ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 17-22.

УДК 517.18

СУММАРНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННОЕ ТРЕУГОЛЬНИКОМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

Аннотация. Пусть D – треугольник, а Γ – «половина» его границы ∂D. Рассматривается полиэлементное линейное суммарно-разностное уравнение в классе функций, голоморфных вне Γ и исчезающих на бесконечности. Решение ищется в виде интеграла типа Коши по Γ с неизвестной плотностью. Граничные значения удовлетворяют условию Гельдера на любом компакте из Γ, не содержащем узлов. В узлах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Для регуляризации уравнения на ∂D вводится кусочно-линейный сдвиг Карлемана. Он переводит каждую сторону в себя с изменением ориентации. При этом середины сторон являются неподвижными точками сдвига. Проведена регуляризация уравнения и найдено условие ее разрешимости. Рассмотрен частный случай, когда число условий разрешимости удается точно сосчитать. Указаны приложения к интерполяционным задачам для целых функций экспоненциального типа. Ранее были исследованы подобные задачи для четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника.

Ключевые слова: суммарно-разностное уравнение, задача Карлемана, равносильная регуляризация, интерполяционные задачи для целых функций экспоненциального типа.

Mathematics Subject Classification: 30EXX: 30E05, 30E20, 30E25

1. Введение и постановка задачи

В цикле работ [1]–[3] были рассмотрены суммарно-разностные уравнения, порожденные некоторыми многоугольниками. В статье [1] это был четырехугольник, а в статьях [2] и [3] – соответственно пятиугольник и шестиугольник, имеющие две равные и параллельные стороны. Такие уравнения тесно связаны с интерполяционными задачами для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.)

Пусть теперь D – треугольник с вершинами $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3, \operatorname{Im} t_3 \neq 0$ и сторонами ℓ_j, перечисленными в порядке положительного обхода его границы ($t \in \ell_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = 0$). Введем функции $\sigma_j(z) = t_j + t_{j+1} - z,\ j = \overline{1,3}$ $(t_4 = t_1)$. Эти функции переводят D в треугольники, имеющие с ними общую сторону. Кусочно-линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t),\ t \in \ell_j\}$ переводит каждую сторону ℓ_j в себя с изменением ориентации, причем середина стороны τ_j – неподвижная точка сдвига. Итак, это инволютивный сдвиг Карлемана, разрывной

F.N. Garif'yanov, E.V. Strezhneva, Sum-difference equation for analytic functions generated by a triangle and its applications.

© Garif'yanov F.N., Strezhneva E.V. 2021.

Поступила 2 ноября 2020 г.

в вершинах. Суперпозиции $\sigma_j\sigma_k$, $j \neq k$, $k = \overline{1,3}$ имеют вид

$$\sigma_4(z) = z - 1, \qquad \sigma_5 = \sigma_4^{-1}, \qquad \sigma_6(z) = z - t_3,$$
$$\sigma_7 = \sigma_6 - 1, \qquad \sigma_8(z) = z - t_3 + 1, \qquad \sigma_9 = \sigma_8^{-1}.$$

Еще три преобразования $\sigma_{10}(z) = -z$, $\sigma_{11}(z) = 2 - z$, $\sigma_{12}(z) = 2t_3 - z$ переводят D в треугольники, имеющие с ним общую вершину. Пусть Γ – «половина» границы ∂D (совокупность отрезков), удовлетворяющая двум условиям. Во-первых, $\Gamma \cap \alpha(\Gamma) = \varnothing$. Во-вторых, $\Gamma \cup \alpha(\Gamma) = \partial D$. Эти равенства понимаются с точностью до вершин D и узлов Γ. Ясно, что $\overline{\Gamma}$ содержит не менее двух вершин и все точки τ_j, $j = \overline{1,3}$. Впервые такой выбор Γ был предложен в статье [4].

Рассмотрим суммарно-разностное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv f(z) + \sum_{m=1}^{12} f[\sigma_m(z)] = g(z), \qquad z \in D \tag{1.1}$$

при следующих предположениях.

