ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 42-50.

УДК 517.538

# СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ СУММ

**М.А. КОМАРОВ**

**Аннотация.** Рассматривается формула дифференцирования аналитических в круге $|z| < 1$ функций: $azf'(z) = nf(0) - \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k z) + R_n(z)$. Здесь $a \neq 0$ — вещественная постоянная, $n = 1, 2, \dots$, а комплексные параметры $\lambda_k = \lambda_{n,k}(a)$, $k = 1, \dots, n$, определяются как (единственное) решение дискретной системы моментов для ньютоновых степенных сумм $\lambda_1^m + \dots + \lambda_n^m = -ma$, $m = 1, \dots, n$. При таком выборе параметров, функция $R_n(z) = R_n(a, f; z)$ (остаточный член формулы) имеет порядок малости $O(z^{n+1})$ при $z \to 0$. В работе доказано, что при каждом фиксированном $a > 0$ и любом $n \geqslant 3\alpha$ ($\alpha := \max\{a; 1\}$) область применимости формулы содержит круг $|z| < \exp(-3\sqrt{v} - 2v)$, $v := \alpha/(n+1)$, радиус которого стремится к единице при $n \to \infty$. Установлена экспоненциальная скорость сходимости дифференцирующих сумм к $nf(0) - azf'(z)$ в том же круге. Этот результат дополняет и заметно расширяет предшествующие результаты работ В.И. Данченко (2008) и П.В. Чунаева (2020), в которых, соответственно, для случаев $a = -1$ и $-n \leq a < 0$ была установлена сходимость формулы дифференцирования, но лишь в областях, содержащихся в фиксированных компактных подмножествах единичного круга. Доказательство основных результатов статьи опирается на существенно отличающийся от метода работ Данченко и Чунаева подход к построению решения указанной системы моментов.

**Ключевые слова:** дифференцирование аналитических функций, дифференцирующие суммы, $h$-суммы, скорость сходимости.

**Mathematics Subject Classification:** 30E10, 41A25, 65D25

## 1. Введение

Пусть

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m$$

– аналитическая в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функция. В.И. Данченко [1, п. 2.4] предложил формулу численного дифференцирования

$$(zh(z))' = \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\mu_k z) + \varepsilon_n(z), \quad \mu_k = \mu_{n,k} \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.1}$$

где комплексные числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ однозначно определяются из условия

$$\varepsilon_n(z) = O(z^n) \quad (z \to 0).$$

А именно, поскольку

$$(zh(z))' - \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\mu_k z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( m - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m \right) h_{m-1} z^{m-1},$$

---

M.A. Komarov, Convergence rate of one class of differentiating sums.



*Поступила 2 сентября 2020 г.*

то $\mu_1, \dots, \mu_n$ это (единственное) решение системы

$$\mu_1^m + \dots + \mu_n^m = m, \quad m = 1, \dots, n,$$

для ньютоновых степенных сумм. Один из способов решения системы основан на применении рекуррентных формул Ньютона (подробнее см. в [1]). Важно отметить, что величины $\mu_k$ не зависят от функции $h$. Суммы вида $\sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\mu_k z)$ получили название *$h$-сумм*.

Любая аналитическая в $D$ функция

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m$$

может быть представлена в виде $f(z) = f(0) + zh(z)$ с определенной аналитической в $D$ функцией $h$, поэтому формула (1.1) эквивалентна формуле

$$zf'(z) = -nf(0) + \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k z) + \varrho_n(z), \qquad \varrho_n(z) = O(z^{n+1}). \tag{1.2}$$

Недавно П.В. Чунаев [2, п. 3.3.5] рассмотрел обобщение формулы (1.2),

$$zf'(z) = -tf(0) + \frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\mu}_k z) + \tilde{\varrho}_n(z), \qquad \tilde{\varrho}_n(z) = O(z^{n+1}), \tag{1.3}$$

введя дополнительный вещественный параметр $t \neq 0$. Ясно, что (1.3) совпадает с (1.2) при $t = n$, и обе формулы точны на полиномах степени не выше $n$. Величины $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_{n,k}(t)$ определяются из системы

$$\tilde{\mu}_1^m + \dots + \tilde{\mu}_n^m = \frac{mn}{t}, \quad m = 1, \dots, n.$$

