ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 51-64.

УДК 517.581

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ С ГАММА-ФУНКЦИЕЙ

А.Б. КОСТИН, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Изучается круг вопросов, связанных с интегральными представлениями гамма-функции и ее отношений. Основу нашего исследования составляют два классических результата теории функций. Один из них — широко известная первая формула Бине, другой — менее известное представление Мальмстена. Эти специальные формулы выражают значения гамма-функции в открытой правой полуплоскости через соответствующие несобственные интегралы. В работе показано, что оба результата допускают распространение на мнимую ось с исключенной точкой $z = 0$. В процессе такого распространения применяются различные методы вещественного и комплексного анализа. Отсюда, в частности, получены интегральные представления для аргумента комплексной величины, являющейся значением гамма-функции в чисто мнимой точке. На основе упомянутой формулы Мальмстена в точках $z \neq 0$ из замкнутой правой полуплоскости дан подробный вывод интегрального представления для заданного через гамма-функцию специального отношения $D(z) \equiv \Gamma(z + 1/2)/\Gamma(z + 1)$. Такой факт на положительной полуоси отмечен без доказательства в небольшой заметке Душана Славича 1975 года. В той же работе приведены при $x > 0$ двусторонние оценки величины $D(x)$, которая в натуральных точках совпадает с нормированным центральным биномиальным коэффициентом. Эти оценки означают, что $D(x)$ обвертывается на положительной полуоси своим асимптотическим рядом. В настоящей статье кратко обсуждается вопрос о наличии данного свойства у асимптотического ряда функции $D(z)$ в замкнутом угле $|\arg z| \leqslant \pi/4$ с исключенной вершиной. Из новой формулы, представляющей $D(z)$ на мнимой оси, получены явные выражения для величины $|D(iy)|^2$ и для множества $\operatorname{Arg} D(iy)$ при $y > 0$. Указан метод доказательства второй формулы Бине, использующий аппарат простых дробей.

Ключевые слова: гамма-функция, центральный биномиальный коэффициент, асимптотическое разложение, интегральное представление, формулы Бине, Гаусса, Мальмстена, обвертывающий ряд в комплексной плоскости.

Mathematics Subject Classification: 33B15, 11B65

1. Введение

Настоящая статья мотивирована известной задачей об асимптотически точных двусторонних оценках центрального биномиального коэффициента

$$C_{2m}^{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

имеющей многовековую историю. Важную роль в известных подходах к этой задаче играют различные интегральные представления для отношения значений гамма-функции (см., например,

---

A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, Integral representations of quantities associated with Gamma function.

Поступила 12 июля 2021 г.

статьи [1], [2]; см. также «свежий» обзор [3] с обширной библиографией). Так, в краткой заметке Славича [1] приводится (без доказательства) неочевидная формула

$$\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4tx}\, dt\right\}, \qquad x>0, \tag{1.2}$$

которая после подстановки $x = m \in \mathbb{N}$ дает полезное равенство

$$C_{2m}^m = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4mt}\, dt\right\}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Как указано в [1] (подробное доказательство см. в [4]), формула (1.3) служит источником для универсальных двойных неравенств

$$\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{2M-1} \frac{b_k}{m^{2k-1}}\right\} < C_{2m}^m < \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{2M} \frac{b_k}{m^{2k-1}}\right\}, \tag{1.4}$$

справедливых для всех $m \in \mathbb{N}$ при любом выборе параметра $M \in \mathbb{N}$. Коэффициенты b_k выражаются через числа Бернулли B_{2k} по формуле

$$b_k = \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

В недавней работе Попова [2] для получения как (1.4), так и новых, более тонких оценок величины (1.1), вместо (1.2) существенно использовалось при вещественных $z = x > 0$ другое соотношение

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{z\ln z - z + 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{\exp(2\pi t)-1}\, dt\right\}, \qquad z \in \Pi_+, \tag{1.5}$$

известное в литературе как *вторая формула Бине* (см. [5, глава 12, §12.33]). Для сокращения записи здесь и далее через

$$\Pi_+ \equiv \{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Re} z > 0\}$$

обозначаем открытую правую полуплоскость, а символом $\overline{\Pi}_+^\circ$ — ее замыкание без точки $z=0$, т.е. множество

$$\overline{\Pi}_+^\circ \equiv \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}: \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}. \tag{1.6}$$

Логарифм $\ln z$ и корень $\sqrt{z}$ всюду в работе берутся только для $z \in \overline{\Pi}_+^\circ$ и понимаются, как обычно, в смысле их главных значений

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z} = e^{\frac12 \ln z}, \quad -\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2.$$

Точно так же, арктангенс в формуле Бине (1.5) означает однозначную аналитическую функцию

$$\operatorname{arctg} u = \int\limits_0^u \frac{d\zeta}{\zeta^2+1}, \qquad u \in \Pi_+,$$

определенную интегралом по отрезку.

