – положительные параметры (коэффициенты Ламе) (см. [1]–[6]). Будем предполагать, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$. Функция ядер интегральных операторов $K(t)$, $Q(t)$ – положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды.

Вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями являются также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина – Пипкина (см. [6]–[10]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [11]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегро-дифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1]–[20] и их библиографию).

Представленные в данной работе результаты базируются на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, и являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [13]–[17], посвященных спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Подход к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, связанный с применением теории полугрупп, развивался в работах [4], [6], [18]–[20].

2. Определения. Обозначения. Постановка задачи

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$) оператор, действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Пусть B – симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $Dom\,(B)$ ($Dom\,(A) \subseteq Dom\,(B)$), неотрицательный $(Bx, x) \geqslant 0$, для любых $x, y \in Dom\,(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\,\|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in Dom\,(A)$, I – тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)\,u(t) - \sum_{k=1}^{N}\int_0^t R_k(t-s)\,(a_kA + b_kB)\,u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.2}$$

где $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $k = 1, ..., N$. Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) - \text{положительные невозрастающие функции, } R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = 1, ..., N. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *Из условий* (2.3) *следует, что* $\lim\limits_{t\to+\infty} R_k(t) = 0, \quad k = 1, ..., N.$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(a_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1, \qquad \sum_{k=1}^{N}\left(b_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1. \tag{2.4}$$

Положим

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s)ds = \int_0^{+\infty} R_k(t+s)ds, \quad k = 1, ..., N. \tag{2.5}$$

Пусть

$$\begin{gathered} A_0 = \left(1 - \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)A + \left(1 - \sum_{k=1}^{N}\left(b_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)B, \\ A_k = a_kA + b_kB. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Из известного результата (см. [21], с. 361) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряженными и положительными, для всех $k = 1, ..., N$.

Отметим, что задачи вида (2.1), (2.2) являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [1]–[3]) и теплофизике (см. [6]–[10]). Спектральный анализ уравнения (2.1) в случае, когда ядра $R_k(t)$ представляют собой убывающие экспоненты или функции Работнова (см. [5]), проводился в работах [13]–[17].

Превратим область определения $Dom(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 2.2. *Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см.* [22]*) следует, что операторы A_0, A_k являются обратимыми для всех $k = 1, ..., N$, операторы $Q_k := A_k^{1/2}A_0^{-1/2}$ – допускают ограниченное замыкание в H для всех $k = 1, ..., N$, A_0^{-1} – ограниченный оператор (см.* [21]*).*

Определение 2.1. *Будем называть вектор-функцию $u(t)$ классическим решением задачи* (2.1), (2.2)*, если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t)$, $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению* (2.1) *для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию* (2.2)*.*

Через $L^p_\omega(\mathbb{R}_+, H)$ обозначим весовое пространство L^p вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$||u||_{L^p_\omega(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} \omega(s)||u(s)||^p_H ds\right)^{1/p}.$$

3. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (2.1), учитывая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} R_k(t)=0$, получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A_0u(t)+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(\int_{t-s}^{+\infty}R_k(p)dp\right)A_k\frac{du(s)}{ds}ds=f(t)-\sum_{k=1}^{N}M_k(t)A_ku(0). \tag{3.1}$$

Заметим, что $A_k=A_0^{1/2}Q_k^*Q_kA_0^{1/2}$, тогда уравнение (3.1) можно переписать в следующем виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A_0^{1/2}\left[A_0^{1/2}u(t)+\sum_{k=1}^{N}Q_k^*\int_0^t M_k(t-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}ds\right]=f_1(t),$$

где $f_1(t)=f(t)-\sum\limits_{k=1}^{N}M_k(t)A_ku(0)$. Введем новые переменные

$$v(t):=u'(t),\quad \xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t M_k(t+\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}ds=\int_0^t R_k(t+\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}ds, \tag{3.2}$$
$$t,\tau>0,\quad k=1,...,N.$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\xi_k(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t R_k(t+\tau-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)ds+R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(t).$$

Тогда задача (2.1), (2.2) может быть приведена к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}+A_0^{1/2}\left[\xi_0(t)+\sum\limits_{k=1}^{N}Q_k^*\displaystyle\int_0^{+\infty}\xi_k(t,\tau)d\tau\right]=f_1(t),\\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt}=A_0^{1/2}v(t),\\ \dfrac{d\xi_k(t,\tau)}{dt}=R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(t)+\dfrac{\partial}{\partial\tau}\xi_k(t,\tau),\quad k=1,...,N,\end{cases} \tag{3.3}$$

где $t,\tau>0$, $f_1(t)=f(t)-\sum\limits_{k=1}^{N}M_k(t)A_ku(0)$, $M_k(t)$ определяется формулами (2.5),

$$v(t)|_{t=0}=\varphi_1,\quad \xi_0(t)|_{t=0}=A_0^{1/2}\varphi_0,\quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0}=0,\quad \tau>0,\quad k=1,...,N. \tag{3.4}$$

Теперь наша основная цель состоит в следующем.

