ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 94-114.

УДК 519.64.7

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ ГАЛЕРКИНА И КОЛЛОКАЦИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОТРЕЗКЕ

А.И. ФЕДОТОВ

Аннотация. Для одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, определенных в паре пространств Соболева с весами, обоснованы методы Галеркина и коллокаций. При этом точное решение исходного уравнения аппроксимируется линейными комбинациями полиномов Чебышева первого рода. По методу Галеркина приравниваются коэффициенты Фурье левой и правой частей уравнения по системе полиномов Чебышева второго рода, а по методу коллокаций приравниваются значения левой и правой частей уравнения в узлах являющихся корнями полиномов Чебышева второго рода.

Выбор полиномов Чебышева первого рода в качестве координатных функций для аппроксимации точного решения обусловлен возможностью вычислять в простом явном виде сингулярные интегралы с ядром Коши от произведений этих полиномов и соответствующих весовых функций. Это позволяет строить простые хорошо сходящиеся методы для широкого класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на интервале $(-1, 1)$.

Метод Галеркина обоснован с использованием методики Габдулхаева – Канторовича. Обоснование метода коллокаций получено как следствие сходимости метода Галеркина по методике Арнольда – Вендланда. Таким образом, доказана сходимость обоих методов, получены эффективные оценки погрешностей.

Ключевые слова: сингулярные интергро-дифференциальные уравнения, обоснование приближенных методов.

Mathematics Subject Classification: 65R20

1. Введение

Рассматривая современное состояние теории приближенных методов решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в периодическом и непериодическом случаях, можно констатировать, что если в периодическом случае построение этой теории практически закончено, то в непериодическом случае удалось пока получить лишь отдельные частные результаты [1]–[6] для уравнений первого порядка. Причина такой ситуации, в частности, в существенном отличии свойств сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши. И если в периодическом случае системы ортогональных тригонометрических полиномов позволяют создавать и обосновывать простые вычислительные схемы для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений любых, в том числе и дробных (см., напр., [7]), порядков, то в непериодическом случае все вычислительные схемы строятся на основе двух известных формул сингулярных интегралов от полиномов Чебышева

A.I. Fedotov, Justification of Galerkin and collocations methods for one class of singular integro-differential equations on interval.

© Федотов А.И. 2021.

Поступила 1 ноября 2020 г.

первого и второго рода [8], поэтому решаются задачи не выше первого порядка. Исключением здесь является, пожалуй, лишь работа автора [9][1]. Но и в этой работе недостаток разработанности теории приближенных методов для таких уравнений потребовал введения жестких искусственных ограничений на коэффициенты уравнения для обеспечения сходимости метода.

В данной работе, являющейся продолжением работы [6], обоснованы методы Галеркина и коллокаций для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений значительно более широкого класса, чем рассмотренный в [6]. Обоснование метода Галеркина проведено с использованием методики Габдулхаева – Канторовича (см., напр, [10]). Метод коллокаций обоснован как следствие сходимости метода Галеркина по методике Арнольда – Вендланда [11]. Доказана сходимость обоих методов, получены эффективные оценки погрешности.

2. Основные определения и обозначения

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел дополненных нулем, а $\mathbb{R}$ множество действительных чисел. Обозначим

$$p(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad q(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad t \in (-1,1),$$

весовые функции соответствующие полиномам Чебышева первого рода

$$T_l(t) = \cos(l \arccos t), \qquad l \in \mathbb{N}_0, \qquad t \in (-1,1),$$

и полиномам Чебышева второго рода

$$U_l(t) = \frac{\sin(l \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \qquad l \in \mathbb{N}, \qquad t \in (-1,1).$$

Обозначим H_p^{s+1} пространство Соболева порядка $s+1 \in \mathbb{R}$ с весом p, то есть замыкание множества полиномов $\{T_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ относительно нормы

$$\|x\|_{H_p^{s+1}} = \left\{ \sum_{l\in\mathbb{N}_0} \underline{l}^{2(s+1)} \widehat{x}^2 \left(l, -\frac{1}{2}\right) \right\}^{1/2}, \qquad \underline{l} = \begin{cases} l, & l \in \mathbb{N}, \\ 1, & l = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\widehat{x}(0,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau)x(\tau)d\tau, \qquad \widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau)x(\tau)T_l(\tau)d\tau, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

В пространстве H_p^{s+1} определим скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_{H_p^{s+1}} = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} \underline{l}^{2(s+1)} \widehat{f}\left(l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{g}\left(l,-\frac{1}{2}\right), \qquad f, g \in H_p^{s+1}.$$

С введенным скалярным произведением пространство H_p^{s+1} становится гильбертовым пространством, причем норма (2.1) выражается через скалярное произведение

$$\|x\|_{H_p^{s+1}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{H_p^{s+1}}}, \qquad x \in H_p^{s+1}.$$

Обозначим H_q^s пространство Соболева порядка $s \in \mathbb{R}$ с весом q, то есть замыкание множества полиномов $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ относительно нормы

$$\|y\|_{H_q^s} = \left\{ \sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2s} \widehat{y}^2 \left(l, \frac{1}{2}\right) \right\}^{1/2}, \tag{2.2}$$

[1]Эта статья была испорчена редакторами: из текста по непонятным причинам исключена основная теорема. Полную версию статьи можно найти на портале ResearchGate по адресу https://www.researchgate.net/publication/307652663.

$$\widehat{y}\left(l,\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)y(\tau)U_l(\tau)d\tau,\qquad l\in\mathbb{N}.$$

В пространстве H_q^s также определим скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_{H_q^s}=\sum_{l\in\mathbb{N}}l^{2s}\widehat{f}\left(l,\frac{1}{2}\right)\widehat{g}\left(l,\frac{1}{2}\right),\qquad f,g\in H_q^s.$$

С введенным скалярным произведением пространство H_q^s также становится гильбертовым пространством, а норма (2.2) выражается через это скалярное произведение

$$\|y\|_{H_q^s}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{H_q^s}},\qquad y\in H_q^s.$$

Всюду в дальнейшем будем полагать выполненным условие $s>1/2$, при котором (см., напр., [12]) пространство H_q^s вкладывается в пространство непрерывных функций, а пространство H_p^{s+1} вкладывается в пространство функций, первая производная которых непрерывна.