Как оказалось, удобным инструментом при доказательстве формулы Славича (1.2) является *представление Мальмстена*

$$\Gamma(z) = \exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t}\right)\frac{dt}{t}\right\}, \qquad z \in \Pi_+. \tag{1.7}$$

Компактная формула (1.7) привлекательна отсутствием в ее записи внеинтегральных слагаемых. Отметим, что в классической книге Уиттекера и Ватсона [5, глава 12, §12.31] результат (1.7) приведен без комментариев, лишь с указанием на авторство Мальмстена. Благодаря задачнику [6], нам удалось найти оригинальную работу [7], где опубликовано доказательство формулы (1.7) для положительных значений переменной. Кстати, многие замечательные аналитические достижения Мальмстена были незаслуженно забыты и впоследствии неоднократно переоткрывались (см. по этому поводу фундаментальную обзорную работу Благушина [8]).

Авторы не нашли в литературе строгого доказательства формулы (1.2) из заметки Славича, что послужило одним из поводов для написания этой статьи. Тем самым, помимо прочего, будет устранена неявная лакуна в рассуждениях нашей работы [4], где при изучении поведения величины $\Gamma(x+1/2)/\Gamma(x+1)$ на положительной полуоси $x>0$ формула (1.2) использовалась как хорошо известный факт.

Статья состоит из введения (текущий §1) и двух «рабочих» параграфов 2, 3. Во втором параграфе предложен вывод формулы Мальмстена (1.7), опирающийся на так называемую *первую формулу Бине*

$$\Gamma(z) \,=\, \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, \exp\left\{ z\ln z \,-\, z \,+\, \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-zt}}{t}\,dt \right\}, \tag{1.8}$$

справедливую при всех $z\in\Pi_+$. Фактически, обе классические формулы (1.7), (1.8) дают чуть разные по своей структуре, но эквивалентные представления для гамма-функции. Вообще, первая формула Бине (1.8) является опорной в нашей работе, и, по сути, из нее будут аккуратно выведены интересующие нас соотношения (1.2), (1.7). Выбор представления (1.8) в качестве базового удобен тем, что именно оно строго доказано в [5, глава 12, §12.31] на основе классического разложения гамма-функции в бесконечное *произведение Вейерштрасса*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \,=\, z\,e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}, \qquad z\in\mathbb{C}, \tag{1.9}$$

где γ — константа Эйлера – Маскерони.

Отметим еще, что элементарный вывод формулы (1.7) возможен интегрированием по переменной ζ от 1 до $z\in\Pi_+$ *формулы Гаусса* [5, глава 12, §12.3] для пси-функции

$$\psi(\zeta) \,\equiv\, \frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} \,=\, \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-\zeta t}}{1-e^{-t}}\right) dt, \qquad \zeta\in\Pi_+.$$

Указание на этот способ есть в [9, теорема 1.6.2], и именно так «вещественную» версию формулы (1.7) доказывал сам Мальмстен [7]. Однако, для того чтобы распространить равенство (1.7) на мнимую ось, мы поступаем иначе. Сначала доказываем, что формула (1.8) справедлива на множестве (1.6), а затем для тех же $z\in\overline{\Pi}_+^{\circ}$ выводим формулу Мальмстена.

Третий параграф посвящен обоснованию формулы Славича (1.2) в ее общей, «комплексной» форме записи на множестве $\overline{\Pi}_+^{\circ}$. Кроме того, здесь кратко описан новый способ для вывода второй формулы Бине (1.5) (ср. с [5, глава 12, §12.33]). Обсуждается также возможность переноса в комплексную область результатов [1] об обертывании величины (1.2).

Работая с классическими представлениями (1.5), (1.7), (1.8), мы, в отличие от [5] и многих современных источников, используем нотацию, при которой через несобственный интеграл выражается сама гамма-функция, а не ее логарифм. Такой подход, восходящий к основополагающему мемуару Бине [10], имеет свои преимущества.

2. Первая формула Бине и представление Мальмстена

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(t) \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{1}{t}, \quad t > 0, \qquad g(0) \equiv \lim_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{12}. \tag{2.1}$$

На луче $t \geqslant 0$ функция (2.1) строго убывает, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет соотношениям

$$g(t) \sim \frac{1}{2t}, \qquad g'(t) \sim -\frac{1}{2t^2}, \qquad t \to +\infty. \tag{2.2}$$

Проверка всех указанных свойств функции $g(t)$ элементарна. При этом полезно иметь в виду разложение (см. [11, задача 6.45])

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} > 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.3}$$

из которого, например, следует, что

$$g'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t}{(t^2 + 4\pi^2 n^2)^2} < 0, \quad t > 0, \qquad g'(0) = 0. \tag{2.4}$$

Покажем сначала (предложение 2.1 ниже), что первая формула Бине (1.8) справедлива не только при $z \in \Pi_+$, но и на множестве $\overline{\Pi}{}_+^{\circ}$. Затем для тех же значений $z \in \overline{\Pi}{}_+^{\circ}$ выведем представление Мальмстена (1.7) (см. предложение 2.2).