Во-первых, мы должны превратить (3.3), (3.4) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной.

Во-вторых, мы должны установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (3.3), (3.4) и решением исходной задачи (2.1), (2.2).

4. Задача Коши и полугруппа операторов в расширенном функциональном пространстве

На первом этапе построения функционального пространства, в котором задача (3.3), (3.4) будет корректной, мы должны корректно определить оператор $\partial_\tau := \frac{\partial}{\partial\tau}$, присутствующий в третьем уравнении системы (3.3).

Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$||u||_{\Omega_k} = \left(\int\limits_0^{+\infty} r_k(s)||u(s)||^2_H ds \right)^{1/2}, \quad r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad k = 1, ..., m.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [19], p. 33): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $T_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения

$$D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\},$$

является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [19], p. 66).

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\oplus_{k=1}^N \Omega_k\right)$, снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), ..., \xi_N(\tau))\|^2_{\mathbb{H}} = ||v||^2_H + ||\xi_0||^2_H + \sum_{k=1}^N ||\xi_k||^2_{\Omega_k}, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), ..., \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H} : \quad v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau \in H_{1/2}, \right.$$

$$\left. \xi_k(\tau) \in D(T_k), \quad k = 1, ..., N \right\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), ..., \xi_N(\tau))$$

$$= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau \right], \quad A_0^{1/2}v, \quad R_k(\tau)Q_k A_0^{1/2}v + T_k\xi_k(\tau), \quad k = 1, ..., N \right).$$

Введем $(2 + N)$ – компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), ..., \xi_N(t,\tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), ..., \xi_{N0}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем переписать систему (3.3), (3.4) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{4.1}$$

$$Z(0) = z. \tag{4.2}$$

Определение 4.1. *Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), ..., \xi_N(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ называется классическим решением задачи (4.1), (4.2), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1((0, +\infty), H)$, $\xi_k(t,\tau) \in C^1((0, +\infty), H)$ для любого $\tau > 0$, $k = 1, ..., N$, $Z(t) \in C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (4.1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (4.2).*

Определение 4.2 (см. [22]). *Линейный оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется диссипативным, если* $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ *при* $x \in D(A)$ *и максимально диссипативным, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.*

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4). *Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $D(\mathbb{A})$, *является максимально диссипативным.*

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4). *Тогда линейный оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$, *при этом решение задачи* (4.1), (4.2) *представимо в виде:* $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, *и для любого* $z \in D(\mathbb{A})$ *справедливо энергетическое равенство:*

$$\frac{d}{dt}||S(t)z||^2_{\mathbb{H}} = -\sum_{k=1}^{N}\left(\lim_{\tau\to 0+} r_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||^2_H + \int\limits_0^{+\infty} r'_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\tau\right). \qquad (4.3)$$

Замечание 4.1. *Поскольку функции* $r_k(\tau)$ *являются монотонными, то, согласно* [23] *(с. 372), их производные* $r'_k(\tau)$ *существуют почти всюду при* $\tau \in [0, +\infty)$.

Доказательства теорем 4.1, 4.2 содержатся в статье [12].

5. Экспоненциальная устойчивость полугруппы $S(t)$

Предположим, что ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k = 1, ..., N$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R'_k(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leqslant 0, \qquad (5.1)$$

для некоторого $\gamma > 0$ и для любого $\tau > 0$. Условие (5.1) хорошо известно в литературе и использовалось разными авторами для доказательства экспоненциальной устойчивости полугрупп, связанных с различными уравнениями с памятью (см., например монографию [6], а также цитированную в ней литературу).

Приведем результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t), t \geqslant 0$ в предположении, что H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство.

Теорема 5.1. *Пусть* $S(t)z$ *– решение задачи* (4.1), (4.2) *при* $t > 0$ *и пусть функции* $R_k(\tau)$ $(k = 1, ..., N)$ *удовлетворяют условиям* (2.3), (2.4) *и условию* (5.1) *для некоторого* $\gamma > 0$ *и любого* $\tau > 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} \qquad (5.2)$$

для любого $z \in \mathbb{H}$. *При этом* $\omega = \max\limits_{\beta>0} \omega_\beta, \quad \omega_\beta = \dfrac{1}{6}\min\left\{\dfrac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}; \dfrac{1}{\gamma_2(\beta)}\right\}$,

$$\gamma_1(\beta) := \max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{3}{2}\frac{M_k(0)}{M(\beta)}\left[\frac{1}{M_k(\beta)}\left(6\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_k\beta^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N\left(\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \left(1 + \frac{2}{3}M(\beta)\right)\|Q_k\|^2\right)\right] + \frac{1}{2}\right\},$$

$$\gamma_2(\beta) := \frac{3}{M(\beta)}\max\left\{1,\ N\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

$\lambda_k = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in Dom(A_k)}} (A_k x, x)$, $k = 0, ..., N$, $M_k(\beta) := \int\limits_\beta^{+\infty} R_k(s)ds$, $k = 1, ..., N$, $M(\beta) := \sum\limits_{k=1}^{N} M_k(\beta)$.