Обозначим $H_{p,p}^{s+1,s+1}$ пространство функций двух переменных, которые принадлежат пространству H_p^{s+1} по каждой переменной равномерно относительно второй переменной. Для функций $h\in H_{p,p}^{s+1,s+1}$ определим

$$\widehat{h}\left(m,\frac{1}{2},\tau\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}p(t)h(t,\tau)T_m(t)dt,\qquad m\in\mathbb{N}_0,\qquad t\in(-1,1),$$

m-ый коэффициент Фурье функции h по первой переменной,

$$\widehat{h}\left(t,l,-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}p(\tau)h(t,\tau)T_l(t)d\tau,\qquad l\in\mathbb{N}_0,\qquad \tau\in(-1,1),$$

l-ый коэффициент Фурье функции h по второй переменной и

$$\widehat{h}\left(m,\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}p(t)p(\tau)h(t,\tau)T_l(\tau)T_m(t)d\tau dt,$$
$$(m,l)\in\mathbb{N}_0^2,\qquad (t,\tau)\in(-1,1)^2,$$

(m,l)-ый коэффициент Фурье функции h по обеим переменным. Норму в пространстве $H_{p,p}^{s+1,s+1}$ определим равенством

$$\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}=\left\{\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\underline{m}^{2(s+1)}\underline{l}^{2(s+1)}\widehat{h}^2\left(m,\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{2.3}$$

а скалярное произведение – равенством

$$\langle f,g\rangle_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}=\left\{\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\underline{m}^{2(s+1)}\underline{l}^{2(s+1)}\widehat{f}\left(m,\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{g}\left(m,\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

С введенным скалярным произведением и пространство $H_{p,p}^{s+1,s+1}$ становится гильбертовым пространством, а норма (2.3) выражается через это скалярное произведение

$$\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}=\sqrt{\langle h,h\rangle_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}},\qquad h\in H_{p,p}^{s+1,s+1}.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$P_n y(t) = \sum_{k=1}^{n} y(t_k)\xi_k(t), \qquad t \in (-1,1),$$

интерполяционный полином Лагранжа функции $y \in H_q^s$ по узлам

$$t_k = \cos\frac{\pi k}{n+1}, \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\xi_k(t) = \frac{U_{n+1}(t)}{(t-t_k)U'_{n+1}(t_k)}, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \qquad t \in (-1,1),$$

– фундаментальные полиномы соответствующие узлам (2.4).

Обозначим

$$Q_n y(t) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{y}\left(l, \frac{1}{2}\right) U_l(t), \qquad t \in (-1,1),$$

отрезок ряда Фурье функции $y \in H_q^s$ по системе полиномов $\{U_l\}_{l\in N}$, а $E_n(y)_q^s$ наилучшее приближение этой функции полиномами порядка не выше $n-1$ по норме пространства H_q^s. Известно, что наилучшее приближение функции в гильбертовом пространстве доставляет отрезок ее ряда Фурье, поэтому

$$E_n(y)_q^s = \|y - Q_n y\|_{H_q^s}, \qquad y \in H_q^s.$$

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены две леммы, необходимые для дальнейшего изложения. Доказательство первой леммы имеется, например, в [13], второй – в [10].

Лемма 3.1. *Обозначим D и V — линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что оператор D обратим и выполнено условие $\|V\|_{X\to Y}\|D^{-1}\|_{Y\to X} < 1$. Тогда оператор $D+V : X \to Y$ также обратим, и справедлива оценка*

$$\|(D+V)^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant \frac{\|D^{-1}\|_{Y\to X}}{1 - \|V\|_{X\to Y}\|D^{-1}\|_{Y\to X}}.$$

Вновь обозначим X и Y — банаховы пространства и пусть $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$, $n = 1,2,\ldots$, их подпространства. Рассмотрим уравнения

$$Kx = y, \qquad K : X \to Y, \tag{3.1}$$

$$K_n x_n = y_n, \qquad K_n : X_n \to Y_n, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{3.2}$$

где K и K_n, $n = 1,2,\ldots,$ — линейные ограниченные операторы.

Лемма 3.2. *Предположим, что оператор $K : X \to Y$ обратим, и операторы K_n, $n = 1,2,\ldots,$ равномерно сходятся к нему*

$$\|K - K_n\|_{X_n\to Y} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если $\dim X_n = \dim Y_n$, $n = 1,2,\ldots,$ то для всех n, удовлетворяющих условию

$$u_n = \|K^{-1}\|_{Y\to X}\|K - K_n\|_{X_n\to Y} < 1,$$

приближенные уравнения (3.2) имеют единственные решения $x_n^* \in X_n$ для любых правых частей $y_n \in Y_n$, и верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(\|y - y_n\|_Y + u_n\|y\|_Y),$$

где $x^* = K^{-1}y$ – точное решение уравнения (3.1).

4. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$x'(t) + a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \qquad t \in (-1,1), \quad (4.1)$$

с условием

$$\int_{-1}^{1} p(\tau)x(\tau)d\tau = 0. \quad (4.2)$$

Здесь x – искомая, а a, b, h и y – известные функции. Будем предполагать, что функции a и b принадлежат пространству H_p^{s+1}, функция h принадлежит пространству $H_{p,p}^{s+1,s+1}$, а функция y принадлежит пространству H_q^s. Сингулярный интеграл будем понимать в смысле главного значения по Коши – Лебегу.