В работах [1], [2] установлены области применимости формул дифференцирования (1.2), (1.3) и даны оценки погрешностей. Так, в [2] показано, что если

$$|f_m| \leqslant 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

то при всех $t \geqslant 1$

$$|\tilde{\varrho}_n(z)| \leqslant \frac{2\sqrt[n]{t}\,\big|(2n+1)z\big|^{n+1}}{\big(\sqrt[n]{t} - (2n+1)|z|\big)^2}, \qquad |z| < \frac{\sqrt[n]{t}}{2n+1}.$$

Простой анализ доказательства показывает, что

а) эта оценка верна и при $t \leqslant -1$, если заменить в ней $t$ на $|t|$,

б) при $|t| \asymp n$ можно утверждать большее, например, при $t = n$ по теореме 4($b$) из [2], где полагаем $r_0 = n$, $\gamma = a = 1$, получается оценка погрешности формулы (1.2),

$$|\varrho_n(z)| \leqslant 2n \frac{|3z|^{n+1}}{(1 - 3|z|)^2}, \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

Тем не менее, найденные в [1], [2] области применимости формул (1.2), (1.3) заметно меньше области аналитичности функции $f$ (содержащей единичный круг). В данной работе для каждого фиксированного $t < 0$ мы строим новую оценку погрешности формулы (1.3), применимую в круге вида $|z| < r$, где $r = r(t, n) \to 1$ при $n \to \infty$. Метод доказательства существенно отличен от метода работ [1], [2] и не обобщается на случай $t > 0$.

Другие эффективные модификации метода дифференцирующих $h$-сумм, отличные от (1.3), построены автором [3], В.И. Данченко и П.В. Чунаевым [4]. В первой из этих работ исследовано дифференцирование *разностями $h$-сумм*, во второй – *амплитудно-частотными суммами* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\mu_k z)$. В [5] А.В. Фрянцев применил метод $h$-сумм для аппроксимации дифференциальных полиномов определенного вида, обобщающих оператор дифференцирования $(zh(z))'$.

## 2. Результаты

Положив $a = -n/t$, при $t < 0$ запишем формулу (1.3) в виде

$$azf'(z) = nf(0) - \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k z) + R_n(z), \quad a > 0, \quad \lambda_k = \lambda_{n,k}(a), \tag{2.1}$$

где

$$R_n(z) = R_n(a, f; z) = O(z^{n+1}), \quad z \to 0, \qquad \lambda_{n,k}(a) := \tilde{\mu}_{n,k}\left(-\frac{n}{a}\right).$$

Ясно, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ это (единственное) решение системы

$$\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m = -ma, \quad m = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

а остаточный член формулы (2.1) имеет вид

$$R_n(a, f; z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} (ma + S_m) f_m z^m, \qquad S_m = S_{n,m}(a) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m.$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $a > 0$, $n \geqslant 3\alpha$ и $r = r_n(\alpha)$, где*

$$r_n(\alpha) = \exp\left(-\frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\alpha+1}{n+1}\right), \quad \alpha = \max\{a; 1\}.$$

*Тогда для решения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ системы* (2.2) *верна оценка*

$$\Lambda_n(a) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k| < r^{-1}. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1 будет доказана в параграфе 3. Напомним, что, согласно [2], для параметров формулы (1.3) верна оценка

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\tilde{\mu}_{n,k}(t)| \leqslant \frac{2n+1}{\sqrt[n]{|t|}}, \quad t \neq 0,$$

из которой при $t := -n/a$ получаем следующую оценку величин $\Lambda_n(a)$:

$$\Lambda_n(a) \leqslant \frac{2n+1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{|a|}.$$

Видим, что при каждом фиксированном $a > 0$ оценка (2.3) точнее по порядку количества $n$, ибо при $n \to \infty$ имеет место асимптотика

$$r^{-1} = (r_n(\alpha))^{-1} \sim 1 + \frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{3\sqrt{a+1}}{\sqrt{n}}.$$

Найдем область применимости и оценку остатка формулы (2.1).

