ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 37-44.

УДК 517.956.32+517.929

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ ОБЩЕГО ВИДА

Н.В. ЗАЙЦЕВА

Аннотация. Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения, рассматриваемого в полуплоскости, содержащего сумму дифференциального оператора и операторов сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси, (или дифференциально-разностного уравнения с нелокальными потенциалами) построено трехпараметрическое семейство гладких решений. Все сдвиги в потенциалах по пространственной переменной – произвольные вещественные величины, никакие условия соизмеримости на них не накладываются. Это является наиболее общим случаем.

В настоящее время достаточно полно исследованы эллиптические и параболические функционально-дифференциальные уравнения, и в частности, дифференциально-разностные уравнения. Цель настоящей работы – исследовать гиперболические дифференциально-разностные уравнения с операторами сдвига по пространственной переменной, которые, насколько нам известно, ранее не были изучены. Природа физических задач, приводящих к таким уравнениям, принципиально отличается от задач для классических уравнений математической физики. Для построения решений используется классическая операционная схема, согласно которой к уравнению формально применяются сначала прямое, а затем обратное преобразования Фурье. Однако, если в классическом случае применение преобразования Фурье приводит к исследованию полиномов относительно двойственной переменной, то в данном случае, с учетом того, что в образах Фурье оператор сдвига является мультипликатором, символ дифференциально-разностного оператора представляет собой уже не полином, а комбинацию степенной функции и тригонометрических функций с несоизмеримыми аргументами. Это привело к вычислительным трудностям и совершенно иным эффектам в решении. Вообще говоря, данная схема приводит к решениям в смысле обобщенных функций. Однако, в данном случае удается доказать, что полученные решения являются классическими.

Доказана теорема о том, что если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора по пространственной переменной, входящего в уравнение, положительна, то построенные решения являются классическими. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено. Получены соотношения, которым должны удовлетворять все коэффициенты и все сдвиги в уравнении, справедливость которых гарантирует требуемую положительность вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, несоизмеримые сдвиги, классическое решение.

Mathematics Subject Classification: 35R10, 35L10

N.V. Zaitseva, Hyperbolic differential-difference equations with nonlocal potentials.

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.
Поступила 26 февраля 2021 г.

1. Введение

Впервые дифференциально-разностное уравнение появляется в работе J. Bernoulli [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение далее встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., напр., [2] и имеющуюся там библиографию). В книге [3] приведен обширный материал по теории линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, часто встречающимися в теории автоматического регулирования. В книге [4] подробно излагается теория линейных дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, большое внимание уделено асимптотическому поведению решений и теории устойчивости.

Изучение задач механики сплошных сред привело в дальнейшем к рассмотрению дифференциально-разностных уравнений с частными производными. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для указанных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [5]–[10] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях подробно изучены задачи для параболических [11] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [12]–[16]. В частности, в работах [14], [15] рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по переменной времени [17]. В работах [18]–[20] рассмотрены гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной.

Пусть a, b_k, h_k $(k=\overline{1,n})$ – заданные вещественные числа. В настоящей работе рассмотрим в полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ гиперболическое уравнение, содержащее сумму дифференциального оператора и операторов сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = Lu \overset{\text{def}}{=} a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{n} b_k u(x-h_k,t), \tag{1.1}$$

которое, согласно терминологии [3], будем называть *дифференциально-разностным* уравнением. Все сдвиги h_k $(k=\overline{1,n})$ в уравнении – произвольные величины.

Хорошо известны задачи математической физики, приводящие к классическим уравнениям с частными производными, содержащими, помимо производных, искомую функцию или потенциал. Примером является уравнение малых колебаний тяжелой однородной нити с закрепленным верхним концом около своего вертикального положения равновесия. При изучении электрических колебаний в проводах уравнение для силы тока (или уравнение для напряжения) содержит неизвестную функцию, если не пренебрегать потерями (утечкой) через изоляцию проводов и величиной сопротивления. Распространение электрических колебаний описывается телеграфными уравнениями. Можно ввести акустические аналоги сопротивления и утечки – трение газа о стенки сосуда и пористость среды, соответственно, и получить гиперболические уравнения с классическим потенциалом.