5. Анализ разрешимости

Задачу (4.1), (4.2) запишем в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv Dx + Vx = y, \qquad K : X \to Y, \quad (5.1)$$

$$X = \left\{ x \in H_p^{s+1} \mid \int_{-1}^{1} p(\tau)x(\tau)d\tau = 0 \right\}, \qquad Y = H_q^s,$$

$$Dx(t) = x'(t), \qquad Vx(t) = Ax(t) + Bx(t) + Ghx(t), \qquad t \in (-1,1),$$

$$Ax(t) = a(t)x(t), \qquad Bx(t) = \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

$$Ghx(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau, \qquad t \in (-1,1).$$

Теорема 5.1. *Для всех $a, b \in H_p^{s+1}$ и $h \in H_{p,p}^{s+1,s+1}$, удовлетворяющих условию*

$$u = C_a\|a\|_{H_p^{s+1}} + C_b\|b\|_{H_p^{s+1}} + C_h\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}} < 1,$$

$$C_a = \frac{1}{4}\left(\zeta(4s+4) + \frac{\pi^2}{6}(1 + 2^{2(s+1)}) + \frac{\pi^2}{3}2^{2s}\left(2^{2(s+1)}(1 + 3\zeta(2s+2)) + 7\zeta(2s+2) + 1\right)\right),$$

$$C_b = \frac{\pi^2}{12}(1 + 2^{2s+1})(1 + 3\zeta(2s+2)), \qquad C_h = \frac{\pi^2}{6}(1 + 2^{2s+1}), \qquad \zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t},$$

операторное уравнение (5.1), а, следовательно, и задача (4.1), (4.2), однозначно разрешимы при любой правой части $y \in Y$, и верна оценка

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant (1-u)^{-1}.$$

Доказательство. Покажем вначале, что оператор $D : X \to Y$ обратим, и выполняются равенства

$$\|D\|_{X\to Y} = \|D^{-1}\|_{Y\to X} = 1.$$

Действительно, возьмем произвольные $x \in X$ и $y \in Y$ и запишем их в виде рядов Фурье в соответствующих пространствах

$$x(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \qquad y(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}} y\left(l, \frac{1}{2}\right) U_l(t), \qquad t \in (-1, 1).$$

Уравнение

$$Dx = y, \qquad D : X \to Y,$$

в этом случае будет иметь вид бесконечной системы уравнений

$$l\widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) = \widehat{y}\left(l, \frac{1}{2}\right), \qquad l \in \mathbb{N},$$

а его решением будет функция

$$x(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{-1} \widehat{y}\left(l, \frac{1}{2}\right) T_l(t), \qquad t \in (-1, 1).$$

Из произвольности выбора элемента $y \in Y$ следует обратимость оператора $D : X \to Y$.

Вычислим теперь нормы операторов $D : X \to Y$ и $D^{-1}Y \to X$. Для произвольного элемента $x \in X$ имеем

$$\|Dx\|_Y^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2s} \left(l\widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2(s+1)} \widehat{x}^2 \left(l, -\frac{1}{2}\right) = \|x\|_X^2.$$

Для произвольного элемента $y \in Y$ найдем

$$\|D^{-1}y\|_X^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2(s+1)} \left(l^{-1}\widehat{y}\left(l, \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2s} \widehat{y}^2 \left(l, \frac{1}{2}\right) = \|y\|_Y^2.$$

Это и означает, что $\|D\|_{X \to Y} = \|D^{-1}\|_{Y \to X} = 1$.

Оценим теперь норму оператора $V : X \to Y$. Вновь возьмем произвольный элемент $x \in X$

$$x(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \qquad t \in (-1, 1),$$

применим к нему оператор V

$$Vx = Ax + Bx + Ghx \tag{5.2}$$

и оценим норму каждого слагаемого правой части равенства в пространстве Y.

Для первого слагаемого найдем

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y^2 =& \|ax\|_{H_q^s}^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{2s} \widehat{ax}^2 \left(m, \frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{4}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{2s} \left(\int_{-1}^{1} q(\tau) \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{l \in \mathbb{N}} \widehat{a}\left(k, -\frac{1}{2}\right) \widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_k(\tau) T_l(\tau) U_m(\tau) d\tau \right)^2 \\
=& \frac{4}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{2s} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{l \in \mathbb{N}} \widehat{a}\left(k, -\frac{1}{2}\right) \widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} q(\tau) T_k(\tau) T_l(\tau) U_m(\tau) d\tau \right)^2.
\end{aligned}$$

Дважды применяя к суммам неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\|Ax\|_Y^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{2(s+1)}\widehat{a}^2\left(k,-\frac{1}{2}\right)\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2(s+1)}\widehat{x}^2\left(l,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}$$

$$\cdot\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.$$

Интегралы

$$\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau, \qquad k\in\mathbb{N}_0, \qquad l,m\in\mathbb{N},$$

вычисляются явно. Действительно, делая замену переменных $\tau=\cos\varphi$, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau = \int\limits_0^\pi \cos k\varphi\cos l\varphi\sin m\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int\limits_0^\pi \cos(k+l+m-1)\varphi d\varphi+\int\limits_0^\pi\cos(k+l-m+1)\varphi d\varphi\right.$$

$$+\int\limits_0^\pi \cos(k-l+m-1)\varphi d\varphi+\int\limits_0^\pi\cos(k-l-m+1)\varphi d\varphi$$

$$-\int\limits_0^\pi \cos(k+l+m+1)\varphi d\varphi-\int\limits_0^\pi\cos(k+l-m-1)\varphi d\varphi$$

$$\left.-\int\limits_0^\pi \cos(k-l+m+1)\varphi d\varphi-\int\limits_0^\pi\cos(k-l-m-1)\varphi d\varphi\right),$$

поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau=\frac{\pi}{8}$$

при

$$m=2,3,\dots,\quad l=1,2,\dots,m-1,\quad k=m-l-1;\qquad m=1,\quad l\in\mathbb{N},\quad k=l;$$
$$m=2,3,\dots,\quad l=m-1,m,\dots,\quad k=l+1-m;$$

и

$$m\in\mathbb{N},\quad l\in\mathbb{N},\quad k=m+l-1;\quad \int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau=-\frac{\pi}{8}$$

при

$$m\in\mathbb{N},\quad l=1,2,\dots,m+1,\quad k=m+1-l;$$

$$m \in \mathbb{N}, \quad l = m+1, m+2, \ldots, \quad k = l-m-1; \qquad m, l \in \mathbb{N}, \quad k = m+l+1.$$

Для остальных значений индексов k, l и m эти интегралы равны нулю. Таким образом, оценка (5.3) примет вид

