УДК 517.53

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ МАЖОРАНТЫ РОСТА

Г.А. ГАЙСИНА

Аннотация. В статье речь идет о представлении аналитических в полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$ функций рядами экспонент с учетом заданного роста.

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий наиболее общий результат А.Ф. Леонтьева: для любой ограниченной выпуклой области D найдется последовательность $\{\lambda_n\}$ комплексных чисел, зависящая только от данной области, такая, что любую функцию F, аналитическую в D, можно разложить в ряд экспонент $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость — равномерная на компактах из D). Позже подобный результат о разложении в ряды экспонент, но с учетом роста, также был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка в выпуклом многоугольнике. Им при этом было показано, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n e^{\lambda_n z}\right|$ имеет ту же оценку сверху, что и исходная функция F. Этот факт в 1982 году был перенесен А.М. Гайсиным на полуплоскость Π_0^+.

В настоящей статье исследуется аналогичный случай, когда в качестве функции сравнения берется некоторая убывающая выпуклая мажоранта, не ограниченная около нуля. Для этого привлекаются методы оценок, основанные на преобразованиях Лежандра.

Доказано утверждение, а именно теорема 2.2, которое обобщает соответствующий результат А.М. Гайсина о разложении аналитических в полуплоскости функций с учетом порядка роста в ряды экспонент.

Ключевые слова: аналитические функции, ряды экспонент, мажоранта роста, билогарифмическое условие Левинсона.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Статья посвящена задаче разложения аналитических в полуплоскости функций в ряды экспонент с учетом роста, определяемым некоторой выпуклой мажорантой.

Пусть D – выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(D)$ – пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах из D.

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий результат А.Ф. Леонтьева (см. [1, гл. V, §3, п. 1]).

G.A. Gaisina, Representation of analytic functions by exponential series in half-plane with given growth majorant.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00168, https://rscf.ru/project/21-11-00168/.

Поступила 22 июня 2021 г.

Пусть D – ограниченная выпуклая область. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, такая, что любую функцию F из $A(D)$ можно в D разложить в ряд экспонент

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

В данной теореме последовательность показателей λ_n $(n = 1, 2, ...)$ выбирается как простые нули целой функции L экспоненциального типа и вполне регулярного роста с подходящими оценками для $|L'(\lambda_n)|$ снизу. Такая целая функция всегда существует (см. [1, гл. IV, §6, п. 2]). В этой связи напомним, что задача о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами в наиболее общем виде решена в [2], а в [3] этот результат был уточнен как в смысле оценок целой функции, так и размеров исключительных множеств (см. [4]).

В [1] показано также, что любую целую функцию Φ можно во всей плоскости представить рядом экспонент

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\nu_n z},$$

причем показатели ν_n $(n = 1, 2, ...)$ (их можно выбрать как минимум на трех лучах) являются нулями целой функции L уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty}\rho(r) = 1$ (см. [1, гл. VIII, §1, п. 3]).

Особый интерес представляют собой вопросы представления рядами экспонент в бесконечных областях D, $D \neq \mathbb{C}$. В [1] рассмотрен случай таких областей специального вида. Позже выяснилось, что любую функцию $F \in A(D)$, где D – произвольная бесконечная область, можно в D представить рядом

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\mu_n z}$$

(см. [5]). Это вытекает из результатов работ [3], [6] об аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля целой функции. Нас же будет интересовать здесь случай полуплоскости, который рассмотрен в работе [1] отдельно.

Теорема A. *Пусть F – функция, регулярная в левой полуплоскости*

$$\Pi_0^- = \{z = x + iy\colon\ x < 0\}.$$

Тогда имеется не зависящая от F последовательность $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n^{\rho}} = \tau$, $0 < \tau < \infty$ ($\rho > 1$ – любое), такая, что

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\mu_n z} + \textit{целая функция}, \quad z\in\Pi_0^-. \tag{1.1}$$

Отметим, что в данной теореме требование $\rho > 1$ вызвано существом дела: показатели μ_n $(n = 1, 2, ...)$ не могут быть нулями целой функции экспоненциального типа (см. [1, гл. VIII, §1, п. 3]).