Решения гиперболического уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + c\,u = 0,$$

в которых фазовая скорость гармонических волн зависит от частоты, то есть описывают дисперсию волн, получаются при коэффициенте $c\neq 0$ в уравнении.

Процесс диффузии неустойчивого газа (диффузия с распадом) приводит к уравнению

$$u_t = a^2\triangle u + \beta\,u,$$

где $\beta < 0$ – характеристика вещества. Большой интерес представляют процессы диффузии при наличии цепных реакций (например, процесс размножения нейтронов), исследование которых приводит к уравнению

$$u_t = a^2 \triangle u + \beta\, u,$$

где $\beta > 0$ (диффузия с размножением).

Изучение установившихся колебаний (механических, акустических, электромагнитных и т.д.) приводит к волновому уравнению

$$\triangle u + c\, u = 0,$$

где коэффициент $c > 0$. Кроме того, часто встречаются задачи об установившихся колебаниях в неоднородной среде – задачи теории дифракции.

В рассматриваемом уравнении (1.1) потенциалы являются нелокальными, так как все вещественные сдвиги h_k $(k = \overline{1,n})$ не являются бесконечно малыми величинами и могут принимать сколь угодно большие значения. Отметим, что оператор сдвига не является подчиненным по отношению к дифференциальному оператору. Уравнение (1.1) связывает значения искомой функции u в $(n+1)$-ой различной точке полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$, что принципиально отличает дифференциально-разностные уравнения от классических уравнений математической физики.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора L имеет вид

$$\operatorname{Re} L(\xi) = -a^2\xi^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k \xi).$$

Оператор $-L(\xi)$ называется *положительным*, если $-\mathrm{Re}L(\xi) > 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^1$, т.е. если выполняется неравенство

$$a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k \xi) > 0. \tag{1.2}$$

В дальнейших рассуждениях будем считать оператор $-L(\xi)$ положительным.

Определение 1.1. *Функция $u(x,t)$ называется классическим решением уравнения (1.1), если в каждой точке полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ существуют классические, т.е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей, производные u_{tt} и u_{xx}, и в каждой точке этой полуплоскости выполняется соотношение (1.1).*

2. Построение решений

Для нахождения решений уравнения (1.1) используем классическую операционную схему Гельфанда – Шилова [21, §10], согласно которой применим к равенству (1.1) преобразование Фурье F_x и получим для функции $\widehat{u}(\xi,t) = F_x[u](\xi,t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}(\xi,t)}{dt^2} = -\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{ih_k\xi}\right)\widehat{u}(\xi,t), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \tag{2.1}$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2} = \pm\, i\sqrt{a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{ih_k\xi}} = \pm\, i\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := \left(\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi) \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.2}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)}. \tag{2.3}$$

Отметим, что для любых вещественных значений параметров a, b_k, h_k $(k = \overline{1,n})$ и ξ функции $\rho(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ определены корректно. Таким образом, общее решение уравнения (2.1) определяется по формуле

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,t) =& C_1(\xi)e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} + C_2(\xi)e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}\\ =& C_1(\xi)e^{-t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi)-i\cos\varphi(\xi)]} + C_2(\xi)e^{t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi)-i\cos\varphi(\xi)]},\end{aligned}$$

где $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ – произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ. Положив значения констант $C_1(\xi) = 1$, $C_2(\xi) = 0$, из последнего равенства будем иметь

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-tG_1(\xi)}e^{itG_2(\xi)}, \tag{2.4}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi). \tag{2.5}$$

Применив к равенству (2.4) обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1}, получим выражение

$$\begin{aligned}u(x,t) =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}e^{itG_2(\xi)}e^{-ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-x\xi)}d\xi\\ =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi)d\xi + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Следует отметить, что, формально применив прямое F_x и обратное F_ξ^{-1} преобразования Фурье, мы, в соответствии со схемой [20, §10], в которой речь идет о решениях в смысле обобщенных функций, не заботимся об обосновании сходимости интегралов в (2.6). На основании (2.6), рассуждая так же, как и в [14], [15], докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *При выполнении условия (1.2) функции*

$$F(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi), \tag{2.7}$$

$$H(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi), \tag{2.8}$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (2.5), удовлетворяют уравнению (1.1) в классическом смысле.