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y^2 \leqslant & \frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}} \left(\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{m-1} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{-2(s+1)} + \sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-4(s+1)}\right.\\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{l=m-1}^{\infty} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{l-m+1})^{-2(s+1)} + \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l-1)^{-2(s+1)}\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l=1}^{m+1} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m+1-l})^{-2(s+1)} + \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l=m+1}^{\infty} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{l-m-1})^{-2(s+1)}\\
&\left.+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l+1)^{-2(s+1)}\right)^2\\
\leqslant & \frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}(\zeta(4s+4)\\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{m^{2s}}{(m-1)^{2(s+1)}} + \sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{-2(s+1)}\right)\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l-1)^{-2(s+1)}\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{m^{2s}}{(m+1)^{2(s+1)}} + \sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l+1})^{-2(s+1)}\right)\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l+1)^{-2(s+1)})^2\\
\leqslant & \frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\zeta(4s+4) + 2^{2(s+1)}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{-2(s+1)}\right.\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l-1)^{-2(s+1)} + \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l+1})^{-2(s+1)}\\
&\left.+ \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l+1)^{-2(s+1)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Используя неравенства Гельдера и треугольника, оценим выражения под знаками сумм. Первая оценка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y^2 \leqslant & \frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\zeta(4s+4) + (1+2^{2(s+1)})\frac{\pi^2}{6}\right.\\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m-1-l+l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{2(s+1)}}\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m-1+l-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l-1)^{2(s+1)}}\\
&+ \sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m+1-l+l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(\underline{m+1-l})^{2(s+1)}}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m+l+1-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l+1)^{2(s+1)}}\right)^2.$$

Вторая оценка имеет вид:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m-1-l+l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{2(s+1)}}$$
$$\leqslant 2^{2(s+1)}\sum_{m=2}^{\infty} m^{-2}2^{2s+1}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-2(s+1)}+1+\sum_{m-1\neq l\in\mathbb{N}}(m-l-1)^{-2(s+1)}\right)$$
$$\leqslant 2^{4s+3}\sum_{m=2}^{\infty} m^{-2}(1+3\zeta(2s+2))\leqslant 2^{4s+3}\frac{\pi^2}{6}(1+3\zeta(2s+2)),$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m-1+l-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l-1)^{2(s+1)}}$$
$$\leqslant 2^{2(s+1)}\frac{\pi^2}{6}\zeta(2s+2).$$

Следующие оценки таковы:

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m+1-l+l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(\underline{m+1-l})^{2(s+1)}}$$
$$\leqslant 2^{2s+1}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-2(s+1)}+1+\sum_{m+1\neq l\in\mathbb{N}}(m-l+1)^{-2(s+1)}\right)$$
$$\leqslant 2^{2s+1}\frac{\pi^2}{6}(1+3\zeta(2s+2)),$$

и

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m+l+1-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l+1)^{2(s+1)}}$$
$$\leqslant 2^{2(s+1)}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-2(s+1)}-\sum_{l\in\mathbb{N}}(m+l+1)^{-2(s+1)}\right)$$
$$\leqslant 2^{2(s+1)}\frac{\pi^2}{6}\zeta(2s+2).$$

Окончательно имеем:

$$\|Ax\|_Y\leqslant C_a\|a\|_{H_p^{s+1}}\|x\|_{H_p^{s+1}},\tag{5.3}$$
$$C_a=\frac{1}{4}\left(\zeta(4s+4)+\frac{\pi^2}{6}(1+2^{2(s+1)})+\frac{\pi^2}{3}2^{2s}\left(2^{2(s+1)}(1+3\zeta(2s+2))+7\zeta(2s+2)+1\right)\right).$$

Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\tau)x(\tau)d\tau}{\tau-t}=\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right)U_l(t),\qquad t\in(-1,1),$$

то квадрат нормы второго слагаемого правой части равенства (5.2) представляется следующим образом

$$\begin{aligned}\|Bx\|_Y^2 =&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{b}\left(k,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2\\ =&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{b}\left(k,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.\end{aligned}$$

Вновь, дважды применяя к суммам неравенство Коши – Буняковского, найдем

$$\begin{aligned}\|Bx\|_Y^2 \leqslant&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{2(s+1)}\widehat{b}^2\left(k,-\frac{1}{2}\right)\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-2(s+1)}\widehat{x}^2\left(l,-\frac{1}{2}\right)\\ &\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2\\ =&\frac{4}{\pi^2}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\\ &\cdot\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.\end{aligned}$$

Интегралы

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau =&\int\limits_0^{\pi}\cos k\varphi\sin l\varphi\sin m\varphi d\varphi\\ =&\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi}\cos(l-m+k)\varphi d\varphi+\int\limits_0^{\pi}\cos(l-m-k)\varphi d\varphi\right.\\ &\left.-\int\limits_0^{\varphi}\cos(l+m+k)\varphi d\varphi-\int\limits_0^{\pi}\cos(l+m-k)\varphi d\varphi\right),\\ &k\in\mathbb{N}_0,\ l,m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

вычисляются явно

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(k-m+l)\varphi d\varphi=\pi,\qquad m\in\mathbb{N},\quad l=1,2,..,m,\quad k=m-l;$$

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(-k-m+l)\varphi d\varphi=\pi,\qquad m\in\mathbb{N},\quad l=m,m+1,\dots,\quad k=l-m;$$

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(-k+m+l)\varphi d\varphi=\pi\qquad m,l\in\mathbb{N},\quad k=m+l;$$

и равны нулю при остальных значениях индексов k, l и m, поэтому оценка (5.4) примет вид

$$\|Bx\|_Y^2 \leqslant \frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{l=1}^{m}(\underline{m-l})^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\right.$$

$$\left.+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{l=m}^{\infty}(\underline{m-l})^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{l\in\mathbb{N}}(m+l)^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{m^{2(s+1)}}{(\underline{m-l})^{2(s+1)}l^{2(s+1)}}\right.$$

$$\left.+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{m^{2(s+1)}}{(m+l)^{2(s+1)}l^{2(s+1)}}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\frac{\pi^2}{6}+2^{2s+1}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m-l)^{2(s+1)}+l^{2(s+1)}}{(\underline{m-l})^{2(s+1)}l^{2(s+1)}}\right.$$

$$\left.+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(m+l)^{2(s+1)}-l^{2(s+1)}}{(m+l)^{2(s+1)}l^{2(s+1)}}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\frac{\pi^2}{6}+2^{2s+1}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}l^{-2(s+1)}+\sum_{l\in\mathbb{N}}(\underline{m-l})^{-2(s+1)}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}l^{-2(s+1)}-\sum_{l\in\mathbb{N}}(m+l)^{-2(s+1)}\right)\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\frac{\pi^2}{6}+2^{2s+1}\frac{\pi^2}{6}(1+3\zeta(2s+2))+\frac{\pi^2}{6}\zeta(2s+2)\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\frac{\pi^2}{6}(1+2^{2s+1})(1+3\zeta(2s+2))\right)^2.$$