Предложение 2.1. *Первая формула Бине* (1.8) *верна на множестве* (1.6), *т.е.*

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,\exp\left\{z\ln z - z + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,e^{-zt}\,dt\right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}_+^{\circ}. \tag{2.5}$$

В частности, для чисто мнимой переменной имеем

$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{y}}\,\exp\left\{-\frac{\pi y}{2} + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\cos(yt)\,dt\right\}, \qquad y > 0, \tag{2.6}$$

а также выражение для одного из значений аргумента

$$y\ln y - y - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\sin(yt)\,dt \;\in\; \operatorname{Arg}\Gamma(iy), \qquad y > 0. \tag{2.7}$$

Здесь символом $\operatorname{Arg}\Gamma(iy)$ *при заданном* $y > 0$ *обозначено множество всех значений аргумента комплексного числа* $\Gamma(iy)$. *Кроме того, тождество* (2.6) *дает формулу*

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\cos(yt)\,dt = \frac{\pi y}{2} - \frac{1}{2}\ln\Big(2\operatorname{sh}(\pi y)\Big), \qquad y > 0. \tag{2.8}$$

Функция $g(t)$ *из соотношений* (2.5)–(2.8) *задана по правилу* (2.1).

Доказательство. Ясно, что функция

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\,\Gamma(z)\,\exp\{z - z\ln z\}$$

непрерывна на множестве $\overline{\Pi}{}_+^{\circ}$. Отсюда, учитывая классическое представление (1.8), заключаем, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,e^{-zt}\,dt$$

имеет предел при $z \to iy$, $z \in \Pi_+$, в каждой точке $iy \neq 0$, принадлежащей мнимой оси. Поэтому для обоснования формулы (2.5) достаточно проверить, что справедливо соотношение

$$\lim_{x\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt \;=\; \int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-iyt}\, dt, \tag{2.9}$$

считая вещественное $y \neq 0$ произвольно зафиксированным. Ввиду гладкости функции (2.1) и свойства (2.2) можем утверждать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt$$

сходится для любого $x \geqslant 0$, и справедливы формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt \;=\; \frac{1}{x+iy} \left(\frac{1}{12} + \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt \right), \qquad x > 0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-iyt}\, dt \;=\; \frac{1}{iy} \left(\frac{1}{12} + \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-iyt}\, dt \right).$$

Из этих равенств видно, что для доказательства (2.9) осталось обосновать предельный переход

$$\lim_{x\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt \;=\; \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-iyt}\, dt. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.4), запишем оценку

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-iyt}\, dt \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} (-g'(t))\left(1 - e^{-xt}\right)\, dt, \tag{2.11}$$

верную при любом $x > 0$. Далее зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем значение $a > 0$ настолько большим, что $g(a) < \varepsilon/2$. Это возможно, поскольку $g(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. (Если $\varepsilon \geqslant 1/6$, то можно взять любое $a > 0$.) Затем по найденной величине a подберем малое $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $1 - e^{-a\delta} < 6\,\varepsilon$. Тогда, согласно выбору чисел a, δ и свойствам функции $g(t)$, имеем, во-первых,

$$\int\limits_a^{+\infty} (-g'(t))\left(1 - e^{-xt}\right)\, dt \;\leqslant\; \int\limits_a^{+\infty} (-g'(t))\, dt \;=\; g(a) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x > 0, \tag{2.12}$$

и, во-вторых,

$$\int\limits_0^{a} (-g'(t))\left(1 - e^{-xt}\right)\, dt \;\leqslant\; \left(1 - e^{-a\delta}\right) \int\limits_0^{a} (-g'(t))\, dt \;<\; 6\,\varepsilon\, g(0) = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.13}$$

если $0 < x < \delta$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого, согласно (2.12), (2.13), при всех $0 < x < \delta$ выполнено соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} (-g'(t))\left(1 - e^{-xt}\right)\, dt \;=\; \int\limits_0^{a} + \int\limits_a^{+\infty} \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

С учетом оценки (2.11) приходим к (2.10). Тем самым, формула (2.5) доказана.

Посмотрим, что дает первая формула Бине при $z = iy$, где $y > 0$. Подставив такое значение в (2.5), запишем тождество

$$\Gamma(iy) \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{iy}}\,\exp\left\{iy\,\ln(iy) - iy + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,e^{-iyt}\,dt\right\},$$

эквивалентное системе соотношений (2.6), (2.7). Для получения (2.8) нужно дополнительно учесть явную формулу

$$|\Gamma(iy)|^{\,2} \;=\; \frac{\pi}{y\;\mathrm{sh}(\pi y)}, \qquad y > 0, \tag{2.14}$$

которая легко выводится из разложения (1.9) и имеется в справочниках (см., например, [12, гл. 6, формула 6.1.29]). Предложение 2.1 доказано. □