Доказательство. Подставим сначала функцию (2.7) непосредственно в уравнение (1.1). Для этого найдем

$$\begin{aligned}&F_x(x,t;\xi) = \xi e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi),\\ &F_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi),\\ &F_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi) - G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{tt}(x,t;\xi) = &\left(G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) \\
&+ 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

С учетом (2.5) будем иметь

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi).$$

Так как аргумент $\varphi(\xi)$ определяется выражением (2.3), то имеет место неравенство $|2\varphi(\xi)| < \frac{\pi}{2}$, а, следовательно, $\cos 2\varphi(\xi) > 0$. Тогда выполняются равенства

$$\sqrt{\cos^2 2\varphi(\xi)} = |\cos 2\varphi(\xi)| = \cos 2\varphi(\xi)$$

и справедливо следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
\sin 2\varphi(\xi) = &\frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} \\
= &\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
= &\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)}\left(1 + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
= &\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)}\left(\frac{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

В силу условия (1.2) и формулы (2.2) из последнего равенства получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{1}{\rho^2(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi),$$

откуда следует, что

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi).$$

При установленном выполнении неравенства $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и условии (1.2) вычислим теперь

$$
\begin{aligned}
G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = &\rho^2(\xi)\left(\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)\right) \\
= &-\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} \\
= &-\rho^2(\xi)\left(\frac{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
= &-a^2\xi^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi).
\end{aligned}
$$

С учетом найденных выражений $G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ из равенства (2.9) получим

$$F_{tt}(x,t;\xi) = -\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)\right) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi) \cdot e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi).$$

Подставив найденные производные F_{tt} и F_{xx} в уравнение (1.1), будем иметь

$$\begin{aligned} F_{tt}(x,t;\xi)-&a^2F_{xx}(x,t;\xi) \\ &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\left(\cos(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi) - \sin(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\right) \\ &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\cos(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\cos(h_k\xi) - \sin(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sin(h_k\xi)\right) \\ &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(tG_2(\xi)-x\xi+h_k\xi) = -\sum_{k=1}^{n} b_kF(x-h_k,t;\xi), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций $F(x,t;\xi)$ при любом вещественном значении параметра ξ.

Аналогично проверим, что и функция (2.8) удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$. Вычислим

$$\begin{aligned} H_x(x,t;\xi) &= -\xi e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi), \\ H_{xx}(x,t;\xi) &= -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi), \\ H_t(x,t;\xi) &= -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi) + G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi), \\ H_{tt}(x,t;\xi) &= \left(G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi) \\ &\quad - 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi) \\ &= -\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-x\xi) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\cdot e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-x\xi). \end{aligned}$$

Подставив производные H_{tt} и H_{xx} в уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} H_{tt}(x,t;\xi)-a^2H_{xx}(x,t;\xi) &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\Bigg(\sin(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi) \\ &\qquad + \cos(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\Bigg) \\ &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k\Big(\sin(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\cos(h_k\xi) \\ &\qquad + \cos(tG_2(\xi)-x\xi)\cdot\sin(h_k\xi)\Big) \\ &= -\,e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(tG_2(\xi)-x\xi+h_k\xi) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} b_k H(x-h_k,t;\xi).$$

□

Следствие 2.1. *При выполнении условия (1.2) семейство функций*

$$G(x,t;\alpha,\beta,\xi) := \alpha\, e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) + \beta\, e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (2.5), удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле для любых вещественных значений параметров α, β и ξ.