И, окончательно, оценка второго слагаемого правой части равенства (5.2) будет иметь вид

$$\|Bx\|_Y\leqslant C_b\|b\|_{H_p^{s+1}}\|x\|_{H_p^{s+1}},\qquad C_b=\frac{\pi^2}{12}(1+2^{2s+1})(1+3\zeta(2s+2)).$$

Для оценки нормы третьего слагаемого правой части равенства (5.2) заметим, что разложение

$$h(t,\tau)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\widehat{h}\left(t,k,-\frac{1}{2}\right)T_k(\tau),\qquad (t,\tau)\in(-1,1)^2,$$

позволяет представить Ghx в виде

$$Ghx(t)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{h}(t,l,-\frac{1}{2})\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right),\qquad t\in(-1,1).$$

Теперь квадрат нормы третьего слагаемого можно оценить

$$\|Ghx\|_Y^2=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\left(\int_{-1}^{1}q(\tau)\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{h}\left(\tau,l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{x}\left(l,-\frac{1}{2}\right)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\widehat{h}\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2(s+1)}\widehat{x}^2\left(l,-\frac{1}{2}\right)\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-2(s+1)}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{2(s+1)}\widehat{h}^2\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi^2}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}_0} m^{2s}\underline{k}^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.$$

Интегралы

$$\int\limits_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau, \qquad k\in\mathbb{N}_0, \qquad m\in\mathbb{N},$$

равны $\frac{\pi}{4}$ при $m=1$, $k=0$ и при $m\in\mathbb{N}$, $k=m-1$ и равны $-\frac{\pi}{4}$ при $m\in\mathbb{N}$, $k=m+1$. При остальных значениях индексов они равны нулю, поэтому

$$\|Ghx\|_Y^2 \leqslant \frac{1}{4}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(1+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}(\underline{m-1})^{-2(s+1)}+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{2s}(m+1)^{-2(s+1)}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(1+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{\underline{m-1}}\right)^{2(s+1)}+\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(1+\frac{\pi^2}{6}2^{2(s+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|x\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(\frac{\pi^2}{3}(1+2^{2s+1})\right)^2,$$

то есть

$$\|Ghx\|_Y \leqslant C_h\|x\|_{H_p^{s+1}}\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}, \qquad C_h=\frac{\pi^2}{6}(1+2^{2s+1}).$$

Собирая полученные оценки вместе, найдем, что

$$\|V\|_{X\to Y}\leqslant C_a\|a\|_{H_p^{s+1}}+C_b\|b\|_{H_p^{s+1}}+C_h\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}},$$

и по лемме 3.1 для всех a, b и h таких, что

$$u=C_a\|a\|_{H_p^{s+1}}+C_b\|b\|_{H_p^{s+1}}+C_h\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}<1,$$

оператор

$$K=D+V, \qquad K:X\to Y,$$

обратим и обратный оператор K^{-1} ограничен

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X}\leqslant(1-u)^{-1}.$$

Теорема 5.1 доказана. □

Условия обратимости оператора $K:X\to Y$, указанные в теореме 5.1, являются лишь достаточными. На самом деле, класс задач типа (4.1), (4.2) с обратимыми операторами значительно шире. Тем не менее теорема 5.1 необходима для того, чтобы предположение об обратимости операторов в теореме 6.1 следующего раздела было не пустым.

6. Метод Галеркина

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Приближенное решение задачи (4.1), (4.2) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \qquad t \in (-1,1),$$

неизвестные коэффициенты $\{\widehat{x}\left(l, -\frac{1}{2}\right)\}_{l=1}^{n}$ которого найдем из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина

$$\langle Kx_n, U_m\rangle_{H_q^s} = \langle y, U_m\rangle_{H_q^s}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Пусть оператор $K : X \to Y$ задачи (4.1), (4.2) обратим и обратный оператор K^{-1} ограничен. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что*

$$\begin{aligned} u_n = &\|K^{-1}\|_{Y\to X}\left(\frac{1}{4}\|a\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)} + (2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(2s+2))\right.\\ &\left. + \frac{1}{2}\|b\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)\zeta(2s+2) + \frac{1}{2}\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}2^{2(s+1)}\right) n^{-1} < 1 \end{aligned}$$

система уравнений (6.1) имеет единственное решение $\{\widehat{x}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right)\}_{l=1}^{n}$, и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{x}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \qquad t \in (-1,1),$$

сходятся к точному решению $x^* = K^{-1}y$ задачи (4.1), (4.2) по норме пространства X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y).$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, обозначим $X_n = \mathrm{span}\{T_l\}_{l=1}^{n}$ подпространство пространства X и $Y_n = \mathrm{span}\{U_l\}_{l=1}^{n}$ подпространство пространства Y размерности n. Теперь систему уравнений (6.1) можно записать в операторной форме в виде

$$K_n x_n = y_n, \qquad K_n : X_n \to Y_n, \qquad K_n = Q_n K, \qquad y_n = Q_n y.$$

Оценим близость операторов K и K_n на X_n. Для этого возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и оценим разность $Kx_n - K_n x_n$ по норме пространства Y

$$\begin{aligned} \|Kx_n - K_n x_n\|_Y = &\|Kx_n - Q_n K x_n\|_Y \\ \leqslant &\|Ax_n - Q_n A x_n\|_Y + \|Bx_n - Q_n B x_n\|_Y + \|Ghx_n - Q_n Ghx_n\|_Y. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для первого слагаемого правой части (6.2) найдем