**Теорема 2.2.** *Пусть $a > 0$, $n \geqslant 3\alpha$ и $r = r_n(\alpha)$, где $\alpha = \max\{a; 1\}$. Пусть $|f_m| \leqslant 1$ для всех $m \geqslant n+1$. Тогда*

$$|R_n(a, f; rz)| \leqslant (n+1)\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}, \quad |z| < 1.$$

*Доказательство.* Ввиду (2.3) имеем $|S_m| < nr^{-m}$ $(m \geqslant n+1)$ и

$$|R_n(a, f; rz)| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \big(m\alpha r^m + n\big)|z|^m, \quad m\alpha < e^{3\sqrt{m\alpha}} \leqslant e^{\frac{3m\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n+1}}} < r^{-m},$$

что и доказывает теорему 2.2. $\square$

**Замечание 2.1.** *При каждом $n \geqslant 3$ наибольшее значение $a$, при котором выполнены условия теоремы* 2.1, *равно $n/3$. Согласно* (2.3), *соответствующее значение величины $\Lambda_n$ не превосходит*

$$\exp\Big(\frac{3\sqrt{3}+1}{3}\Big)+o(1)\approx 7.89, \quad n\to\infty.$$

*Однако, нетрудно установить более точную границу (см. замечание 4.1 в параграфе 4.1):*

$$\Lambda_n(\tfrac{n}{3})<\exp\Big(\frac{2\sqrt{3}+1}{3}\Big)=4.42838\ldots \quad (n\geqslant 50). \tag{2.4}$$

**Следствие 2.1.** *Если функция $f$ аналитична в $D$ и*

$$|f(z)|\leqslant 1, \quad |z|<1,$$

*то при $r=(4.4284)^{-1}=0.2258\ldots$ верна оценка*

$$\Big|\frac{zf'(z)}{3}-f(0)\Big|\leqslant 1, \quad |z|\leqslant r.$$

*Доказательство.* Формула (2.1) точна для полиномов $P$ степени не выше $n$, в частности, при $a=n/3$ имеем тождество

$$n\frac{zP'(z)}{3}\equiv nP(0)-\sum_{k=1}^{n}P(\lambda_k^*z), \quad \lambda_k^*=\lambda_{n,k}(\tfrac{n}{3}).$$

При $n\geqslant 50$ положим $f(z)=P_n(z)+F_n(z)$, где $P_n$ – $n$-й полином Маклорена функции $f$, $P_n(0)=f(0)$. В силу тождества и оценки (2.4), в круге $|z|\leqslant r$ имеем

$$\Big|\frac{zP'(z)}{3}-f(0)\Big|=\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}P_n\big(\lambda_k^*z\big)\Big|\leqslant\max_{|z|=\delta}|P_n(z)|,$$
$$\delta:=r\cdot\Lambda_n(\tfrac{n}{3})<(4.4284)^{-1}\cdot 4.42839<1.$$

Следовательно,

$$\Big|\frac{zf'(z)}{3}-f(0)\Big|\leqslant 1+\Delta_n, \quad |z|\leqslant r,$$

где

$$\Delta_n:=\max_{|z|=\delta}|F_n(z)|+\max_{|z|=r}\Big|\frac{z}{3}F_n'(z)\Big|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

ввиду ограниченности функции $f$. Поскольку $n$ произвольно, получаем искомое. □

Равенство в оценке следствия 2.1 достигается на постоянной функции $f(z)\equiv 1$. Максимально возможное значение радиуса $r$ в этой оценке может быть получено из общей теоремы Г.М. Голузина [6] и равно

$$r_{\max}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}=0.4514\ldots.$$

В самом деле, если обозначить коэффициенты функции $f$ через $f_0, f_1, \ldots$, то

$$\frac{zf'(z)}{3}-f(0)=\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m f_m, \quad \gamma_0:=-1, \quad \gamma_m:=\frac{mz^m}{3} \quad (m\geqslant 1).$$

Тем самым, неравенство

$$\Big|\frac{zf'(z)}{3}-f(0)\Big|\leqslant 1, \qquad |z|\leqslant r,$$

равносильно тому, что

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m f_m\Big|\leqslant|\gamma_0|=1, \quad \gamma_m=\frac{mz^m}{3}, \quad |z|=r. \tag{2.5}$$

Но, согласно [6, теорема 1 и формула (18)], неравенство (2.5) имеет место для всех функций указанного в следствии 2.1 класса в том и только том случае, когда

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\zeta^m\right| \geqslant \left|\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m\zeta^m\right| \quad \text{на} \quad |\zeta|=1.$$