3. Классы уравнений, удовлетворяющих условию теоремы

Выясним теперь, каким соотношениям должны удовлетворять коэффициенты уравнения a, b_k и сдвиги h_k ($k=\overline{1,n}$), чтобы выполнялось условие (1.2) для любого вещественного значения ξ. Положив в (1.2) значение $\xi=0$, очевидно, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} b_k > 0. \tag{3.1}$$

Рассмотрим функцию $a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos\left(h_k\xi\right)$ при $\xi\in(0,+\infty)$. Производная этой функции равна

$$2a^2\xi - \sum_{k=1}^{n} b_k h_k \sin\left(h_k\xi\right) = 2a^2\xi\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k h_k^2}{2a^2}\frac{\sin\left(h_k\xi\right)}{h_k\xi}\right).$$

Так как

$$\frac{\sin\left(h\xi\right)}{h\xi} < 1 \quad \text{при любом} \quad \xi\in(0,+\infty),$$

то справедливо неравенство

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k h_k^2}{2a^2}\frac{\sin\left(h_k\xi\right)}{h_k\xi} > 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k h_k^2}{2a^2},$$

откуда делаем вывод, что производная положительна на промежутке $\xi\in(0,+\infty)$ при выполнении условия

$$2a^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} b_k h_k^2. \tag{3.2}$$

Тогда функция $a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos\left(h_k\xi\right)$ при $\xi\in(0,+\infty)$ возрастает, а при $\xi\in[0,+\infty)$ принимает наименьшее значение, равное $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k > 0$. В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных $\xi\in(-\infty,+\infty)$. Тем самым мы показали, что условие (1.2), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения a, b_k и сдвиги h_k ($k=\overline{1,n}$) удовлетворяют соотношениям (3.1) и (3.2).

Благодарности

Автор выражает благодарность А.Б. Муравнику за постановку задачи и ценные советы, А.Л. Скубачевскому – за постоянное внимание к работе, участникам Второй Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2020» – за полезные обсуждения доклада.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Bernoulli. *Meditationes. Dechordis vibrantibis* // Commentaril Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. **3**, 13–28 (1728).
2. H. Burkhardt. *Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik* // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **10**, 1–1804 (1908).
3. E. Pinney. *Ordinary Difference-Differential Equations.* Berkeley and Los Angeles: University of California press. 1958.
4. Р. Беллман, К.Л. Кук. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир. 1967.
5. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications.* Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser. 1997.
6. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // Совр. математика. Фундам. направления. **26**, 3–132 (2007).
7. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. II* // Совр. математика. Фундам. направления. **33**, 3–179 (2009).
8. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Успехи матем. наук. **71**:5(431), 3–112 (2016).
9. Л.Е. Россовский. *Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции* // Совр. математика. Фундам. направления. **54**, 3–138 (2014).
10. Е.П. Иванова. *О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов* // Матем. заметки. **105**:1, 145–148 (2019).
11. А.Б. Муравник. *Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши* // Совр. математика. Фундам. направления. **52**, 3–143 (2014).
12. А.Б. Муравник. *Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений* // Математ. заметки. **100**:4, 566–576 (2016).
13. A.B. Muravnik. *On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms* // Math. Model. Nat. Phenom. **12**:6, 130–143 (2017).
14. А.Б. Муравник. *Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики* // Матем. заметки. **105**:5, 747–762 (2019).
15. A.B. Muravnik. *Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials* // Complex Variables and Elliptic Equations. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372 (2020).
16. А.Б. Муравник. *Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве* // Матем. заметки. **108**:5, 764–770 (2020).
17. В.В. Власов, Д.А. Медведев. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории* // Совр. математика. Фундам. направления. **30**, 3–173 (2008).
18. Н.В. Зайцева. *О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений* // Докл. РАН. **491**:2, 44–46 (2020).
19. Н.В. Зайцева. *Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений* // Дифференц. уравнения. **56**:6, 745–751 (2020).
20. N.V. Zaitseva. *Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms* // Lobachevskii J. of Math. **42**:1, 231–236 (2021).
21. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Успехи матем. наук. **8**:6, 3–54 (1953).

Наталья Владимировна Зайцева,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Ленинские горы 1, строение 52,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: `zaitseva@cs.msu.ru`