6. Корректная разрешимость

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \tag{6.1}$$

$$Z(0) = z, \tag{6.2}$$

которая соответствует задаче для однородного уравнения (4.1), (4.2). Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), \underbrace{0,...0}_{N+1})$, $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{N} M_k(t)A_k\varphi_0$, вектор имеет вид $z = \left(\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \underbrace{0...0}_{N}\right)$.

Теорема 6.1. *Пусть функции* $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяют условиям* (2.3), (2.4), (5.1) *и выполнены следующие условия:*
1) вектор-функция $A_0^{1/2}f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, *векторы* $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$; *или*
2) вектор-функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, ..., N$, *векторы* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.
Тогда задача (6.1), (6.2) *имеет единственное классическое решение*

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), ..., \xi_N(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ – *классическое решение задачи* (2.1), (2.2) *и справедлива следующая оценка*

$$\left(\|u'(t)\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\right)e^{-2\omega t} + \sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\int_s^{+\infty} R_k(p)dp\right)ds\right)^2 \|A_k\varphi_0\|_H^2 + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}||f(s)||ds\right)^2\right] \tag{6.3}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* F, *векторов* φ_0, φ_1 *и постоянной* ω, *определенной в формулировке теоремы 5.1.*

7. Свойства полугрупп левых сдвигов $L_k(t)$ в пространствах Ω_k

Следующие утверждения понадобятся нам для доказательства теоремы 5.1.

Замечание 7.1. *Если* $\xi \in D(T_k)$, *то* $||\xi(\tau)||_H \in C(\mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} ||\xi(\tau)||_H = 0$.

Доказательство. Действительно, для любого $\tau > 1$ функция $\xi(\tau)$ является абсолютно непрерывной на $[1, \tau]$ со значениями в H и $\xi(\tau) = \xi(1) + \int\limits_1^\tau \partial_s\xi(s)ds$. С другой стороны,

$$\int_1^\tau ||\partial_s\xi(s)||_H ds = \int_1^\tau \sqrt{R_k(s)}\sqrt{r_k(s)}||\partial_s\xi(s)||_H ds$$

$$\leqslant \left(\int_1^\tau R_k(s)ds \right)^{1/2} \left(\int_1^\tau r_k(s)||\partial_s \xi(s)||_H^2 ds \right)^{1/2} \leqslant M_k(1)||\partial_s \xi(s)||_{\Omega_k}.$$

Таким образом, предел $\lim\limits_{\tau\to\infty} \int\limits_1^\tau \partial_s \xi(s)ds$ существует в H и, следовательно, предел $\lim\limits_{\tau\to\infty} \xi(\tau)$ существует в H. Поскольку функция $r_k(s)||\xi(s)||_H^2$ является суммируемой и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} r_k(\tau) = +\infty$, то для этого необходимо, чтобы $\lim\limits_{\tau\to\infty} \xi(\tau) = 0$ в H. □

Замечание 7.2. *Согласно* [19], *полугруппа* $(L_k(t))_{t\geqslant 0}$ *является сжимающей на пространстве* Ω_k.

Лемма 7.1. *Пусть* $\xi \in \Omega_k$. *Тогда:*
1) функция $\xi \in L^1(\mathbb{R}_+, H)$ *и справедливо неравенство* $\int\limits_0^{+\infty} ||\xi(s)||_H ds \leqslant \sqrt{M_k(0)}||\xi(\tau)||_{\Omega_k}$;
2) функция $\int\limits_t^{+\infty} ||\xi(s)||_H ds$ *принадлежит пространству* $C[0, +\infty)$ *и стремится к нулю, при* $t \to +\infty$.

Доказательство. 1. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_0^{+\infty} ||\xi(s)||_H ds = \int_0^{+\infty} \sqrt{R_k(s)}\sqrt{r_k(s)}||\xi(s)||_H ds \leqslant \sqrt{M_k(0)}||\xi(\tau)||_{\Omega_k}.$$

2. Указанное свойство очевидным образом вытекает из суммируемости функции $\|\xi\,(\tau)\|$. □

Из утверждения следующей леммы вытекает диссипативность оператора $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Лемма 7.2. *Для любого* $\xi \in D(T_k)$: $\int\limits_0^{+\infty} r'_k(s)||\xi(s)||_H^2 ds < \infty$ *и существует предел* $\lim\limits_{\tau\to 0} r_k(\tau)||\xi(\tau)||_H^2$ *(равный нулю, если* $\lim\limits_{\tau\to 0} r_k(\tau) = 0$*). Кроме того, справедливо равенство*

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle \partial_\tau \xi(\tau), \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = -\lim_{\tau\to 0} r_k(\tau)||\xi(\tau)||_H^2 - \int_0^{+\infty} r'_k(s)||\xi(s)||_H^2 ds \leqslant 0. \tag{7.1}$$

Доказательство леммы 7.2 приведено в статье [12].