Теорема A выводится из утверждения (см. [1, гл. VIII, §1, п. 3]):

Пусть F – функция, регулярная в полуплоскости Π_0^-. Тогда имеется функция f, регулярная в Π_0^- и непрерывная в замыкании $\overline{\Pi_0^-}$, и удовлетворяющая в $\overline{\Pi_0^-}$ условию $f(z) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$, существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$ с ростом не выше первого порядка минимального типа, целая функция Φ, такие, что

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^-.$$

Напомним, что дифференциальным оператором бесконечного порядка $M(D)$ можно действовать на функцию f во всей области регулярности (в данном случае – в Π_0^-). Действительно, функция $M(\lambda)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа, а потому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!|c_n|}=0. \tag{1.2}$$

Пусть a – произвольная точка из Π_0^-. Так как f регулярна в некоторой окрестности $\{z\colon |z-a|<\rho\}$ точки a, то $\sup_{|t-a|<\rho}|f(t)|=K<\infty$, в силу чего

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\le\frac{\rho K}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+1}},\quad |z-a|\le\frac{\rho}{2}.$$

Но тогда, учитывая (1.2), для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$|c_nf^{(n)}(z)|\le A(\varepsilon)K\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\right)^n,\quad |z-a|\le\frac{\rho}{2},\quad n\ge 0,$$

и потому

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_nf^{(n)}(z)|\le A(\varepsilon)K\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\right)^n=\frac{A(\varepsilon)K}{1-q},$$

если $q=\frac{2\varepsilon}{\rho}<1$. Значит, данный ряд равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки $a\in\Pi_0^-$. Кроме того,

$$|M(D)f(z)|\le B\max_{|t-a|\le\rho}|f(t)|,\quad |z-a|\le\frac{\rho}{2}.$$

В статье обсуждается следующая задача.

Пусть рост функции F, $F\in A(\Pi_0^-)$, вблизи мнимой оси контролируется в определенном смысле некоторой мажорантой $H\colon\ [-1,0)\to(0,+\infty)$, $H(x)\uparrow 0$ при $x\to 0-$. Требуется получить разложение вида (1.1), чтобы рост ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|B_ne^{\mu_nz}|$ также был подчинен мажоранте H.

Отметим, что в терминах порядка роста данная задача впервые была исследована А.Ф. Леонтьевым в [7] для выпуклых многоугольников, а позже – А.М. Гайсиным в [8] для полуплоскости.

2. Необходимые сведения

Вкратце остановимся на некоторых свойствах преобразования Лежандра.

Пусть $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $H\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ – убывающая функция, $H(y)\downarrow 0$ при $y\to\infty$, $H(y)\uparrow\infty$ при $y\to 0+$. Выберем точку $d>0$ из условия $m(d)=1$, где $m(y)=\ln H(y)$.

Рассмотрим нижнее преобразование Лежандра функции $m(y)$:

$$\varphi(x)=(Lm)(x)=\inf_{0<y\le d}[m(y)+yx],\quad x>0. \tag{2.1}$$

Как нижняя огибающая возрастающих линейных функций, $\varphi(x)=(Lm)(x)$ – вогнутая и возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, $\varphi(x)\ge 0$. Ясно, что $\varphi(x)\uparrow\infty$ при $x\to+\infty$.

Наибольшая выпуклая миноранта $h(y)$ функции $m(y)$ называется верхним преобразованием Лежандра функции $\varphi(x)$:

$$h(y)=(U\varphi)(y)=\sup_{x>0}[\varphi(x)-xy],\quad y>0.$$

Лемма 2.1 (см. [9], [10]). *Интегралы*

$$\int_0^{d_0}\ln h(y)dy,\quad \int_0^{d}\ln m(y)dy,\quad \int_1^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

сходятся и расходятся одновременно (точка d_0 выбрана из условия $h(d_0) = 1$).

В силу этой леммы и для упрощения дальнейших рассуждений, можем считать, что функция $m(y)$ сама выпукла. Так что в этом случае $h(y) \equiv m(y)$.