1. Решение $f(z)$ голоморфно вне Γ и исчезает на бесконечности. Его граничные значения $f^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям Гельдера на Γ. В узлах Γ и вершинах D допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

2. Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+(t) \in H_\mu(\partial D)$.

Такой класс решений обозначим через B. Выпуклая оболочка множества Γ есть сопряженная индикаторная диаграмма ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю ([5], §1, п. 1.) с нижней функцией $f(z) \in B$. Это и позволяет применить уравнение (1.1) к исследованию интерполяционных задач для ц.ф.э.т. В разделе 2 предложен метод регуляризации уравнения (1.1). Получено условие равносильности этой регуляризации. Полностью исследован один частный случай. В разделе 3 полученные результаты применяются к исследованию некоторых интерполяционных задач для ц.ф.э.т.

2. Регуляризация уравнения. Частный случай

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau) \in H_\mu\left(\overline{\Gamma}\right)$. Тогда из (1.1) следует, что

$$(E\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) A(z,\tau) d\tau = g(z), \qquad z \in D,$$

где

$$A(z,\tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_{m=1}^{12} (\tau - \sigma_m(z))^{-1}. \tag{2.2}$$

Переходя к пределу по $z \to t$, $(t \in \Gamma)$, по формуле Сохоцкого получим

$$\left(E^+\varphi\right)(t) \equiv 2^{-1}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) A(t,\tau) d\tau = g^+(t), \qquad t \in \Gamma.$$

Переходя к пределу по $z \to \alpha(t)$, имеем

$$\left(E^{+}\varphi\right)\alpha(t) \equiv -2^{-1}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\tau)A(\alpha(t),\tau)d\tau = g^{+}\alpha(t), \qquad t \in \Gamma.$$

Вычитаем из первого соотношения второе, придем к уравнению

$$(T\varphi) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g^{+}(t) - g^{+}[\alpha(t)] \tag{2.3}$$

с ядром

$$K(t,\tau) = A(t,\tau) - A[\alpha(t),\tau]. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Ядро (2.4) ограничено.*

Доказательство. Оно заключается в непосредственной проверке при различных вариантах расположения точек τ и t на сторонах треугольника.

Итак, уравнение (2.3) есть уравнение Фредгольма второго рода. Допустим, что оно разрешимо. Осуществим обратный переход к уравнению (1.1). Имеем

$$(2.3) \Rightarrow \left(E^{+}\varphi\right)(t) - \left(E^{+}\varphi\right)(\alpha(t)) = g^{+}(t) - g^{+}\left[\alpha(t)\right] \Rightarrow (E\varphi)(z) = g(z) + C,$$

поскольку задача Карлемана $a^{+}(t) = a^{+}\left[\alpha(t)\right]$ в силу принципа локально-конформного склеивания [6] имеет единственное решение $a(z) = const$. □

Теорема 2.1. *Задача (1.1) имеет конечное число $N+1$ условий разрешимости. Из них N – это число условий разрешимости интегрального уравнения (2.3), а еще одно*

$$(E\varphi)(z_0) = g(z_0), \quad z_0 \in D \tag{2.5}$$

обеспечивает равносильность регуляризации.

Пример 2.1. *Рассмотрим частный случай, когда удается точно сосчитать число N. Пусть $t_3 = i$ и $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{3}\ell'_j$, где $\ell'_1 = (0, 0.5)$, $\ell'_2 = (1, 0.5(1+i))$, $\ell'_3 = (0, 0.5i)$.*

Рассмотрим однородное уравнение

$$T\varphi = 0. \tag{2.6}$$

Положим

$$M = \max\left|\varphi(t)\right|, \quad t \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Допустим вначале, что равенство (2.7) достигается при $t \in \ell'_1$. При таком расположении точки t получим

$$\begin{aligned} K(t,\tau) = {} & (u+i)^{-1} + (u-1-i)^{-1} + (v-2i)^{-1} - (v-1+i)^{-1} - (v-2-i)^{-1} \\ & - (u+1-2i)^{-1} = (2t-1)\Big[(u+i)^{-1}(v-1+i)^{-1} \\ & + (u-1-i)^{-1}(v-2-i)^{-1} - (v-2i)^{-1}(u+1-2i)^{-1}\Big], \end{aligned}$$

где $u = \tau - t$, $v = \tau + t$.