8. Доказательство теоремы 5.1

Доказательство. Учитывая сильную непрерывность полугруппы $S(t)$, неравенство (5.2) достаточно доказать, для любого $z \in D(\mathbb{A})$. Фиксируем

$$z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), ..., \xi_{N0}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$$

для любого $\tau > 0$ и обозначим $S(t)z = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), ..., \xi_N(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$.

Введем обозначение (энергию)

$$E(t) = \frac{1}{2}\,\|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{8.1}$$

Выражая неравенства (5.1) через функции $r_k(\tau)$, получим следующие неравенства

$$r'_k(\tau) \geqslant \gamma r_k(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \quad k = 1, ..., N.$$

Принимая во внимание энергетическое равенство (4.3), получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &\leqslant -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty} r'_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||_H^2 d\tau \\ &\leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty} r_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||_H^2 d\tau = -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Для заданного $\beta > 0$ определим непрерывную функцию $\rho(\tau) : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$

$$\rho(\tau) = \begin{cases}\beta^{-1}\tau, \ \tau \leqslant \beta, \\ 1, \ \tau > \beta.\end{cases}$$

Рассмотрим следующие вектор-функции:

$$\Phi_1(t) = -\int_0^{\infty}\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t), \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau,$$

$$\Phi_2(t) = \left\langle A_0^{-1/2}v(t), \xi_0(t)\right\rangle_H.$$

Утверждение 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$|\Phi_1(t)| \leqslant \max\left\{1, \ N\cdot\max_k\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\right\}E(t), \tag{8.3}$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}E(t), \tag{8.4}$$

где $\lambda_k = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in Dom(A_k)}}(A_k x, x)$, $k = 0, ..., N$, $M_k(\beta) := \int\limits_{\beta}^{+\infty} R_k(s)ds$, $k = 1, ..., N$.

Доказательство. Согласно лемме 7.1, имеют место оценки

$$\int_0^{+\infty}||\xi_k(s)||_H ds \leqslant \sqrt{M_k(0)}||\xi_k(\tau)||_{\Omega_k}, \quad k = 1, ..., N. \tag{8.5}$$

Таким образом, справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned}|\Phi_1(t)| &\leqslant \int_0^{\infty}\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left|\left\langle A_k^{-1/2}v(t), \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H\right|d\tau \leqslant ||v(t)||_H\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^{\infty}||\xi_k(t,\tau)||_H d\tau \\ &\leqslant ||v(t)||_H\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \leqslant \frac{1}{2}\left[||v(t)||_H^2 + \left(\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}\right)^2\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[||v(t)||_H^2 + N\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k(0)}{\lambda_k}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[||v(t)||_H^2 + N\cdot\max_k\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2\right] \\ &\leqslant \max\left\{1, \ N\cdot\max_k\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\right\}E(t),\end{aligned}$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \left\|A_0^{-1/2}v(t)\right\|_H \|\xi_0(t)\|_H \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\left(||v(t)||_H^2 + \|\xi_0(t)\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}E(t),$$

где $\lambda_k = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in Dom(A_k)}} (A_k x, x),\ \ k = 0, ..., N, \quad M_k(\beta) := \int\limits_{\beta}^{+\infty} R_k(s)ds,\ \ k = 1, ..., N.$ □

Лемма 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда для любого $\beta > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leqslant M(\beta)\left[\frac{||\xi_0||_H^2}{12} - \frac{||v||_H^2}{2}\right] + \sum_{k=1}^{N}\tilde{c}_k||\xi_k||^2_{\Omega_k}, \tag{8.6}$$