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Q_n A x_n\|_Y^2 = &\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s} \widehat{ax_n}^2\left(m, \frac{1}{2}\right) \\ = &\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\left(\int_{-1}^{1} q(\tau)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{\infty}\widehat{a}\left(k,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}_n\left(l,-\frac{1}{2}\right)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2 \\ = &\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{a}\left(k,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}_n\left(l,-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2. \end{aligned}$$

Дважды применяя к суммам неравенство Коши – Буняковского, как и при доказательстве теоремы 5.1, получим

$$\|Ax_n - Q_nAx_n\|^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}} \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n} m^{2s}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\left(\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2. \tag{6.3}$$

Интегралы

$$\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)T_l(\tau)U_m(\tau)d\tau, \qquad k\in\mathbb{N}_0, \qquad l=1,2,\dots,n, \qquad m=n+1,n+2,\dots,$$

вычислены при доказательстве теоремы 5.1. Они равны $\frac{\pi}{8}$ при

$$\begin{aligned} &m=n+1,n+2,\dots, && l=1,2,\dots,n, && k=m-l-1;\\ &m=n+1, && l=n, && k=0;\\ &m=n+1,n+2,\dots, && l=1,2,\dots,n, && k=m+l-1; \end{aligned}$$

и равны $-\frac{\pi}{8}$ при

$$\begin{aligned} &m=n+1,n+2,\dots, && l=1,2,\dots,n, && k=m-l+1;\\ &m=n+1,n+2,\dots, && l=1,2,\dots,n, && k=m+l+1. \end{aligned}$$

Для остальных значений индексов k, l и m эти интегралы равны нулю. Таким образом, оценка (6.3) примет вид

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Q_nAx_n\|^2_Y \leqslant &\frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\\ &\cdot\Bigg(\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} m^{2s}l^{-2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{-2(s+1)} + (n+1)^{2s}n^{-2(s+1)}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l-1)^{-2(s+1)}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m-l+1)^{-2(s+1)}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} m^{2s}l^{-2(s+1)}(m+l+1)^{-2(s+1)}\Bigg)^2\\ \leqslant &\frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\big(2^{2(s+1)}(n+1)^{-2}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l=1}^{n}\frac{(m-1+l-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(\underline{m-l-1})^{2(s+1)}}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l=1}^{n}\frac{(m-1+l-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l-1)^{2(s+1)}}\\ &+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\sum_{l=1}^{n}\frac{(m+1-l+l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m-l+1)^{2(s+1)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)} \sum_{l=1}^{n} \frac{(m+1+l-l)^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l+1)^{2(s+1)}}\Biggr)^2 \\
\leqslant&\frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\bigl(2^{2(s+1)}(n+1)^{-2} \\
&+2^{4s+3}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}+\sum_{l=1}^{n}(\underline{m-l-1})^{-2(s+1)}\right) \\
&+2^{2(s+1)}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}-\sum_{l=1}^{n}(m+l-1)^{-2(s+1)}\right) \\
&+2^{2(s+1)}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}+\sum_{l=1}^{n}(m-l+1)^{-2(s+1)}\right) \\
&+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}-\sum_{l=1}^{n}(m+l+1)^{-2(s+1)}\right)\Biggr)^2 \\
\leqslant&\frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\Biggl(2^{2(s+1)}(n+1)^{-2}+2^{4(s+1)}\zeta(2s+2)\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2} \\
&+2^{2s+3}\zeta(2s+2)\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}+\zeta(2s+2)\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\Biggr)^2 \\
\leqslant&\frac{1}{16}\|a\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+(2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(2s+2))^2 n^{-2}.
\end{aligned}
$$

Окончательно имеем

$$
\|Ax_n-Q_nAx_n\|_Y\leqslant\frac{1}{4}\|a\|_{H_p^{s+1}}\|x\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+(2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(s2+2))n^{-1}.
$$

Квадрат нормы второго слагаемого правой части равенства (6.2) представим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\|Bx_n-Q_nBx_n\|^2_Y=&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\left(\int_{-1}^{1} q(\tau)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{b}\left(k,-\frac12\right)\widehat{x}_n\left(l,-\frac12\right)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2 \\
=&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{b}\left(k,-\frac12\right)\widehat{x}_n\left(l,-\frac12\right)\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.
\end{aligned}
$$

Дважды применяя к суммам неравенство Коши – Буняковского, найдем

$$
\begin{aligned}
\|Bx_n-Q_nBx_n\|^2_Y\leqslant&\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{2(s+1)}\widehat{b}^2\left(k,-\frac12\right) \\
&\cdot\sum_{l=1}^{n} l^{2(s+1)}\widehat{x}_n^2\left(l,-\frac12\right)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)} \\
&\cdot\left(\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2
\end{aligned}
\qquad (6.4)
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{4}{\pi^2}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\underline{k}^{-2(s+1)}l^{-2(s+1)}\\
&\cdot\left(\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.
\end{aligned}
$$

Интегралы

$$
\int_{-1}^{1} q(\tau)T_k(\tau)U_l(\tau)U_m(\tau)d\tau, \qquad k\in\mathbb{N}_0, \quad l=1,2,\dots,n, \quad m=n+1,n+2,\dots,
$$

также вычислены при доказательстве теоремы 5.1. Они равны $\frac{\pi}{4}$ при

$$
m=n+1,n+2,\dots, \qquad l=1,2,\dots,n, \qquad k=m-l;
$$

и равны $-\frac{\pi}{4}$ при

$$
m=n+1,n+2,\dots, \qquad l=1,2,\dots,n, \qquad k=m+l.
$$

При остальных значениях индексов k,l и m эти интегралы равны нулю. Таким образом, оценка (6.4) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
\|Bx_n-Q_nBx_n\|^2_Y \leqslant&\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{2s}\sum_{l=1}^{n} l^{2(s+1)}(m-l)^{-2(s+1)}\right.\\
&\left.+\sum_{m=n+1} m^{2s}\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}(m+l)^{-2(s+1)}\right)^2\\
\leqslant&\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\left(\sum_{m=n+1} m^{-2}\sum_{l=1}^{n}\frac{m^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m-l)^{2(s+1)}}\right.\\
&\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\sum_{l=1}^{n}\frac{m^{2(s+1)}}{l^{2(s+1)}(m+l)^{2(s+1)}}\right)^2\\
\leqslant&\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|_{H_p^{s+1}}\left(2^{2s+1}\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}+\sum_{l=1}^{n}(m-l)^{-2(s+1)}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^{-2(s+1)}-\sum_{l=1}^{n}(m+l)^{-2(s+1)}\right)\right)^2\\
\leqslant&\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)})n^{-1}\zeta(2s+2)+n^{-1}\zeta(2s+2))^2\\
=&\frac{1}{4}\|b\|^2_{H_p^{s+1}}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)^2n^{-2}\zeta^2(2s+2).
\end{aligned}
$$