Замечание 2.1. *Для сравнения укажем прямой способ вычисления интеграла в* (2.8), *основанный на разложении* (2.3). *Считая $y > 0$ и учитывая равномерную сходимость при $t \geqslant 0$ ряда простых дробей* (2.3), *запишем*

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\cos(yt)\,dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\cos(yt)}{t^2\,+\,4\pi^2\,n^2}\,dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(yt)}{t^2\,+\,4\pi^2\,n^2}\,dt.$$

С помощью вычетов найдем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(yt)}{t^2\,+\,4\pi^2\,n^2}\,dt \;=\; \frac{e^{-2\pi n y}}{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Окончательно для всех $y > 0$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\cos(yt)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^{-2\pi y}\right)^n}{2n} = -\,\frac{1}{2}\,\ln\left(1 - e^{-2\pi y}\right) = \frac{\pi y}{2} \,-\, \frac{1}{2}\ln\Bigl(2\,\mathrm{sh}(\pi y)\Bigr).$$

Тождество (2.8) *получено. В то же время, интеграл вида*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(yt)}{t^2\,+\,4\pi^2\,n^2}\,dt, \qquad y > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

не допускает явного вычисления, что и приводит к определенному различию в характере формул (2.7), (2.8). *Наконец, отметим для полноты изложения, что ввиду равенства*

$$\Gamma(-iy) \;=\; \overline{\Gamma(iy)}, \qquad y \neq 0,$$

возможен общий (более громоздкий) вариант записи для (2.6)–(2.8), *учитывающий также и значения $z = iy$, где $y < 0$.*

Приступим к задаче о распространении формулы Мальмстена (1.7) на мнимую ось. Понадобятся вспомогательные утверждения (леммы 2.1, 2.2 ниже).

Лемма 2.1. *Справедливы равенства*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t} - \cos t}{t}\,dt = 0, \tag{2.15}$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln 2\pi. \tag{2.16}$$

Доказательство. Сходимость интеграла (2.15) очевидна. Вычислим его методами комплексного анализа.[1]

Для произвольно зафиксированного числа $R > 0$ выберем положительно ориентированный контур γ_R, состоящий из трех кривых $\gamma_R^{(1)}$, $\gamma_R^{(2)}$, $\gamma_R^{(3)}$, где $\gamma_R^{(1)}$ — отрезок вещественной прямой от точки $z = 0$ до точки $z = R$; $\gamma_R^{(2)}$ — дуга окружности $|z| = R$ от точки $z = R$ до точки $z = R(1+i)/\sqrt{2}$; $\gamma_R^{(3)}$ — отрезок, соединяющий точки $z = R(1+i)/\sqrt{2}$ и $z = 0$. Рассмотрим интеграл от целой функции $F(z) \equiv \left(e^{-z} - e^{iz}\right)/z$, взятый по контуру γ_R. С одной стороны, интегральная теорема Коши при любом $R > 0$ дает равенство

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{-z} - e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

С другой стороны, этот же интеграл есть сумма трех интегралов от функции $F(z)$ по кривым $\gamma_R^{(1)}$, $\gamma_R^{(2)}$, $\gamma_R^{(3)}$, т.е. выражение

$$\int\limits_0^R \frac{e^{-t} - e^{it}}{t}\, dt + i \int\limits_0^{\pi/4} \left(e^{-Re^{i\varphi}} - e^{iRe^{i\varphi}}\right) d\varphi - \int\limits_0^R \frac{e^{-t(1+i)/\sqrt{2}} - e^{it(1+i)/\sqrt{2}}}{t}\, dt.$$

Поскольку, как несложно видеть,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{\pi/4} \left(e^{-Re^{i\varphi}} - e^{iRe^{i\varphi}}\right) d\varphi = 0,$$

то нужный результат — равенство (2.15) — следует из соотношения

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t}\, dt = \mathrm{Re} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{it}}{t}\, dt = \mathrm{Re} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+i)/\sqrt{2}} - e^{it(1+i)/\sqrt{2}}}{t}\, dt = 0.$$

Для вычисления интеграла (2.16) используем инструменты вещественного анализа. Прежде всего обозначим через $h(t)$ подынтегральную функцию в (2.16) и, привлекая конструкцию (2.1), запишем представление

$$h(t) \equiv \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\frac{1}{t} = \frac{1 - e^{-t}}{2t} - g(t), \qquad t > 0,$$

с обычным соглашением

$$h(0) \equiv \lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-t}}{2t} - g(0) = \frac{5}{12}.$$

Величину $t^2 h(t)$ для всех $t > 0$ преобразуем к виду

$$t^2 h(t) = \frac{2e^t(e^t - 1 - t) - t(e^t - 1)}{2e^t(e^t - 1)} = \frac{(e^t - 1 - t)(2e^t - t) - t^2}{2e^t(e^t - 1)},$$

допускающему очевидную оценку

$$t^2 h(t) > \frac{t^2(2+t) - 2t^2}{4e^t(e^t - 1)} = \frac{t^3}{4e^t(e^t - 1)} > 0, \qquad t > 0.$$

[1] Возможен и «вещественный» подход к этой задаче, который основан на работе с интегралом

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+\varepsilon)t} - e^{-\varepsilon t}\cos t}{t}\, dt,$$

зависящим от параметра $\varepsilon > 0$.