Наибольшее значение модуль ядра принимает при $t = 0$, а модуль каждого слагаемого в квадратных скобках не более 1, т.е. с учетом длин отрезков ℓ'_j получим

$$3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 2\pi,$$

откуда следует, что $\varphi \equiv 0$.

Допустим, что равенство (2.7) достигается при $t \in \ell_2'$. Тогда

$$\begin{aligned}K(t,\tau) &= (u-1)^{-1} + (u-i)^{-1} + v^{-1} - (v+2-i)^{-1} - (v-1-2i)^{-1} - (u+1+i)^{-1} \\ &= (2t-1-i)\left[(u-1)^{-1}(v-2-i)^{-1} + (u-i)^{-1}(v-1-2i)^{-1} - v^{-1}(u+1+i)^{-1}\right].\end{aligned}$$

Наибольшее значение модуль ядра достигает при $t = 1$ и модуль суммы в квадратных скобках не превосходит 2.17, т.е.

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|K(t,\tau)| \leq 6,$$

откуда вновь следует, что $\varphi \equiv 0$.

Осталось предположить, что равенство (2.7) достигается при $t \in \ell_3'$. Тогда

$$\begin{aligned}K(t,\tau) &= (u+1)^{-1} + (u-i+1)^{-1} + (u-2)^{-1} - (v-i+1)^{-1} \\ &\quad - (v+1-2i)^{-1} - (u-2+i)^{-1} \\ &= (2t-1)\left[(u+1)^{-1}(v-i+1)^{-1} + (u-i+1)^{-1}(v+1-2i)^{-1}\right. \\ &\quad \left. - (v-2i)^{-1}(u-2+i)^{-1}\right].\end{aligned}$$

Наибольшее значение модуль ядра достигает при $t = 0$, а модуль каждого из слагаемых в квадратных скобках не превосходит 1, т.е. с учетом длин отрезков ℓ_j' имеем

$$3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 2\pi,$$

откуда снова следует, что $\varphi \equiv 0$. Заметим, что в данном случае нет смысла делать более точные оценки. Итак, однородное уравнение (2.6) имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2.2. *В данном примере $N = 0$, т.е. задача (1.1) имеет одно условие разрешимости (2.5).*

3. Приложения

Уравнение (1.1) тесно связано с интерполяционными задачами для ц.ф.э.т. Ограничимся рассмотрением данного примера. Пусть $F(z)$ – ц.ф.э.т., ассоциированная по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$. Ее сопряженной индикаторной диаграммой будет, воообще говоря, трапеция D_0 с вершинами 0, 1, $(i+1)/2$, $i/2$.

Замечание 3.1. *Сопряженной индикаторной диаграммой может быть и «меньшее» выпуклое множество $D' \subset D_0$. Для этого необходимо, но не достаточно, чтобы свободный член $g(z)$ был аналитически продолжим из D в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Тогда соотношение (1.1) выполняется не только при $z \in D$, но и в данной окрестности, т.е. задача переопределена и ее решение может быть получено в явном виде. Такой случай не представляет большого интереса. Более подробно см., напр., [2].*

Возьмем треугольник $\Delta_1 = D \setminus \overline{D_0}$ и пусть $z_0 \in \Delta_1$. Пусть

$$g(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(z-z_0)^k}{k!},$$

причем радиус сходимости этого ряда $R > |z_0 - 1|$.

При $z \in \Delta$ перепишем соотношение (1.1) в виде

$$H(z) \equiv \int\limits_{\theta_0} F(\tau)\exp(-z\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{12}\int\limits_{\theta_k} F(\tau)\exp\left[-\tau\sigma_k(z)\right]d\tau = g(z), \qquad z \in \Delta. \tag{3.1}$$

Здесь θ_k – луч $\arg\tau = -\pi/2$ при $k = 0, 4, 5, 7, 9, 12$, луч $\arg\tau = \pi/2$ при $k = 1, 6, 8, 10, 11$, луч $\arg\tau = -\pi/4$ при $k = 2$ и луч $\arg\tau = \pi$ при $k = 3$. Коэффициент C_0 выбран так, чтобы выполнялось условие разрешимости (2.5). Приравнивая коэффициенты Тейлора левой и правой частей равенства в точке z_0, получим

$$\left.\frac{d^k H(z)}{dz^k}\right|_{z_0} = C_k, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Интерполяционная задача (3.2) для ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$, разрешима и имеет единственное решение.*

Теперь вернемся к общему случаю и сделаем несколько замечаний.