где $M(\beta) := \sum\limits_{k=1}^{N} M_k(\beta)$,

$$\tilde{c}_k := \frac{M_k(0)}{2}\left[\frac{1}{M_k(\beta)}\left(6\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_k\beta^2}\right) + N\left(\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \|Q_k^*\|^2\right)\right].$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_1(t) = &-\int\limits_0^\infty \rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}\frac{d}{dt}v(t), \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau \\ &-\int\limits_0^\infty \rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t), \frac{\partial}{\partial t}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Оценим теперь выражения в правой части последнего равенства (8.7), используя уравнение (4.1) и лемму 7.1. Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned}&-\int\limits_0^\infty \rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}\frac{d}{dt}v(t), \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau = \int\limits_0^\infty \rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}A_0^{1/2}\xi_0(t), \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau \\ &+\int\limits_0^\infty \rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}A_0^{1/2}Q_j^*\int_0^\infty \xi_j(t,\tau')d\tau', \xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau \\ =&\sum_{k=1}^{N}\left\langle Q_k^{*-1}\xi_0(t), \int\limits_0^\infty \rho(\tau)\xi_k(t,\tau)d\tau\right\rangle_H \\ &+\sum_{k=1}^{N}\left\langle Q_k^{*-1}\sum_{j=1}^{N}Q_j^*\int\limits_0^\infty \xi_j(t,\tau')d\tau', \int\limits_0^\infty \rho(\tau)\xi_k(t,\tau)d\tau\right\rangle_H \\ \leqslant&\|\xi_0(t)\|_H\sum_{k=1}^{N}\left\|Q_k^{-1}\right\|\int\limits_0^\infty \|\xi_k(t,\tau)\|_H d\tau \\ &+\left(\sum_{k=1}^{N}\left\|Q_k^{-1}\right\|\int\limits_0^\infty \|\xi_k(t,\tau)\|_H d\tau\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\|Q_j\|\int\limits_0^\infty \|\xi_j(t,\tau')\|_H d\tau'\right) \\ \leqslant&\|\xi_0(t)\|_H\sum_{k=1}^{N}\left\|Q_k^{-1}\right\|\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\sum_{k=1}^{N}\left\|Q_k^{-1}\right\|\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\|Q_j\|\sqrt{M_j(0)}\|\xi_j(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{N}2\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{2\sqrt{3}}\|\xi_0(t)\|_H\frac{\sqrt{3}\left\|Q_k^{-1}\right\|\sqrt{M_k(0)}}{\sqrt{M_k(\beta)}}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\\
&+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\left\|Q_k^{-1}\right\|\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{N}\|Q_j\|\sqrt{M_j(0)}\|\xi_j(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)^2\right]\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+\frac{3\left\|Q_k^{-1}\right\|^2M_k(0)}{M_k(\beta)}\|\xi_k(t,\tau)\|^2_{\Omega_k}\right)\\
&+\frac{N}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+\|Q_k\|^2\right)M_k(0)\|\xi_k(t,\tau)\|^2_{\Omega_k}\\
&=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+\frac{M_k(0)}{2}\left(\frac{6\left\|Q_k^{-1}\right\|^2}{M_k(\beta)}+N\left(\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+\|Q_k\|^2\right)\right)\|\xi_k(t,\tau)\|^2_{\Omega_k}\right].
\end{aligned}
$$

Приступая к оценке второго слагаемого в формуле (8.7), заметим, что из условия $\xi_k\in D(T_k)$, согласно замечанию 7.1, вытекает, что $||\xi_k(\tau)||_H\in C(\mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty}||\xi_k(\tau)||_H=0$ и, следовательно, $\sup\limits_{\tau>0}||\xi_k(\tau)||_H<\infty$, и $\sup\limits_{\tau>0}||Q_k^*\xi_k(\tau)||_H<||Q_k||_H\sup\limits_{\tau>0}||\xi_k(\tau)||_H<\infty$.

Таким образом, интегрируя по частям следующее выражение, получаем

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\frac{\partial}{\partial\tau}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau\\
&=-\int_0^\infty\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau=-\lim_{\tau\to\infty}\left[\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H\right]\\
&+\lim_{\tau\to0}\left[\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H\right]+\frac{1}{\beta}\int_0^\beta\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau\\
&=\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{N}\int_0^\beta\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Интегрируя по частям второе слагаемое в формуле (8.7), учитывая (8.9), имеем

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\frac{\partial}{\partial t}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau\\
&=-\int_0^\infty\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(t)\right\rangle_H d\tau-\int_0^\infty\rho(\tau)\sum_{k=1}^{N}\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\frac{\partial}{\partial\tau}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau\\
&=-\langle v(t),v(t)\rangle_H\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty\rho(\tau)R_k(\tau)d\tau+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{N}\int_0^\beta\left\langle A_k^{-1/2}v(t),\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leqslant -\,||v(t)||_H^2\sum_{k=1}^N M_k(\beta)+\frac{1}{\beta}||v(t)||_H\sum_{k=1}^N\frac{\sqrt{M_k(0)}}{\sqrt{\lambda_k}}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k} \tag{8.10}$$

$$=-\,||v(t)||_H^2\sum_{k=1}^N M_k(\beta)+2\sum_{k=1}^N\left[\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{\sqrt{2}}||v(t)||_H\frac{\sqrt{M_k(0)}}{\sqrt{2}\beta\sqrt{\lambda_k}\sqrt{M_k(\beta)}}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right]$$

$$\leqslant -\,||v(t)||_H^2\sum_{k=1}^N M_k(\beta)+\frac{1}{2}||v(t)||_H^2\sum_{k=1}^N M_k(\beta)+\sum_{k=1}^N\frac{M_k(0)}{2\lambda_k\beta^2M_k(\beta)}\,\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2$$

$$=\sum_{k=1}^N\left[-\frac{1}{2}||v(t)||_H^2M_k(\beta)+\frac{1}{2}\frac{M_k(0)}{\lambda_k\beta^2M_k(\beta)}\,\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2\right].$$