Пусть функция H (она введена выше) удовлетворяет условию Левинсона

$$\int_0^d \ln\ln H(y)dy < \infty. \tag{2.2}$$

Тогда функция φ обладает свойствами: $0 \le \varphi(x) \uparrow \infty$, $\varphi(x) = \mathrm{o}(x)$ при $x \to \infty$, более того,

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx < \infty. \tag{2.3}$$

Обычно предполагается, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} y^k H(y) = \infty.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = \infty. \tag{2.4}$$

Верна (см. [11])

Лемма 2.2. *Если функции $m(y) = \ln H(y)$ $(y > 0)$ и $m(e^{-s})$ $(s \in \mathbb{R})$ выпуклы, то функция φ логарифмически выпукла (т.е. $\varphi(e^t)$ выпукла по $t > 0$).*

Лемма легко проверяется в случае, когда $m(y)$ – функция класса $C^2(\mathbb{R}_+)$. Действительно, пусть

$$\varphi(x) = \inf_{y>0}[m(y) + yx] = m(y(x)) + y(x)x,$$

где функция $y = \varphi(x)$ единственным образом определяется из уравнения $m'(y) = -x$ (так как $m(y)$ – убывающая выпуклая функция, то $y(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$). Далее, $[\varphi(e^t)]' = x\varphi'(x)$, $[\varphi(e^t)]'' = x[\varphi'(x) + x\varphi''(x)]$, $x = e^t$. Нас интересует знак выражения $\xi(x) = \varphi'(x) + x\varphi''(x)$. Но $\varphi'(x) = y$, $\varphi''(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{-m''(y)}$, ибо $m'(y) = -x$, $y = y(x)$. Значит,

$$\varphi'(x) + x\varphi''(x) = y + \frac{x}{-m'(y)} = \frac{ym''(y) + m'(y)}{m''(y)}.$$

Но $m''(x) \ge 0$ (m — выпукла). Поскольку $m(e^{-t})$ выпукла, то

$$0 \le [m(e^{-t})]'' = y[m''(y)y + m'(y)], \quad y > 0.$$

Отсюда $m''(y)y + m'(y) \ge 0$. Значит, $\varphi'(x) + x\varphi''(x) \ge 0$, т.е. $\varphi(e^t)$ выпукла.

Нам понадобится и следующая (см. [12])

Лемма 2.3 (Y. Domar)**.** *Если функция φ, $0 \le \varphi(x) \uparrow \infty$, удовлетворяет условиям (2.3), (2.4), причем φ логарифмически выпукла, то существует четная целая функция экспоненциального типа*

$$G(z) = \sum_{n=0}^\infty a_{2n}z^{2n}, \quad a_{2n} \ge 0 \quad (z = x + iy),$$

принадлежащая классу сходимости, т.е. такая, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln G(x)}{x^2}dx < \infty,$$

причем

$$0 < c_1 \le G(x)e^{-2\varphi(x)} \le c_2|x|^{2k}, \quad |x| \ge 1, \tag{2.5}$$

где $k \in \mathbb{N}$, c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от x[1].

3. Разложение аналитических в полуплоскости функций заданного роста в ряды экспонент

Пусть $\Pi_0^- = \{z = x + iy\colon\ x < 0\}$, $\Pi_0^+ = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$. Через K_0 обозначим класс функций F, обладающих свойствами:

1) F регулярна в Π_0^+;

2) $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в любой полуплоскости $\Pi_s^+ = \{z = x + iy\colon\ x \ge s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$;

3) для любого $s > 0$

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} |F(z)||dz| < \infty.$$

Положим для $F \in K_0$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} F(z)e^{zt}dz. \tag{3.1}$$

Тогда верна формула обращения (см. [13, гл. VI, §1, п. 79])

$$F(z) = \int\limits_0^{+\infty} A(t)e^{-zt}dt, \quad z \in \Pi_0^+.$$

Введем еще один класс функций. Будем говорить, что $F \in K_1$ тогда и только тогда, когда F регулярна в Π_0^+, непрерывна в $\overline{\Pi}_0^+ = \{x = x + iy\colon\ x \ge 0\}$ и удовлетворяет в $\overline{\Pi}_0^+$ условию: при $|z| \to \infty$

$$|F(z)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат М.В. Келдыша об аппроксимации голоморфных функций целыми функциями (см. [14]).

Пусть Γ – кривая Жордана, начинающаяся и оканчивающаяся в бесконечности, E – область, ограниченная линией Γ, f – голоморфная в E функция, непрерывная на $E \cup \Gamma$ (исключая бесконечно удаленную точку).