Окончательно имеем

$$
\|Bx_n-Q_nBx_n\|_Y\leqslant\frac{1}{2}\|b\|_{H_p^{s+1}}\|x_n\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)\zeta(2s+2)n^{-1}.
$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (6.2) заметим, что разложение

$$
h(t,\tau)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\widehat{h}\left(t,k,-\frac{1}{2}\right)T_k(\tau), \qquad (t,\tau)\in(-1,1)^2,
$$

позволяет представить функцию Ghx_n в виде двойного ряда

$$Ghx_n(t)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{h}\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x}_n\left(l,-\frac{1}{2}\right)T_k(t),\qquad t\in(-1,1).$$

Теперь квадрат нормы третьего слагаемого правой части (6.2) можно оценить

$$\|Ghx_n-Q_nGhx_n\|_Y^2=\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}\widehat{Ghx_n}^2(m,\frac{1}{2})$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}\left(\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{h}\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x_n}\left(l,-\frac{1}{2}\right)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l=1}^{n}\widehat{h}\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)\widehat{x_n}\left(l,-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}\sum_{l=1}^{n}l^{2(s+1)}\widehat{x_n}^2\left(l,-\frac{1}{2}\right)\sum_{l=1}^{n}l^{-2(s+1)}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{2(s+1)}\widehat{h}^2\left(k,-\frac{1}{2},l,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\underline{k}^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi^2}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}m^{2s}\underline{k}^{-2(s+1)}\left(\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau\right)^2.$$

Интегралы

$$\int\limits_{-1}^{1}q(\tau)T_k(\tau)U_m(\tau)d\tau,\ k\in\mathbb{N}_0,\ m=n+1,n+2,\ldots,$$

вычислены при доказательстве теоремы 5.1. Они равны $\frac{\pi}{4}$ при $m=n+1,n+2,\ldots,k=m-1$, и равны $-\frac{\pi}{4}$ при $m=n+1,n+2,\ldots,\ k=m+1$. При остальных значениях индексов k и m они равны нулю, поэтому

$$\|Ghx_n-Q_nGhx_n\|_Y^2\leqslant\frac{1}{4}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}(m-1)^{-2(s+1)}\right.$$

$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{2s}(m+1)^{-2(s+1)}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{-2}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2(s+1)}\right.$$

$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{-2}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2(s+1)}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|x_n\|^2_{H_p^{s+1}}\|h\|^2_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}(2^{2(s+1)}+1)^2n^{-2}.$$

Окончательно имеем

$$\|Ghx_n-Q_nGhx_n\|_Y\leqslant\frac{1}{2}\|h\|^{s+1,s+1}_{H_{p,p}}\|x_n\|_{H_p^{s+1}}(s^{2(s+1)}+1)n^{-1}.$$

Собирая вместе полученные оценки, найдем

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_Y \leqslant \left(\frac{1}{4}\|a\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)} + (2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(2s+2)) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\|b\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)\zeta(2s+2) + \frac{1}{2}\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}(2^{2(s+1)})\right) n^{-1}\|x_n\|_X.$$

Это означает, что операторы K_n при $n \to \infty$ равномерно сходятся к оператору K с оценкой

$$\|K - K_n\|_{X_n\to Y} \leqslant \left(\frac{1}{4}\|a\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)} + (2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(2s+2)) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\|b\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)\zeta(2s+2) + \frac{1}{2}\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}(2^{2(s+1)})\right) n^{-1}.$$

По лемме 3.2 для всех n таких, что

$$u_n = \|K^{-1}\|_{Y\to X}\left(\frac{1}{4}\|a\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)} + (2^{2(s+1)}+1)^2\zeta(2s+2)) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\|b\|_{H_p^{s+1}}(2^{2(s+1)}+1)\zeta(2s+2) + \frac{1}{2}\|h\|_{H_{p,p}^{s+1,s+1}}(2^{2(s+1)})\right) n^{-1} < 1$$

система уравнений (6.1) имеет единственное решение $\{\widehat{x_n}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right)\}_{l=1}^n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{l=1}^n \widehat{x_n}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), t \in (-1,1),$$

сходятся к точному решению X^* задачи (4.1), (4.2) с оценкой

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y).$$

Теорема 6.1 доказана. □

7. Метод коллокаций

Вновь зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Приближенное решение задачи (4.1), (4.2), как и по методу Галеркина, будем искать в виде отрезка ряда Фурье

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^n \widehat{x_n}\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \quad t \in (-1,1),$$

но его неизвестные коэффициенты $\{\widehat{x_n}\left(l, -\frac{1}{2}\right)\}_{l=1}^n$ найдем теперь по методу коллокаций из системы уравнений

$$Kx_n(t_k) = y(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

по узлам (2.4).

Обозначая $w = Kx_n - y$, можно метод Галеркина записать в виде системы уравнений

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)w(\tau)U_l(\tau)d\tau = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.1}$$

а метод коллокаций в виде системы уравнений

$$w(t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Аппроксимируем интегралы (7.1) интерполяционными квадратурными суммами

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)P_n w(\tau)U_l(\tau)d\tau = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi k}{n+1}, \quad l=1,2,\ldots,n,$$

и обозначим

$$r_l = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)w(\tau)U_l(\tau)d\tau - \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi k}{n+1}, \quad l=1,2,\ldots,n,$$

остаточные члены этих квадратурных сумм. Из чисел $\{r_l\}_{l=1}^{n}$ образуем полином

$$R_n w(t) = \sum_{l=1}^{n} r_l U_l(t), \quad t \in (-1,1).$$

Теперь запишем систему уравнений метода Галеркина для функции $w - R_n w$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)(w - R_n w)(\tau)U_l(\tau)d\tau = 0, \quad l=1,2,\ldots,n. \tag{7.3}$$

Систему уравнений (7.3) назовем модифицированным методом Галеркина для задачи (4.1), (4.2).