Объединяя оценки (8.8) и (8.10), получаем неравенство (8.6). □

Лемма 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t)\leqslant ||v(t)||_H^2-\frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2+N\sum_{k=1}^N||Q_k||^2M_k(0)||\xi_k(t)||_{\Omega_k}^2. \tag{8.11}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t)=\frac{d}{dt}\Big\langle A_0^{-1/2}v(t),\xi_0(t)\Big\rangle_H=\left\langle A_0^{-1/2}\frac{d}{dt}v(t),\xi_0(t)\right\rangle_H+\left\langle A_0^{-1/2}v(t),\frac{d}{dt}\xi_0(t)\right\rangle_H$$

$$=-||\xi_0(t)||_H^2-\sum_{k=1}^N\left\langle Q_k^*\int_0^{+\infty}\xi_k(t,\tau)d\tau,\xi_0(t)\right\rangle_H+\Big\langle A_0^{-1/2}v(t),A_0^{1/2}v(t)\Big\rangle_H$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2-||\xi_0(t)||_H^2+||\xi_0(t)||_H\sum_{k=1}^N\|Q_k\|\int_0^{+\infty}\|\xi_k(t,\tau)\|_Hd\tau$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2-||\xi_0(t)||_H^2+2\frac{||\xi_0(t)||_H}{2}\sum_{k=1}^N||Q_k||\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2-||\xi_0(t)||_H^2+\frac{||\xi_0(t)||_H^2}{4}+\left(\sum_{k=1}^N||Q_k||\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)^2$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2-\frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2+N\sum_{k=1}^N||Q_k||^2M_k(0)\,\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2.$$

□

Определим вектор-функцию

$$\Phi(t):=\frac{3}{M(\beta)}\Phi_1(t)+\Phi_2(t),$$

для которой, согласно леммам 8.1 и 8.2, справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)=\frac{3}{M(\beta)}\frac{d}{dt}\Phi_1(t)+\frac{d}{dt}\Phi_2(t)\leqslant\frac{||\xi_0||_H^2}{4}-\frac{3||v||_H^2}{2}+\sum_{k=1}^N\frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k||\xi_k||_{\Omega_k}^2$$

$$-\frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2+||v(t)||_H^2+N\sum_{k=1}^N M_k(0)||Q_k||^2||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \tag{8.12}$$

$$= -\frac{1}{2}||\xi_0(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||v(t)||_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + N\cdot M_k(0)||Q_k||^2\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2.$$

Введем обозначение

$$c_k := \frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + N\cdot M_k(0)||Q_k||^2 =$$
$$= \frac{3M_k(0)}{2M(\beta)}\left[\frac{1}{M_k(\beta)}\left(6\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_k\beta^2}\right) + N\left(\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + \|Q_k\|^2\right)\right] + N\cdot M_k(0)||Q_k||^2.$$

Из неравенства (8.12), в свою очередь, вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + E(t) \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left(c_k + \frac{1}{2}\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \leqslant \gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2, \tag{8.13}$$

где $\gamma_1 := \max\limits_k\left(c_k + \frac{1}{2}\right)$, вектор-функция $E(t)$ определена формулой (8.1).

Из утверждения 8.1 получаем следующую оценку

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{3}{M(\beta)}|\Phi_1(t)| + |\Phi_2(t)| \leqslant \gamma_2 E(t), \tag{8.14}$$

где $\gamma_2 := \left[\frac{3}{M(\beta)}\max\left\{1,\ N\cdot\max\limits_k\left\{\frac{M_k(0)}{\lambda_k}\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right]$.

Положим

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma_1}; \frac{1}{2\gamma_2}\right\}$$

и рассмотрим вектор-функцию $\Psi(t) := E(t) + \varepsilon\Phi(t)$.