Суммируя ряды, получим

$$\left|-1+\frac{w}{3(1-w)^2}\right| \geqslant \left|\frac{w}{3(1-w)^2}\right| \quad (w:=z\zeta,\ |w|=r),$$

что равносильно условию

$$\left|(w-1)^2-\frac{w}{3}\right| \geqslant r \quad (|w|=r).$$

Минимум левой части этого неравенства на окружности $|w|=r<1$, очевидно, достигается при $w:=|w|=r$ и равен $|(r-1)^2-r/3| =: h(r)$. Если $r\in(r_1,1)$, где

$$r_1 := \frac{7-\sqrt{13}}{6} \approx 0.5657,$$

то $h(r)\leqslant 13/35 < r_1$, так что неравенство $h(r)\geqslant r$ не выполняется. Если же $r\in(0,r_1)$, то выражение под модулем положительно, и неравенство $h(r)\geqslant r$ принимает вид

$$(r-1)^2-\frac{r}{3}\geqslant r.$$

Выбирая среди его решений, лежащих в допустимом интервале $(0,r_1)$, максимальное, приходим к искомому $r_{\max}$.

## 3. Доказательство теоремы 2.1

**3.1. Решение системы (2.2).** Рассмотрим функцию

$$g(z)=\exp\frac{a(1+z)}{2(1-z)}, \quad |z|<1, \quad a\in\mathbb{C}, \quad a\neq 0,$$

и ее ряд Маклорена [7, п. 11.2]

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, \quad c_n=c_n(a)=e^{\frac{a}{2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{a^k}{k!}.$$

Корни $n$-го полинома Маклорена

$$g_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k, \quad g_n(0)=e^{\frac{a}{2}},$$

отличны от нуля; обозначим их $z_k=z_{n,k}(a)$, $k=1,\dots,n$. Очевидно,

$$\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{g_n'(z)}{g_n(z)}=O(z^n) \quad (z\to 0).$$

С другой стороны, в некоторой окрестности точки $z=0$ имеем

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{a}{(1-z)^2}=a\sum_{m=1}^{\infty}mz^{m-1}$$

и

$$\frac{g_n'(z)}{g_n(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}z_k^{-m}\right)z^{m-1}.$$

Следовательно, при всех $n=1,2,\dots$ и любом комплексном $a\neq 0$

$$z_1^{-m}+\dots+z_n^{-m}=-ma, \quad m=1,\dots,n,$$

так что (единственное) решение системы (2.2) это

$$\lambda_{n,k}(a) := (z_{n,k}(a))^{-1}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

**3.2. Оценка (2.3) в случае** $a \geqslant 1$**.** Известно [7, п. 11.2], что $c_n(a) = e^{2\sqrt{an}(1+o(1))}$ при $n \to \infty$ $(a > 0)$. Нам потребуется явная оценка величин $c_n(a)$ сверху и одно элементарное неравенство (доказательство лемм 3.1, 3.2 см. в п. 4):

**Лемма 3.1.** *При* $a \geqslant 1$, $n \geqslant 3a$ *имеем*

$$c_n(a) < \tfrac{1}{4} e^{(\frac{5}{2}-\sqrt{3})(a+1)} e^{\frac{3}{2}} e^{2\sqrt{an}} < e^{a+1} e^{2\sqrt{an}}.$$

**Лемма 3.2.** *При* $b \geqslant 1$, $x > 1$ *имеем* $e^{-bx} + e^{-\frac{b}{x}} < 1$.

С помощью этих лемм при $n \geqslant 3a \geqslant 3$ установим оценку

$$|g_n(z)| > 0, \quad |z| \leqslant r_n(a) = e^{x_n}, \quad x_n := -\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}} - \frac{a+1}{n+1},$$

из которой, ввиду (3.1), тотчас следует (2.3) для случая $a \geqslant 1$.