Следовательно, функция $h(t)$ положительна при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, она непрерывна на этом промежутке и подчинена асимптотике

$$h(t) \sim \frac{1}{t^2}, \qquad t \to +\infty.$$

Из сказанного ясно, что интеграл (2.16) сходится. Однако нахождение его значения потребует некоторых дополнительных усилий.

Введем вспомогательное семейство функций

$$h_\varepsilon(t) \equiv e^{-\varepsilon t}\, h(t) = \frac{e^{-\varepsilon t} - e^{-(1+\varepsilon)t}}{2t} - e^{-\varepsilon t}\, g(t), \qquad t \geqslant 0,$$

с параметром $\varepsilon > 0$. Отметим, что

$$0 < h_\varepsilon(t) \leqslant h(t), \qquad t \geqslant 0,$$

причем на любом отрезке неотрицательной полуоси $h_\varepsilon(t)$ сходится к $h(t)$ равномерно при $\varepsilon \to 0+$. Тогда (см., например, [13, Отд. II, гл. 3, §1, задача 115])

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} h_\varepsilon(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} h(t)\, dt. \tag{2.17}$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ найдем интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} h_\varepsilon(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t} - e^{-(1+\varepsilon)t}}{2t}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt. \tag{2.18}$$

По формуле Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t} - e^{-(1+\varepsilon)t}}{2t}\, dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{2.19}$$

Далее, из первой формулы Бине (1.8) (см. ее в записи (2.5)) при $z = \varepsilon$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt = \ln \Gamma(\varepsilon) - \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) \ln \varepsilon + \varepsilon - \frac{1}{2} \ln 2\pi, \qquad \varepsilon > 0. \tag{2.20}$$

Подставив (2.19), (2.20) в (2.18), получим соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} h_\varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{2} \ln(1+\varepsilon) + \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon - \ln\Bigl(\varepsilon\, \Gamma(\varepsilon)\Bigr) + \frac{1}{2} \ln 2\pi, \qquad \varepsilon > 0,$$

правая часть которого при $\varepsilon \to 0+$ стремится к $(1/2)\ln 2\pi$, поскольку, как известно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\, \Gamma(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \Gamma(1+\varepsilon) = 1.$$

С учетом (2.17) имеем равенство (2.16). Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Справедливы представления*

$$\ln z = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}, \tag{2.21}$$

$$z \ln z - z = \int\limits_0^{+\infty} \left(z e^{-t} + \frac{e^{-zt} - 1}{t} \right) \frac{dt}{t}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Формула (2.21) для значений z из открытой полуплоскости Π_+ доказана в книге [5, раздел 6.222, пример 6]. Проверим напрямую (ср. с доказательством предложения 2.1), что эта формула действует и при $z = iy$, где $y \neq 0$. Для таких z соотношение (2.21) распадается на две части

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t}\, dt \,=\, \ln|y|, \qquad y \neq 0, \tag{2.23}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{t}\, dt \,=\, \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, \qquad y \neq 0. \tag{2.24}$$

Вторая из выписанных формул хорошо известна (интеграл Дирихле). Поэтому нужно доказать только первую. Не ограничивая общности, считаем, что $y > 0$. По формуле Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-yt}}{t}\, dt \,=\, \ln y, \qquad y > 0.$$

Но тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t}\, dt \,=\, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-yt}}{t}\, dt \,+\, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yt} - \cos(yt)}{t}\, dt \,=\, \ln y,$$

поскольку (см. равенство (2.15) из леммы 2.1)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-yt} - \cos(yt)}{t}\, dt \,=\, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t}\, dt = 0, \qquad y > 0.$$

Проверка формулы (2.23) завершена. Тем самым, нужное соотношение (2.21) выполнено для точек $z \neq 0$ на мнимой оси, а значит, и для всех $z \in \overline{\Pi}{}_+^{\circ}$.

Перейдем к доказательству формулы (2.22). Проведем его в два этапа. Сначала убедимся в справедливости (2.22) в открытой правой полуплоскости Π_+, а затем отдельно разберем случай чисто мнимых значений z.

Интеграл в правой части (2.22) запишем в виде

$$\int_0^{+\infty} \left(ze^{-t} + \frac{e^{-zt} - 1}{t} \right) \frac{dt}{t} \,=\, \int_0^{+\infty} \left(zte^{-t} + e^{-zt} - 1 \right)\, d\left(-\frac{1}{t}\right)$$

и возьмем по частям, что при любом $z \in \Pi_+$ даст выражение

$$\left(\frac{1 - e^{-zt}}{t} - ze^{-t} \right) \Bigg|_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{ze^{-t} - zte^{-t} - ze^{-zt}}{t}\, dt.$$

Подстановка обращается в нуль, а интеграл с учетом формулы (2.21) равен

$$z\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt \,-\, z\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \,=\, z\ln z \,-\, z, \qquad z \in \Pi_+.$$

Значит, соотношение (2.22) для $z \in \Pi_+$ выполнено.