Утверждение 8.2. *В принятых обозначениях справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t). \tag{8.15}$$

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$, тогда $\frac{\gamma}{2\gamma_1} \leqslant \frac{1}{2\gamma_2}$, и, следовательно, согласно неравенству (8.14), имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\Phi(t)$$
$$= \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t).$$

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2\gamma_2}$. Тогда, согласно неравенству (8.14), имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t).$$

□

В свою очередь, из неравенств (8.2) и (8.14) вытекает следующая оценка

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\Phi(t) \leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 + \varepsilon\left(\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 - E(t)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}+\varepsilon\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}. \tag{8.16}$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, то согласно (8.16), получим

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant 0. \tag{8.17}$$

2. Если же $\varepsilon=\dfrac{1}{2\gamma_2}$, то $\dfrac{1}{2\gamma_2}\leqslant\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, и, следовательно, согласно (8.16), будем иметь (8.17).

В соответствие с утверждением 8.2, получаем следующее неравенство

$$\varepsilon E(t)\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon\Psi(t). \tag{8.18}$$

Полагая $\omega=\dfrac{\varepsilon}{3}$, из неравенств (8.17) и (8.18) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+2\omega\Psi(t)\leqslant 0. \tag{8.19}$$

Из утверждения 8.2 следует, что функция $\Psi(t)>0$ непрерывна при $t\geqslant 0$ и дифференцируема при $t>0$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы Гронуолла – Беллмана (см. [24], стр. 46), получаем

$$\int\limits_0^t\frac{d\Psi(s)}{\Psi(s)}+2\omega t\leqslant 0. \tag{8.20}$$

Из неравенства (8.20) получаем

$$\Psi(t)\leqslant\Psi(0)e^{-2\omega t}. \tag{8.21}$$

Окончательно, учитывая утверждение 8.2 и неравенство (8.21), получаем неравенство (5.2):

$$\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}}=2E(t)\leqslant 4\Psi(t)\leqslant 4\Psi(0)e^{-2\omega t}\leqslant 6E(0)e^{-2\omega t}=3\,\|z\|^2_{\mathbb{H}}\,e^{-2\omega t}.$$

Теорема 5.1 доказана. □

9. Доказательство теоремы 6.1

Для доказательства теоремы 5.1 воспользуемся определениям и теоремами из известной монографии [22].

Определение 9.1. *Задача Коши*

$$\frac{d}{dt}Z(t)=\mathbb{A}Z(t), \tag{9.1}$$

$$Z(0)=z, \tag{9.2}$$

называется корректной (равномерно корректной), если:

1) для любого $z\in D(\mathbb{A})$ существует единственное решение задачи (9.1), (9.2)*;*

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: из того, что $Z_n(0)\to 0$ ($Z_n(0)\in D(\mathbb{A})$) вытекает, что $Z_n(t)\to 0$ при каждом $t\in[0,T]$ (равномерно по t) на любом конечном интервале $[0,T]$.

Замечание 9.1. *Если задача Коши* (9.1), (9.2) *порождает сжимающую полугруппу в пространстве $\mathbb{H}$, тогда эта задача равномерно корректна.*

В дальнейшем будут использоваться следующие теоремы из монографии [22] (нумерация теорем совпадает с их нумерацией в [22]) .

Теорема 1.1. *Если задача Коши* (9.1), (9.2) *корректна, то ее решение дается формулой* $Z(t) = S(t)z$, *(*$z \in D(\mathbb{A})$*) где* $S(t)$ *– сильно непрерывная при* $t > 0$ *полугруппа операторов.*
Теорема 6.5. *Если задача Коши* (9.1), (9.2) *равномерно корректна, то формула*

$$Z(t) = S(t)z + \int_0^t S(t-p)F(p)dp \tag{9.3}$$

дает решение задачи Коши для неоднородного уравнения:

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \tag{9.4}$$

$$Z(0) = z, \tag{9.5}$$

для $z \in D(\mathcal{A})$ *и вектор-функции* $F(t)$*, удовлетворяющей одному из двух нижеследующих условий:*

1) значения функции $F(t) \in D(\mathcal{A})$*и функция* $\mathcal{A}F(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$;

2) функция $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$.

Перейдем к доказательству теоремы 6.1.

Доказательство. Переписывая задачу Коши (6.1), (6.2) покомпонентно, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(t,\tau)d\tau\right] + f(t) - \sum\limits_{k=1}^{N} M_k(t)A_k\varphi_0 \quad t,\tau > 0, \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \dfrac{d\xi_k(t,\tau)}{dt} = R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(t) + \dfrac{\partial}{\partial\tau}\xi_k(t,\tau), \quad k = 1,...,N, \end{cases} \tag{9.6}$$

$$v(0)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = 0, \quad \tau > 0, \quad k = 1...N. \tag{9.7}$$

В статье [12] показано, что решая последние N уравнений системы (9.6), получаем следующие представления для вектор-функций $\xi_k(t,\tau)$:

$$\xi_k(t,\tau) = \int\limits_0^t R_k(\tau + t - s)Q_kA_0^{1/2}v(s)ds, \quad k = 1,...,N.$$

