ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 3-7.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

ОБ УСЛОВИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА В ВИДЕ ПРЯМОЙ СУММЫ ЕГО РЕЗИДУАЛЬНОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе рассматривается пространство Шварца $\mathcal{E}$ бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой и его замкнутые подпространства, инвариантные относительно оператора дифференцирования. Известно, что каждое такое подпространство имеет, возможно тривиальные, экспоненциальную и резидуальную составляющие, которые определяются кратной последовательностью точек комплексной плоскости $(-\mathrm{i}\Lambda)$ (спектром W) и относительно замкнутым в $\mathbb{R}$ промежутком I_W (резидуальным интервалом подпространства W) соответственно. Из недавних исследований известно, что при определенных ограничениях на взаимное поведение Λ и I_W, соответствующее инвариантное подпространство W восстанавливается по этим характеристикам однозначно (допускает спектральный синтез в слабом смысле). В случае, когда спектр $(-\mathrm{i}\Lambda)$ — конечная последовательность, экспоненциальная составляющая подпространства W конечномерна, и само подпространство W есть алгебраическая сумма резидуального подпространства и конечномерной линейной оболочки множества экспоненциальных одночленов, содержащихся в W. В случае бесконечного дискретного спектра нами были получены условия, при которых алгебраическая сумма резидуального и экспоненциального подпространств в W является замкнутой, а значит и прямой топологической суммой, совпадающей с самим W. Эти условия общие, но не слишком удобные для непосредственной проверки. Здесь мы выводим из них наглядные, легко проверяемые условия на бесконечную последовательность Λ, при которых инвариантное подпространство W со спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом I_W является прямой алгебраической и топологической суммой своих экспоненциальной и резидуальной составляющих, то есть каждый элемент из W единственным образом представляется в виде суммы двух функций, одна из которых есть предел последовательности экспоненциальных одночленов в $\mathcal{E}$, а другая тождественно равна нулю на I_W.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, спектральный синтез, целая функция, пространство Шварца.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30E5, 42A38

1. Введение

Пусть $\mathcal{E} := C^\infty(\mathbb{R})$ — пространство Шварца, наделенное своей стандартной метризуемой топологией, W — его замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, короче, D-инвариантное подпространство.

N.F. Abuzyarova, On condition of representing a subspace in Schwartz space invariant with respect to differentiation as direct sum of its residual and exponential components.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Поступила 24 июля 2021 г.

Предположим, что спектр σ_W сужения оператора дифференцирования $D: W \to W$ дискретен и равен $(-\mathrm{i}\Lambda)$, где $\Lambda = \{(\lambda_j; m_j)\}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, m_j — кратность точки λ_j. Если $\Lambda \neq \emptyset$, то запас $E(W)$ экспоненциальных одночленов (корневых элементов оператора дифференцирования), содержащихся в W, совпадает с множеством

$$\{t^k e^{-\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots\}.$$

Отметим, что, вообще говоря, спектр σ_W, а значит, и множество $E(W)$, могут быть пустыми и при нетривиальном W (см. [1]). В любом случае, каждое D-инвариантное подпространство W содержит (возможно, тривиальное) *экспоненциальное* D-инвариантное подпространство $W_{exp} = \overline{\operatorname{span} E(W)}$.

В работе [1] было доказано, что каждое D-инвариантное подпространство W также содержит *резидуальное* D-инвариантное подпространство, а именно: существует *минимальный для* W относительно замкнутый в $\mathbb{R}$ промежуток I_W, такой, что $W_{I_W} \subset W$, где

$$W_{I_W} := \{f \in \mathcal{E}: \ f = 0 \quad \text{на} \quad I_W\}.$$

Промежуток I_W называют *резидуальным интервалом* подпространства W. Ясно, что резидуальная составляющая W_{I_W} подпространства W может быть и тривиальной, что соответствует случаю $I_W = \mathbb{R}$.

Авторами работы [1] была сформулирована задача: выяснить, при каких условиях заданное D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром однозначно определяется множеством $E(W)$ и подпространством W_{I_W} (или, что эквивалентно, последовательностью Λ и промежутком I_W), то есть имеет место равенство

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} E(W)}? \tag{1.1}$$

В этой же работе было установлено, что (1.1) имеет место, если множество $E(W)$ (а значит, и порождающая его последовательность Λ) конечно, в частности, пусто. В этом случае $W_{exp} = \operatorname{span} E(W)$

$$W = W_{I_W} + W_{exp}. \tag{1.2}$$

Затем, в работах [2]–[9] для пространства $\mathcal{E}$ были детально изучены задача спектрального синтеза (1.1) и другие близкие вопросы.