Пусть теперь $z = iy$, где $y \neq 0$. Обоснуем (2.22) для таких z. Другими словами, требуется доказать следующие два равенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(yt)}{t^2}\,dt \;=\; \frac{\pi y}{2}\operatorname{sgn} y, \qquad y \neq 0, \tag{2.25}$$

$$\int_0^{+\infty} \left(ye^{-t} - \frac{\sin(yt)}{t}\right)\frac{dt}{t} \;=\; y\ln|y| - y, \qquad y \neq 0. \tag{2.26}$$

Формула (2.25) верна, поскольку она сводится к (2.24) интегрированием по частям. Проверим формулу (2.26), считая $y > 0$, что очевидно не нарушит общности рассуждений. Преобразуем левую часть (2.26), используя формулу (2.23). Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(ye^{-t} - \frac{\sin(yt)}{t}\right)\frac{dt}{t} \;&=\; \int_0^{+\infty} \bigl(\sin(yt) - yte^{-t}\bigr)\, d\!\left(\frac{1}{t}\right)\\ &=\; \left(\frac{\sin(yt)}{t} - ye^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \bigl(ye^{-t}(1-t) - y\cos(yt)\bigr)\,\frac{dt}{t}\\ &=\; y\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-\cos(yt)}{t}\,dt - y\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \;=\; y\ln y - y.\end{aligned}$$

Соотношение (2.26) получено.

В результате вывели тождество (2.22) для $z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}$. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Сочетание лемм 2.1, 2.2 с предложением 2.1 позволяет дать анонсированный во введении «расширенный» вариант представления Мальмстена.

Предложение 2.2. *Формула* (1.7) *верна на множестве* (1.6), *т.е.*

$$\Gamma(z) \;=\; \exp\left\{\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\,e^{-t}\right)\frac{dt}{t}\right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}. \tag{2.27}$$

В частности, для чисто мнимых значений переменной извлекаем из (2.27) *соотношения*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(yt)-1}{e^t-1}\,\frac{dt}{t} \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{\pi y}{\operatorname{sh}(\pi y)}, \qquad y > 0, \tag{2.28}$$

$$\int_0^{+\infty} \left(ye^{-t} - \frac{\sin(yt)}{1-e^{-t}}\right)\frac{dt}{t} \;\in\; \operatorname{Arg}\Gamma(iy), \qquad y > 0. \tag{2.29}$$

Доказательство. После проведенной подготовительной работы вывод нужного представления Мальмстена для $z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}$ будет простым. Возьмем в качестве отправного результата первую формулу Бине из предложения 2.1 (см. (2.5))

$$\Gamma(z) \;=\; \exp\left\{\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln z + (z\ln z - z) + \int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-zt}\,dt\right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+},$$

с функцией $g(t)$, определенной в (2.1). Первые три слагаемых под знаком экспоненты заменим их интегральными представлениями (2.16), (2.21), (2.22) соответственно. Сложив четыре интеграла, получим, что

$$\Gamma(z) \,=\, \exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} G(t,z)\,\frac{dt}{t}\right\}, \qquad z\in\overline{\Pi}{}^{\circ}_{+},$$

где функция $G(t,z)$ при всех $t>0$, $z\in\overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}$ задана развернутой формулой

$$G(t,z)=\frac{1}{t}\,-\,\frac{1}{e^t-1}\,-\,\frac{e^{-t}}{2}\,-\,\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{2}\,+\,ze^{-t}\,+\,\frac{e^{-zt}-1}{t}\,+\,g(t)\,t\,e^{-zt}.$$

Подставим сюда вместо $g(t)$ явное выражение (2.1) и после элементарных преобразований приведем $G(t,z)$ к компактному виду

$$G(t,z)=\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)\,e^{-t}.$$

Представление (2.27) получено.

При $z=iy$, где $y>0$, формула (2.27) записывается так

$$\Gamma(iy)=\exp\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(yt)-e^{-t}}{1-e^{-t}}-e^{-t}\right)\frac{dt}{t}\,+\,i\int\limits_0^{+\infty}\left(ye^{-t}-\frac{\sin(yt)}{1-e^{-t}}\right)\frac{dt}{t}\right\}.$$

Теперь соотношение (2.29) очевидно, а для получения тождества (2.28) достаточно представить $\ln|\Gamma(iy)|$ в форме

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(yt)-e^{-t}}{1-e^{-t}}-e^{-t}\right)\frac{dt}{t}\,=\,\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(yt)-1}{e^t-1}\,\frac{dt}{t}\,-\,\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-\cos(yt)}{t}\,dt$$

и привлечь (2.23), (2.14). Предложение 2.2 доказано. □

В заключение этого раздела отметим, что при заданном $y>0$ оба соотношения (2.7), (2.29) из предложений 2.1, 2.2 выделяют в множестве $\mathrm{Arg}\ \Gamma(iy)$ одно и то же значение, не совпадающее, вообще говоря, с заключенным в промежутке $(-\pi,\,\pi]$ главным значением $\arg\,\Gamma(iy)$. Вопрос о нахождении точного интегрального выражения для последней величины в зависимости от параметра y, по-видимому, представляет определенный интерес.