Из второго уравнения системы (9.6), учитывая начальные условия (9.5), получаем, что

$$\xi_0(t) = \int\limits_0^t A_0^{1/2}v(s)ds + A_0^{1/2}\varphi_0.$$

Подставляя полученные выражения для $\xi_0(t)$, $\xi_k(t,\tau)$, $k = 1,...,N$ в первое уравнение системы (9.6), учитывая, что, по условиям теоремы 6.1, $\varphi_0 \in H_{3/2}$, или $\varphi_0 \in H_1$, а значит $A_0^{1/2}\varphi_0 \in D(A_0^{1/2})$ получаем, что

$$\int\limits_0^t \left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_0^{+\infty} R_k(\tau + t - s)d\tau\right) Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right] v(s)ds \in D(A_0^{1/2}).$$

Далее, в статье [12] показано, что $v(t) \in D(A_0)$. Раскрывая скобки в первом уравнении системы (9.6) после подстановки выражений $\xi_0(t)$, $\xi_k(t,\tau)$, $k = 1, ..., N$, полагая $v(t) := u'(t)$, $u(+0) = \varphi_0$, получаем, что $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$ и, следовательно,

$$- A_0^{1/2} \left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^{N} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(t,\tau) d\tau \right] + f(t) - \sum_{k=1}^{N} M_k(t) A_k \varphi_0$$

$$= - (A+B) u(t) + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^t R_k(t-s) (a_k A + b_k B) u(s) ds + f(t).$$

Таким образом, из первого уравнения системы (9.6), полагая $v(t) := u'(t)$, $u(+0) = \varphi_0$, получаем, что вектор-функция $u(t)$ является классическим решением задачи (2.1), (2.2):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = - (A+B) u(t) + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^t R_k(t-s) (a_k A + b_k B) u(s) ds + f(t),$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1.$$

Более того, условия теоремы 6.1 обеспечивают выполнение условий теоремы 6.5. [22] для задачи (6.1), (6.2) и оценка (6.3) следует из формулы (9.3) и оценки (5.2).

Теорема 6.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. *Основы математической теории термовязкоупругости.* Наука, Москва (1970).
2. R.M. Christensen. *Theory of viscoelasticity. An introduction.* Academic Press, New York (1971).
3. N.D. Kopachevsky, S.G. Krein. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids* // Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland, vol. 146 (2003).
4. J.E. Munoz Rivera. *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity* // Quart. Appl. Math. **52**, 629–648 (1994).
5. Ю.Н. Работнов. *Элементы наследственной механики твердых тел.* Наука, Москва (1977).
6. G. Amendola, M. Fabrizio, J.M. Golden. *Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications.* Springer, New-York – Dordrecht – Heidelberg – London (2012).
7. M.E. Gurtin, A.C. Pipkin. *General theory of heat conduction with finite wave speed* // Arch. Rat. Mech. Anal. **31**, 113–126 (1968).
8. А.А. Локшин, Ю.В. Суворова. *Математическая теория распространения волн в средах с памятью.* Изд-во МГУ, Москва (1982).
9. А.В. Лыков. *Тепломассообмен. Справочник.* Энергия, Москва (1978).
10. R.K. Miller.*An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory* // J. Math. Anal. Appl. **66**, 313–332 (1978).
11. Э.С. Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний.* Мир, Москва (1984).
12. Н.А. Раутиан. *Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями* // Дифференц. уравнения. **56**:9, 1226–1244 (2020).
13. В.В. Власов, Н.А. Раутиан. *Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений.* МАКС Пресс, Москва (2016).
14. V.V. Vlasov, N.A. Rautian. *Well-Posedness and Spectral Analysis of Integrodifferential Equations Arising in Viscoelasticity Theory* // J. Math. Sci. **233**:4, 555–577 (2018).

15. В.В. Власов, Н.А. Раутиан. *Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости* // Дифференц. уравнения. **55**:4, 574–587 (2019).
16. V.V. Vlasov, N.A. Rautian. *A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics* // J. Math. Sci. **244**:2, 170–182 (2020).
17. A. Eremenko, S. Ivanov. *Spectra of the Gurtin – Pipkin type equations* // SIAM J. Math. Anal. **43**:5, 2296–2306 (2011).
18. C.M. Dafermos. *Asymptotic stability in viscoelasticity* // Arch. Rational Mech. Anal. **37**, 297–308 (1970).
19. K.J. Engel, R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer-Verlag, New York (2000).
20. V. Pata. *Stability and exponential stability in linear viscoelasticity* // Milan Journal of Mathematics. **77**, 333–360 (2009).
21. T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer (1966).
22. С.Г. Крейн. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.* Наука, Москва (1967).
23. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Наука, Москва (1989).
24. Р. Беллман. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.* ИЛ, Москва (1954).

Надежда Александровна Раутиан,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
ГСП-1, Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: nrautian@mail.ru