В самом деле, $|g(z)| > 1$ в круге $D$, ибо

$$\operatorname{Re} \frac{a(1+z)}{2(1-z)} = \frac{a}{2} \frac{1-|z|^2}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} > 0.$$

С учетом леммы 3.1, в круге $|z| \leqslant e^{x_n}$ имеем

$$|g_n(z)| \geqslant |g(z)| - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k |z|^k > 1 - T_n(a), \quad T_n(a) := \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{a+1} e^{2\sqrt{ak}} e^{kx_n}.$$

Покажем, что $T_n(a) < 1$. При $k \geqslant n+1$ имеем

$$a + 1 + 2\sqrt{ak} + kx_n \leqslant 2\sqrt{ak} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}} k \leqslant -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}} k,$$

поэтому

$$T_n(a) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}}} \right)^k = \frac{e^{-\sqrt{a(n+1)}}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}}}}.$$

Остается заметить, что $e^{-\sqrt{a(n+1)}} < 1 - e^{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}}}$ по лемме 3.2.

**Замечание 3.1.** *Положительность параметра* $a$ *существенна, ибо в случае* $a < 0$ *модуль* $|g(z)|$ *не отделен от нуля в* $D$:

$$g(x) \sim e^{\frac{a}{1-x}} \to 0 \quad (x > 0,\ x \to 1 - 0).$$

**3.3. Оценка (2.3) в случае** $0 < a < 1$**.** Ввиду (3.1) и $\alpha = 1$ достаточно установить, что $|g_n(z)| > 0$ в круге $|z| \leqslant r_n(1)$, $n \geqslant 3$. Но при $a \in (0, 1)$ имеем

$$c_n(a) e^{-\frac{a}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{a^k}{k!} < a \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k!} = a e^{-\frac{1}{2}} c_n(1), \quad n \geqslant 1, \tag{3.2}$$

откуда

$$c_n(a) < a e^{\frac{a-1}{2}} c_n(1) < c_n(1).$$

Следовательно, для любого $n \geqslant 3$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(a) (r_n(1))^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(1) (r_n(1))^k < T_n(1) < 1$$

(см. параграф 3.2). Теорема 2.1 доказана.

Добавим, что если $a \in \left(0, \left(ne^{2+2\sqrt{n}}\right)^{-1}\right]$, то

$$\Lambda_n(a) < \left(ane^{2+2\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1.$$

В самом деле, из леммы 3.1 и равенств

$$c_1(1) = \sqrt{e}, \qquad c_2(1) = \frac{3}{2}\sqrt{e}$$

имеем

$$c_n(a) < ac_n(1) < ae^{2+2\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < a < 1,$$

откуда при любом $\gamma \geqslant 1$

$$|g_n(z)| \geqslant e^{\frac{a}{2}} - \sum_{k=1}^{n} c_k|z|^k > 1 - n \cdot ae^{2+2\sqrt{n}}\gamma^n, \quad |z| \leqslant \gamma.$$

## 4. Доказательство лемм

**4.1. Доказательство леммы 3.1.** В [7, п. 11.2] показано, что максимальное слагаемое в сумме, выражающей $c_n(a)$ (см. параграф 3.1), имеет номер

$$p = \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 + 4an} - \tfrac{1}{2}(a+1)\right]$$

(здесь $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее $x$). Таким образом,

$$c_n(a) \leqslant ne^{\frac{a}{2}}\binom{n-1}{p-1}\frac{a^p}{p!} \equiv e^{\frac{a}{2}}\frac{n!pa^p}{p!^2(n-p)!}. \tag{4.1}$$

Заметим, что в условиях леммы

$$p \geqslant 1, \quad n - p \geqslant 1.$$

В самом деле, если $p = 0$, то

$$\sqrt{(a+1)^2 + 4an} - (a+1) < 2,$$

откуда $n < 1 + 2/a$. Противоречие с тем, что $n \geqslant 3a \geqslant 3$. Стало быть, $p \geqslant 1$. Из легко проверяемой оценки

$$p \leqslant \sqrt{an} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(a+1) < \sqrt{an} \tag{4.2}$$

вытекает и второе соотношение:

$$1 + p < 1 + \sqrt{an} \leqslant \frac{n}{3} + \frac{n}{\sqrt{3}} < n.$$

Далее, имеем

$$p > \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 + 4an} - \frac{1}{2}(a+1) - 1 > \sqrt{an} - \frac{1}{2}(a+3)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{an} < p + \frac{1}{2}(a+3). \tag{4.3}$$

Преобразовав правую часть в (4.1) с помощью формулы Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(ne^{-1}\right)^n\varepsilon_n, \quad 1 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < \exp\tfrac{1}{12n},$$