В том числе, в [9] мы изучали возможность усиления (1.1) до представления

$$W = W_{I_W} \oplus W_{exp}, \tag{1.3}$$

которое обобщает (1.2) на случай бесконечного множества $E(W)$. Полученные в [9] условия сформулированы в терминах существования *медленно убывающей* (или *обратимой в смысле Эренпрайса*) целой функции, обращающейся в нуль на последовательности Λ.

Напомним, что функция $\varphi \in \mathcal{P}$ называется *медленно убывающей*, если существует число $a > 0$ со свойством:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, x' \in \mathbb{R}: \ |x - x'| \le a \ln(2 + |x|) \quad \text{и} \quad |\varphi(x')| \ge (2 + |x|)^{-a}.$$

В настоящей заметке, в качестве применения результатов из [9], мы приводим условия на саму последовательность Λ, при которых синтезируемое D-инвариантное подпространство (1.1) представляется в виде прямой суммы своих резидуального и экспоненциального подпространств, то есть имеет вид (1.3).

2. Равенство D-инвариантного подпространства прямой сумме его резидуального и экспоненциального подпространств

Прежде чем формулировать и доказывать основной результат (теорема 2.1), введем необходимые обозначения и напомним некоторые факты, нужные для дальнейших рассуждений.

Упорядоченное по возрастанию объединение двух непересекающихся натуральных подпоследовательностей $\mathcal{N} = \{n_k\}$ и $\mathcal{M} = \{m_j\}$ будем обозначать $\{N_i\}$. Задание на множествах $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ вещественнозначных функций

$$\beta : \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad \gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{R},$$

естественным образом определяет функцию α на последовательности $\{N_i\}$ так, что ее сужение на множество $\mathcal{N}$ ($\mathcal{M}$) совпадает с β (соответственно, с γ). Далее, для вещественной последовательности Λ, $0 \notin \Lambda$, символами $\Lambda^+ = \{\lambda_k^+\}$ и $\Lambda^- = \{\lambda_j^-\}$ обозначаем подпоследовательности $\Lambda \bigcap (0; +\infty)$ и $\Lambda \bigcap (-\infty; 0)$. И наконец, символом $D_{BM}(\Lambda)$ — плотность Берлинга – Мальявена последовательности Λ (определение см., например, в [10]).

Напомним, что по хорошо известной теореме Берлинга – Мальявена (см., например, [10]), величина $\pi D_{BM}(\Lambda)$ совпадает с *радиусом полноты* ρ_Λ последовательности Λ. При этом последний определяется как инфимум множества всех положительных чисел r, для которых система экспоненциальных одночленов

$$\{t^k e^{-\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots\}$$

не полна в $L^2(-r; r)$ (а также, что эквивалентно, в $C^\infty(-r; r)$).

Важная роль величины ρ_Λ в решении задачи спектрального синтеза (1.1) заключается в справедливости следующего утверждения: если $\rho_\Lambda < d$, то D-инвариантное подпространство с дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом $[-d; d]$ единственно и, следовательно, имеет вид (1.1) (см. [2, следствие 2]), а также [3, Theorem 1.1]).

Преобразование Фурье – Лапласа $\mathcal{F}$ действует по формуле

$$\varphi(z) = \mathcal{F}(S) = S(e^{-\mathrm{i}tz}), \quad S \in \mathcal{E}',$$

и, согласно теореме Пэли – Винера – Шварца, взаимно однозначно отображает сильное сопряженное пространство $\mathcal{E}'$ на пространство $\mathcal{P}$ всех целых функций эксоненциального типа, имеющих рост не выше полиномального вдоль вещественной оси. С топологией, индуцированной из $\mathcal{E}'$, пространство $\mathcal{P}$ представляет собой топологическую алгебру относительно операции умножения функций, называемую *алгеброй Шварца*. Хорошо известно внутреннее описание топологии в $\mathcal{P}$ (см., например, [2]). Мы не будем приводить его здесь за ненадобностью. Отметим только, что следствием вышесказанного является такой факт: если для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ величина $D_{BM}(\Lambda)$ конечна, то она совпадает с инфимумом множества всех положительных чисел c, для каждого из которых существует фукнция $\varphi \in \mathcal{P}$ экспоненциального типа πc, обращающаяся в нуль на Λ.