Каковы бы ни были положительные ε и η, существует целая функция g, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \exp\left[-|z|^{\frac{1}{2} - \eta}\right]$$

в $\overline{E}$ ($\overline{E}$ – замыкание E).

Верна

Теорема 3.1. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \le A_F H(s), \quad s > 0,$$

где $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, H – убывающая функция, $H(s) \downarrow 0$ при $s \to +\infty$, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0+$, $H(d) = e$. Предположим также, что

$$\lim_{s \to 0} s^k H(s) = \infty \quad (k \text{ — любое}, \quad k \in \mathbb{N}),$$

---

[1] Если функция φ не удовлетворяет условию (2.3), то G удовлетворяет лишь оценкам (2.5).

а функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ и $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ выпуклы. Тогда существует целая функция

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \quad \ln|M(\lambda)| \leq C_M \varphi(|\lambda|),$$

функция $f \in K_1$, такие, что

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^+,$$

где Φ – некоторая целая функция, $\varphi(r)$ $(r = |\lambda|)$ – нижнее преобразование Лежандра функции $m(s)$, $\varphi(r) = o(r)$ при $r \to \infty$, причем φ логарифмически выпукла.

Доказательство. Функция F принадлежит классу K_0. Поэтому функция $A(t)$, определенная формулой (3.1), непрерывна на $\mathbb{R}$, $A(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$. Она не зависит от $s > 0$. Оценим ее сверху.

Имеем: для $t > 0$ и любого $s > 0$

$$|A(t)| \leq T_F(s) e^{st} \leq A_F \exp[m(s) + st], \quad m(s) = \ln H(s).$$

Отсюда

$$|A(t)| \leq A_F e^{\varphi(t)}, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

где $\varphi(t) = (Lm)(t) = \inf_{0<s\leq d}[m(s) + st]$, φ – вогнутая возрастающая при $t > 0$ функция. По лемме 2.2, она не выпукла по переменной $\ln t$, т.е. логарифмически выпукла. Далее, для всех $t > 0$, $0 < s \leq d$, очевидно, $\varphi(t) - st \leq m(s)$. Отсюда

$$m^*(s) = \sup_{t>0}[\varphi(t) - ts] \leq m(s), \quad 0 < s \leq d.$$

Следовательно, $\varphi(t) = \mathrm{o}(t)$ при $t \to \infty$. Действительно, в противном случае существует $\varepsilon_0 > 0$, найдется последовательность t_n, $t_n \to \infty$, такие, что $\varphi(t_n) \geq \varepsilon_0 t_n$. Но тогда имели бы $m^*(s) \equiv \infty$ на $(0, \varepsilon_0)$, что невозможно.

Пусть G – четная целая функция из леммы 2.3. Она удовлетворяет оценкам (2.5). Поэтому с учетом (3.2)

$$\left|\frac{A(t)}{G(t)}\right| \leq A_F c_1^{-1} e^{-\varphi(t)}, \quad t > 0.$$

Если принять во внимание условие (2.4), то $\varphi(t) \geq N \ln t \geq \ln(1 + t^2)$, $N > 2$, $t \geq t_0$. Следовательно,

$$\left|\frac{A(t)}{G(t)}\right| \leq B_F \frac{1}{1 + t^2}, \quad t > 0. \tag{3.3}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} \frac{A(t)}{G(t)} e^{-zt} dt, \quad z \in \Pi_0^+.$$

Из (3.3) следует, что функция Ψ регулярна в Π_0^+ и непрерывна в $\overline{\Pi}_0^+$. В качестве искомой функции M возьмем G:

$$M(\lambda) = G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \lambda^{2n}, \quad a_{2n} \geq 0.$$

Тогда

$$M(D)e^{-zt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n}\right) e^{-zt} = G(t)e^{-zt}.$$

Поэтому

$$M(D)\Psi(z)=\int\limits_0^\infty A(t)e^{-zt}dt=F(z),\quad z\in\Pi_0^+.$$

Таким образом,

$$F(z)=M(D)\Psi(z),\quad z\in\Pi_0^+.$$

К функции Ψ применим теорему М.В. Келдыша, полагая в ней $E=\Pi_0^+$, $\Gamma=i\mathbb{R}$ (Ψ регулярна в Π_0^+, непрерывна в $\overline{\Pi}_0^+$). Тогда найдется целая функция g, такая, что

$$|\Psi(z)-g(z)|<\exp\left(-|z|^{\frac{1}{3}}\right),\quad z\in\overline{\Pi}_0^+.$$