придем к оценке

$$\frac{c_n(a)}{e^{\frac{a}{2}}} < \frac{\sqrt{n}n^na^pe^p}{2\pi p^{2p} \cdot \sqrt{n-p}(n-p)^{n-p}} = \frac{e^p}{2\pi\sqrt{1-\frac{p}{n}}}\left(\frac{\sqrt{an}}{p}\right)^{2p}\left(1 + \frac{p}{n-p}\right)^{n-p}.$$

Заметим, что ввиду неравенств (4.2), (4.3), $a \leqslant n/3$, имеем

$$2\pi\sqrt{1-\frac{p}{n}} > 2\pi\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} > 4, \quad \frac{\sqrt{an}}{p} < 1 + \frac{a+3}{2p}.$$

Отсюда и из неравенств $(1+x)^{1/x} < e$ $(x>0)$ и (4.2) следует

$$c_n(a) < e^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{e^p}{4} e^{a+3} e^p = e^{\frac{3a}{2}+3-\ln 4} e^{2p},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a + 3 - \ln 4 + 2p \leqslant& \frac{3}{2}a + 3 - \ln 4 + 2\sqrt{an} - (\sqrt{3}-1)(a+1) \\ =& \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)(a+1) + \left(\frac{3}{2} - \ln 4\right) + 2\sqrt{an} \\ <& a + 1 + 2\sqrt{an}. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

**Замечание 4.1.** *Обоснуем оценку (2.4). В круге*

$$|z| \leqslant \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)$$

*имеем*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(\tfrac{n}{3}) z^k\right| \leqslant T_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{t_k},$$

*где, ввиду $k \geqslant n+1 > 50$ и предыдущей оценки величин $c_n(a)$ при $a = n/3$,*

$$\begin{aligned} t_k =& \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)\frac{n+3}{3} + \left(\frac{3}{2} - \ln 4\right) + \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} - \frac{k}{3} \\ \leqslant& \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{2} - \ln 4\right) - \frac{k}{3}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \\ =& (0.62567\ldots - k \cdot 0.01735\ldots) - k \cdot 0.06 \\ <& -0.06k. \end{aligned}$$

*Отсюда получаем искомое:*

$$T_n < e^{-0.06(n+1)}(1-e^{-0.06})^{-1} < e^{-3}(1-e^{-0.06})^{-1} = 0.8549\ldots < 1.$$

**4.2. Доказательство леммы 3.2.** Поскольку $F(x) := e^{-bx} + e^{-b/x} \to 1$ $(x \to +\infty)$, то достаточно показать, что $F'(x) > 0$ при $x > 1$.

Имеем $F'(x) = -be^{-bx} + bx^{-2}e^{-b/x}$. Неравенство $F'(x) > 0$ $(x>1)$ равносильно неравенству $e^{b(x-x^{-1})} > x^2$ и, следовательно, неравенству

$$G(x) := b\big(x - x^{-1}\big) - 2\ln x > 0.$$

Но последнее верно, ибо $G(1) = 0$ и, ввиду $b \geqslant 1$,

$$G'(x) = b\big(1 + x^{-2}\big) - 2x^{-1} \geqslant \big(1 - x^{-1}\big)^2 > 0.$$

Лемма 3.2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. В.И. Данченко. *Об аппроксимативных свойствах сумм вида* $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. **83**:5, 643–649 (2008).
2. P.V. Chunaev. *Interpolation by generalized exponential sums with equal weights* // J. Approx. Theory. **254**, art. 105397 (2020).
3. M.A. Komarov. *Rate of approximation of* $zf'(z)$ *by special sums associated with the zeros of the Bessel polynomials* // Indag. Math. (N.S.). **31**:3, 450–457 (2020).
4. P.V. Chunaev, V.I. Danchenko. *Approximation by amplitude and frequency operators* // J. Approx. Theory. **207**, 1–31 (2016).
5. А.В. Фрянцев. *О численной аппроксимации дифференциальных полиномов* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **7**:2, 39–43 (2007).
6. Г.М. Голузин. *Некоторые оценки для ограниченных функций* // Матем. сб. **26**:1, 7–18 (1950).
7. И.И. Привалов. *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва, Ленинград (1950).



Михаил Анатольевич Комаров,
Владимирский государственный университет,
ул. Горького, 87,
600000, г. Владимир, Россия
E-mail: kami9@yandex.ru