В работе [9], при изучении представления (1.3), для комплексной последовательности Λ с $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$ мы вводим новую характеристику $D_{sd}(\Lambda)$. А именно, величина $D_{sd}(\Lambda)$ полагается равной $+\infty$, если Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции $\varphi \in \mathcal{P}$. В противном случае, $D_{sd}(\Lambda)$ определяется как инфимум множества всех положительных чисел c таких, что существует медленно убывающая функция $\varphi \in \mathcal{P}$ экспоненциального типа πc, равная нулю на Λ.

Известно, что наличие у φ свойства медленного убывания равносильно тому, что оператор свертки с функционалом $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ действует сюръективно из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ [11]. Л. Эренпрайс назвал такие функционалы из $\mathcal{E}'$ *обратимыми*. Это объясняет предложенный нами в [12] термин «функция, обратимая по Эренпрайсу», эквивалентный термину «медленно убывающая функция».

Перейдем к формулировке основного результата.

Теорема 2.1. *Пусть вещественная последовательность Λ такова, что для нее существуют $c_0 > 0$ и натуральные подпоследовательности $\mathcal{N} = \{n_k\}$ и $\mathcal{M} = \{m_j\}$, $\mathcal{N} \bigcap \mathcal{M} = \emptyset$, со свойством: определенные формулами*

$$\beta(n_k) = \lambda_k^+ - \frac{n_k}{c_0}, \quad \gamma(m_j) = \lambda_j^- + \frac{m_j}{c_0},$$

функции
$$\beta : \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad \gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{R},$$
неотрицательны, а функция $\alpha : \{N_i\} \to \mathbb{R}$, *определенная на их объединении* $\{N_i\}$ *указанным выше способом, удовлетворяет условию*
$$|\alpha_j - \alpha_i| \leq a_0(\ln^2 N_j - \ln^2 N_i), \quad j > i, \tag{2.1}$$
где a_0 *— положительная постоянная и обозначено* $\alpha_i = \alpha(N_i)$.

Тогда для любого $d_0 > c_0$ *существует единственное* D*-инвариантное подпространство* W *с дискретным спектром* $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ *и резидуальным интервалом* $I_W = [-\pi d_0; \pi d_0]$, *причем*
$$W = W_{I_W} \oplus W_{exp}.$$

Доказательство. Построим продолжение функции α на все $\mathbb{N}$ с сохранением свойства (2.1).

Изменив, если необходимо, конечное число членов последовательности Λ, можем считать, что $N_1 = 1$. Тогда из (2.1) следует, что
$$\alpha_i \leq a_0 \ln^2 N_i, \quad i = 2, 3, \dots$$
Обозначим $\nu_i = a_0 \ln^2 N_i - \alpha_i \geq 0$ и рассмотрим натуральные числа n, лежащие между соседними N_i и N_{i+1}.

А. Предположим сначала, что $\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq 0$. Тогда из (2.1) следует, что $\nu_i \leq \nu_{i+1}$. Если $\nu_i = \nu_{i+1}$, то положим
$$\alpha(n) = a_0 \ln^2 n - \nu_i, \quad n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1.$$