Положим $f(z)=\Psi(z)-g(z)$. Тогда $f\in K_1$ и

$$F(z)=M(D)\Psi(z)=M(D)f(z)+M(D)g(z).$$

Функция $\Phi(z)=M(D)g(z)$ – целая. Следовательно, $F(z)=M(D)f(z)+\Phi(z)$, $z\in\Pi_0^+$.

Осталось оценить рост целой функции M. Имеем:

$$|M(\lambda)|\le\max_{|\mu|=r}|G(\mu)|=\sum_{n=0}^\infty a_{2n}r^{2n},\quad a_{2n}\ge 0.$$

Учитывая (2.5), отсюда будем иметь

$$|M(\lambda)|\le c_2r^{2k}e^{2\varphi(r)}\le c_3e^{3\varphi(r)},\quad r>0.$$

Таким образом,

$$\ln M(|\lambda|)\le C_M\varphi(|\lambda|).$$

Теорема доказана. □

В качестве следствия докажем теорему разложения в ряд экспонент.

Теорема 3.2. *Пусть $F\in K_0$, причем*

$$T_F(s)\le A_FH(s),\quad s>0,$$

где мажоранта H удовлетворяет условиям теоремы (3.1). Тогда имеется не зависящая от F последовательность показателей $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^\rho}=\tau$, $0<\tau<\infty$ ($\rho>1$ – любое), такая, что

$$F(z)=\sum_{n=1}^\infty B_ne^{-\lambda_nz}+\ \textit{целая функция},\quad z\in\Pi_0^+,$$

причем при некотором $k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^\infty|B_ne^{-\lambda_nz}|\le BH^k\left(\frac{x}{k}\right),\quad z=x+iy\in\Pi_0^+.$$

Доказательство. По теореме 3.1, имеем:

$$F(z)=M(D)f(z)+\Phi(z),\quad f\in K_1,\tag{3.4}$$

Φ – целая функция. Поскольку $f\in K_1$, то (см. [1, гл. VIII, §1, п. 2]) в полуплоскости Π_0^+

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty A_n^0e^{-\lambda_nz}+\ \text{целая функция},\tag{3.5}$$

где $\lambda_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, $\rho > 1$ – любое, $A_n^0 = \mathrm{O}(\lambda_n^2)$ при $n \to \infty$. Так что из (3.4), (3.5) получим представление

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \quad z \in \Pi_0^+. \tag{3.6}$$

Оценим ряд из модулей

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}|, \quad B_n = A_n^0 M(\lambda_n), \quad z \in \Pi_0^+.$$

Оценки для $M(\lambda_n)$ были получены в теореме 3.1. Учитывая их, имеем:

$$|B_n| \le \frac{1}{\lambda_n^\nu} \lambda_n^{2+\nu} e^{C_M \varphi(\lambda_n)} \le \frac{1}{\lambda_n^\nu} e^{L_M \varphi(\lambda_n)}, \quad n \ge 1, \quad \nu > 0,$$

L_M – постоянная, не зависящая от n. Но в (3.5) λ_n таковы, что $\lambda_n^\rho > \tau_0 n$ при некотором $\tau_0 > 0$, $n \ge 1$. Выберем ν таким, чтобы $\nu > 2\rho$. Тогда $\lambda_n^\nu > \tau_1 n^2$, $n \ge 1$, $0 < \tau_1 < \tau_0$. Следовательно, для $z \in \Pi_0^+$

$$B(z) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_1 n^2} \exp\left[L_M \varphi(\lambda_n) - \lambda_n x\right].$$

Отсюда при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$,

$$B(z) \le B \exp\left[k\varphi(\lambda_n) - \lambda_n x\right] \le B e^{km\left(\frac{x}{k}\right)},$$

где $m(x) = (U\varphi)(x)$ – верхнее преобразование Лежандра функции φ.