Замечание 3.2. *Пусть $\forall j\ t_j \in \overline{\Gamma}$, т.е. $D_0 = D$. Тогда возникают неклассические интерполяционные задачи для ц.ф.э.т. Представление о них дает работа [7]. Там рассматривалась задача о восстановлении ц.ф.э.т. по соотношениям, связывающим коэффициенты Тейлора нижней функции и моменты Стилтьеса верхней оносительно некоторого экспоненциального веса.*

Замечание 3.3. *Уже отмечалось, что в выборе множества Γ, т.е. и сопряженной индикаторной диаграммы D_0, есть некоторый произвол. В частности, $\forall\gamma \in [0.75, 1]$ можно выбрать Γ так, что отношение площади D_0 к площади треугольника равно γ.*

Замечание 3.4. *Пусть замыкание $\overline{\Gamma}$ содержит только две вершины. Тогда предложенный метод регуляризации применим и к уравнениям, полученным исключением из оператора V некоторых слагаемых. Дело в том, что несколько слагаемых в (2.2) при $z = t \in \Gamma$, ограничены. Поэтому (1.1) можно выбросить слагаемые, соответствующие таким σ_m. Так, в рассмотренном примере можно выбрать все или некоторые из пяти слагаемых, соответствующим преобразованиям σ_m, $m = \overline{6,9}$ и σ_{12}. Но преобразования σ_m, $m = \overline{0,3}$ отбросить нельзя ни при каком выборе Γ. Кроме того, пусть $b(z) \in A[D]$, причем $b(\overline{D}) \cap \overline{D} = \varnothing$. Тогда можно регуляризовать уравнение $(Vf)(z) + f\left[b(z)\right] = g(z)$, $z \in D$.*

Сравним эти результаты с ранее полученными в случае других n-угольников. Обозначим через p наименьшее число слагаемых в левой части соответствующего суммарно-разностного уравнения, при которых оно допускает регуляризацию указанным методом. Для определенности считаем, что множество $\overline{\Gamma}$ содержит все вершины многоугольника (см. замечание 3.4). Тогда при $n = 4$ имеем $p = 9$ [1], при $n = 5$ имеем $p = 7$ [2], при $n = 6$ имеем $p = 7$ [3]. А вот при $n = 3$ получим $p = 13$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф.Н. Гарифьянов. *Полиэлементные уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами* // Сиб. матем. журн. **57**:2, 276–281 (2016).
2. E.P. Aksenteva, F.N. Garifyanov. *Sum-difference equation for analytic functions generated by pentagon and its application* // Lobachevskii J. Math. **37**:2, 101–104 (2016).

3. Ф.Н. Гарифьянов, Е.В. Стрежнева. *Суммарно-разностное уравнение для аналитических функций, порожденное шестиугольником, и его приложения* // Изв. вузов. Матем. 7, 56–62 (2020).
4. Ф.Н. Гарифьянов, С.А. Модина. *Ядро Карлемана и его приложения* // Сиб. матем. журн. **53**:6, 1263–1273 (2012).
5. Л. Бибербах. *Аналитическое продолжение*. Наука, Москва (1967).
6. Э.И. Зверович. *Метод локально-конформного склеивания* // Докл. АН СССР. **205**:4, 767–770 (1972).
7. Ф.Н. Гарифьянов, Д.Б. Кац. *Об одном уравнении с ядром Т. Карлемана и его приложении к проблеме моментов* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. **154**:3, 112–120 (2012).

Фархат Нургаязович Гарифьянов,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, 51,
420066, г. Казань, Россия
E-mail: f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева,
Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева–КАИ,
ул. К. Маркса, 10,
420111, г. Казань, Россия
E-mail: strezh@yandex.ru