Как будет показано в следующем параграфе, формула Мальмстена (2.27) позволяет быстро вывести комплексный вариант результата Славича для специального отношения гамма-функции.

3. Формула Славича и заключительные замечания

Рассмотрим величину

$$D(z)\,\equiv\,\frac{\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(z+1)}, \qquad z\in\overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}. \tag{3.1}$$

Докажем утверждение, распространяющее формулу Славича (1.2) на множество (1.6).

Предложение 3.1. *Для отношения* (3.1) *справедливо интегральное представление*

$$D(z)\,=\,\frac{1}{\sqrt{z}}\,\exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}t}{2t}\,e^{-4tz}\,dt\right\}, \qquad z\in\overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}, \tag{3.2}$$

совпадающее с формулой (1.2) *при* $z = x > 0$. *В другом частном случае — чисто мнимых значений переменной — имеем*

$$|D(iy)|^2 \;=\; \frac{\operatorname{th}(\pi y)}{y} \;=\; \frac{1}{y}\,\exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t}\,\cos(4yt)\,dt\right\}, \qquad y > 0, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\,\sin(4yt)\,dt \;-\; \frac{\pi}{4} \;\in\; \operatorname{Arg} D(iy), \qquad y > 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Заменим в (2.27) переменную z на $z+1/2$. Скомбинируем результат с исходным представлением (2.27) и получим, что

$$D(z) \;\equiv\; \frac{\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma(z+1/2)}{z\,\Gamma(z)} = \frac{1}{z}\,\exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} \frac{H(\tau,z)}{\tau}\,d\tau\right\},$$

где

$$H(\tau,z) \;\equiv\; \frac{e^{-(z+1/2)\tau} - e^{-z\tau}}{1-e^{-\tau}} \;+\; \frac{e^{-\tau}}{2}, \qquad \tau > 0, \quad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}.$$

Выражение для $H(\tau,z)$ преобразуем следующим образом:

$$H(\tau,z) = \frac{e^{-\tau}}{2} - \frac{e^{-z\tau}}{1+e^{-\tau/2}} = \frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{2} - \left(\frac{1}{1+e^{-\tau/2}} - \frac{1}{2}\right) e^{-z\tau}.$$

Заметив, что

$$\frac{1}{1+e^{-\tau/2}} - \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-\tau/2}}{1+e^{-\tau/2}} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{e^{\tau/4}-e^{-\tau/4}}{e^{\tau/4}+e^{-\tau/4}} \;=\; \frac{1}{2}\,\operatorname{th}\frac{\tau}{4},$$

перепишем определение $H(\tau,z)$ в эквивалентной форме

$$H(\tau,z) \;=\; \frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{2} \;-\; \frac{\operatorname{th}(\tau/4)}{2}\,e^{-z\tau}.$$

Но тогда для отношения (3.1) получим представление

$$D(z) \;=\; \frac{1}{z}\,\exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{2\tau}\,d\tau \;-\; \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(\tau/4)}{2\tau}\,e^{-z\tau}\,d\tau\right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}. \tag{3.5}$$

Для всех $z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}$, во-первых, по формуле (2.21) имеем

$$\frac{1}{z}\,\exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{2\tau}\,d\tau\right\} = \frac{1}{z}\,\exp\left\{\frac{1}{2}\,\ln z\right\} = \frac{1}{\sqrt{z}}, \tag{3.6}$$

а во-вторых,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(\tau/4)}{2\tau}\,e^{-z\tau}\,d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\,e^{-4zt}\,dt. \tag{3.7}$$

Подставив (3.6), (3.7) в (3.5), получим (3.2).