Лемма 7.1. *Метод коллокаций (7.2) и модифицированный метод Галеркина (7.3) эквивалентны в том смысле, что равенства (7.2) выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства (7.3).*

Доказательство. Равенства (7.3) представим в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)(w - R_n w)(\tau)U_l(\tau)d\tau = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi k}{n+1}, \quad l=1,2,\ldots,n.$$

Теперь равенства (7.3) следуют из равенств (7.2) тривиально.

Пусть выполнены равенства (7.3). Полиномы U_l, $l=0,1,\ldots,n$, линейно независимы. Каждый из них однозначно определяется своими значениями в точках t_k, $k=0,1,\ldots,n$, поэтому векторы $U_l(t_k)$, $k=0,1,\ldots,n$, $l=0,1,\ldots,n$, образуют линейно независимую систему векторов, что означает невырожденность матрицы $(U_l(t_k))_{l,k=1}^{n}$, поэтому однородная система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi k}{n+1} = 0, \quad l=1,2,\ldots,n,$$

имеет только нулевое решение

$$w(t_k)\sin^2\frac{\pi k}{n+1} = 0, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Так как

$$\sin^2\frac{\pi k}{n+1} \neq 0, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

то

$$w(t_k) = 0, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Лемма 7.1 доказана. $\square$

Теорема 7.1. *Пусть оператор $K : X \to Y$ задачи (4.1), (4.2) обратим и обратный оператор ограничен. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что*

$$u_n = \frac{\|K\|_{X\to Y}\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n} < \frac{1}{2}$$

система уравнений метода коллокаций (7.2) имеет единственное решение $\{\widehat{x_n}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right)\}_{l=1}^n$, и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{l=1}^n \widehat{x_n}^*\left(l, -\frac{1}{2}\right) T_l(t), \quad t \in (-1,1),$$

сходятся к точному решению x^* задачи (4.1), (4.2) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{2\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y).$$

Доказательство. Систему уравнений метода коллокаций (7.2) запишем, следуя лемме 7.1, в виде системы уравнений (7.3) модифицированного метода Галеркина. В операторной форме система уравнений (7.3) будет иметь вид $Q_n w = Q_n R_n w$. Делая обратную замену $w = Kx_n - y$, получим уравнение

$$Q_n K x_n = Q_n(y + R_n w)$$

метода Галеркина для уравнения

$$Kx = y + R_n w. \tag{7.4}$$

По теореме 6.1 оператор $K_n = Q_n K$ обратим в паре пространств (X_n, Y_n), и погрешность приближенного решения x_n^* уравнения (7.4) по методу Галеркина, а, следовательно, и задачи (4.1), (4.2) по методу коллокаций, оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y+R_n w)_q^s + u_n\|y + R_n w\|_Y), \quad w = Kx_n^* - y. \tag{7.5}$$

Так как $R_n w$ есть полином степени не выше $n-1$, то $E(y+R_n w)_q^s = E_n(y)_q^s$. Коэффициенты r_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ — это первые n коэффициентов Фурье функции $w - P_n w$, поэтому $R_n w = Q_n(w - P_n w)$. Но $P_n w = 0$, значит $R_n w = Q_n w$. Теперь оценку (7.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant & \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y) + \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n} u_n \|Q_n(Kx_n^* - y)\|_Y \\ \leqslant & \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y) + \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n} u_n \|K\|_{X\to Y}\|x_n^* - x^*\|_X.\end{aligned}$$

Для всех n таких, что

$$u_n = \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}\|K\|_{X\to X}}{1-u_n} < \frac{1}{2},$$

получим оценку

$$\frac{1}{2}\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y).$$

И окончательно найдем

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{2\|K^{-1}\|_{Y\to X}}{1-u_n}(E_n(y)_q^s + u_n\|y\|_Y).$$

Теорема 7.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Frankel. *A Galerkin solution to a regularized Cauchy singular integro-differential equation* // Quart. Appl. Math. **2**, 245–258 (1995).
2. A.A. Badr. *Intgro-differential equation with Cauchy kernel* // J. Comp. Appl. Math. **134**, 191–199 (2001).
3. M.R. Capobianco, G. Criscuolo, P. Junghanns. *A fast algorithm for Prandl's integro-differential equation* // J. Comp. Appl. Math. **77**, 103–128 (1997).
4. A.I. Fedotov. *Justification of a Galerkin method for regularized Cauchy singular integro-differential euations* // Quart. Appl. Math. **3**, 541–552 (2009).
5. A.I. Fedotov. *Justification of the Galerkin method for one class of singular integro-differential equations on the interval* // Lobachevskii J. Math. **29**:2, 73–81 (2008).
6. А.И. Федотов. *Об асимптотической сходимости полиномиального метода коллокаций для одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений* // Уфимск. матем. журн. **12**:1, 43–55 (2020).
7. A.I. Fedotov. *On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periaodic pseudodifferential equations* // Archivum mathematicum (Brno). **38**, 1–13 (2002).
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Мир, Москва (1985).
9. A.I. Fedotov. *Convergence of the quadrature-differences method for singular integro-differential equations on the interval* // Mathematics. **2**, 53–67 (2014).
10. Б.Г. Габдулхаев. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* Изд-во Казан. ун-та, Казань (1980).
11. D.N. Arnold, W.L. Wendland. *On the asymptotic convergence of collocation methods* // Math. of Comp. **41**:164, 349–381 (1983).
12. М.Тейлор. *Псевдодифференциальные операторы.* Мир, Москва (1984).
13. М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. *Приближенное решение операторных уравнений.* Наука, Москва (1969).

Александр Иванович Федотов,
Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. Карла Маркса, 15,
420111, г. Казань, Россия
E-mail: `fedotovkazan@mail.ru`