В противном случае, $\nu_{i+1} > 0$ и $\sigma := \frac{\alpha(N_{i+1})}{a_0 \ln^2 N_{i+1}} \in (0; 1)$. Пусть n_0 — наименьшее натуральное число в интервале $(N_i; N_{i+1})$ со свойством $a_0(1-\sigma)\ln^2 n_0 \geq \nu_i$. Определяем функцию α для натуральных $n \in (N_i; N_{i+1})$ следующим образом:
$$\alpha(n) = a_0 \ln^2 n - \nu_i, \quad n = N_i + 1, \dots, n_0 - 1,$$
$$\alpha(n) = \sigma a_0 \ln^2 n, \quad n = n_0, \dots, N_{i+1} - 1.$$
Нетрудно убедиться в том, что
$$|\alpha(j) - \alpha(i)| \leq a_0(\ln^2 j - \ln^2 i), \quad j \geq i, \quad i, j \in [N_i; N_{i+1}] \bigcap \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Б. Пусть теперь $\alpha_{i+1} - \alpha_i < 0$. Рассмотрим функцию
$$y(t) = \alpha_i - a_0(\ln^2 t - \ln^2 N_i).$$
Если $y(n) \geq \alpha_{i+1}$ для всех $n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1$, то полагаем
$$\alpha(n) = y(n), \quad n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1.$$
Иначе, обозначим n_0 наименьшее натуральное число в интервале $(N_i; N_{i+1})$ со свойством $y(n_0) < \alpha_{i+1}$ и определим
$$\alpha(n) = y(n), \quad n = N_i + 1, \dots, n_0 - 1,$$
$$\alpha(n) = \alpha_{i+1}, \quad n = n_0, \dots, N_{i+1} - 1.$$
Как и в случае А, легко видеть, что построенное продолжение функции α удовлетворяет условию (2.2).

Доопределяя α по линейности на каждом интервале $(n; n+1)$, $n = 1, 2, \dots$, получим функцию на луче $[1; \infty)$, удовлетворяющую оценке
$$|\alpha(t'') - \alpha(t')| \leq b_0(\ln^2 t'' - \ln^2 t'), \quad 1 \leq t' \leq t'' < \infty, \tag{2.3}$$
где b_0 — положительная постоянная, вообще говоря, отличная от a_0.

Рассмотрим вещественную последовательность $\mathcal{Z} = \{\zeta_n\}$, где

$$\zeta_n = \frac{n}{c_0} + \alpha(|n|), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ясно, что $\Lambda \subset \mathcal{Z}$. Из свойства (2.3) функции α и теоремы 1 работы [12] выводим, что формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\zeta_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right),$$

определяет целую функцию экспоненциального типа πc_0, которая является обратимым по Эренпрайсу элементом алгебры Шварца $\mathcal{P}$, обращающимся в нуль на Λ. В частности, отсюда следует, что радиус полноты $\rho_\Lambda \le \pi c_0$; и значит, согласно цитированным выше результатам работ [2] и [3], для любого $d_0 > c_0$ существует единственное, определяемое формулой (1.1), D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом $I_W = [-\pi d_0; \pi d_0]$.

Далее, так как функция φ обратима по Эренпрайсу («медленно убывающая»), то $D_{sd}(\Lambda) \le c_0$. Из этого факта, применяя утверждение а) теоремы 1 работы [9], заключаем, что подпространство W имеет вид (1.3).

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Aleman, B. Korenblum. *Derivation-Invariant Subspaces of C^∞* // Comp. Methods and Function Theory. **8**:2, 493–512 (2008).
2. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Докл. РАН. **457**:5, 510–513 (2014).
3. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov. *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation* // J. Funct. Anal. **268**, 2421–2439 (2015).
4. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца* // Матем. заметки. **102**:2, 163–177 (2017).
5. Н.Ф. Абузярова. *Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн. **8**:1, 3–14 (2016).
6. Н.Ф. Абузярова. *О 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн. **8**:3, 8–21 (2016).
7. N.F. Abuzyarova. *Principal submodules in the module of entire functions, which is dual to the Schwarz space, and weak spectral synthesis in the Schwartz space* // J. Math. Sci. **241**:6, 658–671 (2019).
8. A. Baranov, Yu. Belov. *Synthesizable differentiation-invariant subspaces* // Geom. Funct. Anal. **29**:1, 44–71 (2019).
9. Н.Ф. Абузярова. *Представление синтезируемых инвариантных относительно дифференцирования подпространств в пространстве Шварца* // Докл. РАН. **498**:3, 5–9 (2021).
10. P. Koosis. *The logarithmic integral. II.* Cambridge Univ. Press., Cambridge (1992).
11. L. Ehrenpreis. *Solution of Some Problems of Division, IV* // Amer. J. Math. **57**:1, 522–588 (1960).
12. N.F. Abuzyarova. *On Shifts of the Sequence of Integers Generating Functions that are Invertible in the Sense of Ehrenpreis* // J. Math. Sci. **251**:2, 161–175 (2020).

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `abnatf@gmail.com`