При $z = iy$, где $y > 0$, формула (3.2) приобретает вид

$$D(iy) \;=\; \frac{1}{\sqrt{y}}\,\exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\,\cos(4yt)\,dt \;+\; i\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\,\sin(4yt)\,dt - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

что влечет как (3.4), так и «интегральную» часть формулы (3.3). Для того чтобы завершить проверку (3.3), запишем

$$|D(iy)|^2 \;=\; \frac{\left|\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2}{y^2\,\left|\,\Gamma(iy)\right|^2}, \qquad y > 0,$$

а затем при тех же $y > 0$ применим вместе с (2.14) еще одну известную явную формулу

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi y)} \tag{3.8}$$

(по поводу (3.8) см. [12, гл. 6, формула 6.1.30]). Предложение 3.1 доказано. □

Замечание 3.1. *Понятно, что формула* (3.3) *из предложения 3.1 фактически содержит в себе косинус-преобразование Фурье функции* $(\operatorname{th} t)/t$, *именно,*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t}\cos(yt)\,dt \;=\; \ln\left(\operatorname{cth}\frac{\pi y}{4}\right), \qquad y > 0.$$

Укажем еще на формулу

$$D(z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{z+1/2}}\,\exp\left\{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\,e^{-(2z+1)2t}\,dt\right\},$$

аналогичную (3.2), *но действующую на более широком множестве*

$$\Big\{\, z \in \mathbb{C}\setminus\{-1/2\} : \operatorname{Re} z \geqslant -1/2 \,\Big\} \supset \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}.$$

Такое представление выводится из (2.27) *тем же способом, что и* (3.2), *но без применения связи* $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.

Завершим статью коротким обсуждением некоторых оставшихся в стороне вопросов, связанных со второй формулой Бине и формулой Славича.

Сравнение формул (1.8) и (1.5) показывает, что для доказательства последней достаточно установить равенство интегралов

$$2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{\exp(2\pi t)-1}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,e^{-zt}\,dt, \qquad z \in \Pi_+, \tag{3.9}$$

с функцией $g(t)$, определенной в (2.1). Обе части (3.9) являются аналитическими функциями в правой полуплоскости Π_+, поэтому обоснование равенства (3.9) достаточно провести для $z = x > 0$. Тогда после подстановки в правую часть (3.9) вместо $g(t)$ ее разложения на простые дроби (2.3), нетрудно убедиться в законности почленного интегрирования, приводящего к левой части (3.9). Такой способ вывода второй формулы Бине нам не встречался. Отметим, что привлечение разложения (2.3) оказывается полезным и в другой задаче — о вычислении интеграла (2.16), решенной иначе в лемме 2.1 (близкий интеграл изящным приемом Прингсгейма посчитан в [5, глава 12, §12.31]).

Обращаясь к формуле Славича (1.2), напомним о ее роли в получении двусторонних оценок типа (1.4) (см. [1], [4]). Фактически речь идет о том, что асимптотический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{-2k}-1)\,B_{2k}}{k(2k-1)}\,\frac{1}{x^{2k-1}}$$

обвертывает на луче $x > 0$ функцию $\ln\bigl(\sqrt{x}\,D(x)\bigr)$. Но теперь, благодаря общему интегральному представлению (3.2) из предложения 3.1, оказывается возможным доказать наличие подобного свойства выписанного ряда уже в комплексной области, точнее — в угле $|\arg z| \leqslant \pi/4$ с исключенной вершиной. Другими словами, для заданной по формуле (3.1) величины $D(z)$ в указанном угле будет действовать асимптотически точная комплексная версия двусторонних оценок (1.4). Подробное изложение описанных здесь результатов требует отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D.V. Slavić. *On inequalities for* $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$ // Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika. **498/541**, 17–20 (1975).
2. А.Ю. Попов. *Двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента* // Челяб. физ.-матем. журн. **5**:1, 56–69 (2020).
3. И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович. *Сравнительный анализ двусторонних оценок центрального биномиального коэффициента* // Челяб. физ.-матем. журн. **5**:1, 70–95 (2020).
4. A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov. *Asymptotic Behavior of Remainders of Special Number Series* // J. Math. Sci. **251**, 814–838 (2020).
5. E.T. Whittaker, G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis.* **2**, Cambridge University Press, Cambridge (1927).
6. H. Masayoshi. *Problems And Solutions In Real Analysis (Second Edition). On Number Theory And Its Applications.* **14**, World Scientific Publishing Company, Singapore (2016).
7. C.J. Malmstén. *Sur la formule* $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{2!}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{4!}\Delta u^{IV}_x + etc.$ // J. Reine Angew. Math. **35**:1, 55–82 (1847).
8. I. Blagouchine. *Rediscovery of Malmsten's integrals, their evaluation by contour integration methods and some related results* // The Ramanujan J. **35**:1, 21–110 (2014).
9. Р. Аски, Р. Рой, Дж. Эндрюс. *Специальные функции.* МЦНМО, Москва (2013).
10. J. Binet. *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes et sur leur application à la theorie des suites ainsi qu'à l'èvaluation des fonctions des grandes nombres* // J. l'Ecole Polytechnique. **16**:1, 100–149 (1838–39).
11. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* Наука, Москва (2014).
12. М. Абрамовиц, И. Стиган. *Справочник по специальным функциям.* Наука, Москва (1979).
13. Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций.* Наука, Москва (1978).

Андрей Борисович Костин,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: `abkostin@yandex.ru`

Владимир Борисович Шерстюков,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: `shervb73@gmail.com`