Таким образом, если $T_F(x) \le A_F H(x)$, то справедливо представление (3.6), причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z}\right| \le B H^k\left(\frac{x}{k}\right),$$

где B – положительная постоянная, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана. □

Отметим, что если мажоранта H для исходной функции F удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона

$$\int_0^d \ln\ln H(x)dx < \infty, \tag{3.7}$$

то и мажоранта $H_k(x) = BH^k\left(\frac{x}{k}\right)$ для ряда из модулей в (3.6) подчинена условию (3.7). Этот момент имеет существенное значение в вопросах, связанных с нормальностью семейства голоморфных функций, а именно в теоремах типа Левинсона – Щеберга – Вольфа (см., например, в [9], [10]). Оказывается, если выполняется условие (3.7), то в некоторых случаях можно получить ответ на следующий вопрос: при каких требованиях целая функция в разложении (1.1) будет ограничена в вертикальной полосе $\{z = x + iy\colon\ |x| < 1\}$? Этот результат будет опубликован в другой статье.

Замечание 3.1. *Пусть мажоранта H совпадает с функцией* $\exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^\mu\right]$, $\mu > 0$, *при* $0 < s \le 1$ *(в этом случае $d = 1$). Именно эта функция используется как функция сравнения при изучении класса аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций в терминах порядка ρ (см.* [8], [15]*). В рассматриваемой здесь ситуации*

$$\rho = \overline{\lim_{s\to 0+}} \frac{\ln\ln T_F(s)}{\ln\frac{1}{s}}$$

– порядок функции $T_F(s)$.

Для функции $m(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}$ имеем: $m''(s) = \mu(\mu+1)s^{-\mu-2} > 0$. Значит функция $m(s)$ выпукла. Функция $m(e^{-t})$ тоже выпукла, ибо $m(e^{-t}) = e^{t\mu}$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0+$, $H(s) \downarrow e$ при $s \to 1-$. Поэтому, согласно теореме 3.2, имеет место разложение (3.6), причем для некоторых $B > 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z} \right| \leq B H^k \left(\frac{x}{k}\right) = B e^{k\left(\frac{k}{s}\right)^{\mu}}.$$

Таким образом, если

$$T_F(s) \leq A_F \exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}\right],$$

то в (3.6)

$$B(z) \leq B e^{b\left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}}, \quad b = k^{1+\mu}.$$

Теорема 3.2, тем самым, обобщает соответствующий результат из [8] о разложении аналитических в Π_0^+ функций с учетом порядка роста в ряды экспонент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Лентьев. *Ряды экспонент.* Наука, Москва (1976).
2. В.С. Азарин. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Матем. сб. **79(121)**:4(8), 464–476 (1969).
3. Р.С. Юлмухаметов. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Math. **11**:3, 257–282 (1985).
4. К.П. Исаев, К.В. Трунов, Р.С. Юлмухаметов. *Представление рядами экспонент функций в локально-выпуклых пространствах* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 50–62 (2017).
5. А.Ф. Леонтьев. *Представление функций рядами экспонент.* Диалог, Уфа (2017).
6. Р.С. Юлмухаметов. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Докл. АН СССР. **264**:4, 839–841 (1982).
7. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **44**:6, 1308–1328 (1980).
8. А.М. Гайсин. *Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности.* Диссертация . . . к.ф.-м.н. Уфа: БГУ. 1982 г.
9. P. Koosis. *The logarithmic Integral. I.* vol. 12, Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press. 1988.
10. A. Beurling. *Analytic continuation across a linear boundary* // Acta Math. 153–182 (1972).
11. V. Matsaev, M. Sodin. *Asymptoties of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions* // Алгебра и анализ. **14**:4, 107–140 (2002).
12. Y. Domar. *Closed primary ideals in a class of Banach algebras* // Math. Scand. **7**:1, 109–125 (1959).
13. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного.* Наука, Москва (1987).
14. М.В. Келдыш. *О приближении голоморфных функций целыми функциями* // Докл. АН СССР. **47**:4, 243–245 (1945).
15. Г.А. Гайсина. *Порядок роста суммы ряда Дирихле: зависимость от коэффициентов и показателей* // Уфимск. матем. журн. **12**:4, 31–41 (2020).

Галия Ахтяровна Гайсина,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru