ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 116-128.

УДК 517.547.2

РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОЧЕК ВДОЛЬ ПРЯМОЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.Е. САЛИМОВА, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. По классической теореме Вейерштрасса – Адамара – Линделефа для любого распределения точек конечной верхней плотности на комплексной плоскости найдется ненулевая целая функция экспоненциального типа, обращающаяся в нуль на этом распределении точек с учетом кратности. В начале 1960-х гг. в совместной работе П. Мальявена и Л.А. Рубела была полностью решена следующая задача. Пусть заданы два распределения точек конечной верхней плотности на положительной полуоси. При каких соотношениях между этими распределениями точек для любой ненулевой целой функции экспоненциального типа, обращающейся в нуль на одном из распределений, найдется ненулевая целая функция экспоненциального типа, обращающаяся в нуль на другом распределении точек, и с модулем на мнимой оси не большим, чем модуль первой функции? Полное решение этой задачи, восходящей к работам Ф. Карлсона, Т. Карлемана, М. Картрайт, Л. Шварца, Ж.-П. Кахана и многих др., было дано ими в терминах так называемых логарифмических характеристик распределений точек, выражающихся через обратные величины к точкам-числам из этих распределений точек. В нашей статье мы переносим эти результаты на комплексные распределения точек, отделенные парой вертикальных углов сколь угодно малого раствора от мнимой оси, используя развитие логарифмических характеристик для комплексных распределений точек. При этом рассмотрены три типа возможных ограничений на рост вдоль мнимой оси: от очень жестких, как П. Мальявена и Л.А. Рубела, так и менее ограничительных, как в предшествующих работах второго соавтора. Основные полученные результаты имеют завершенную форму и сформулированы как критерии.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа, распределение корней, рост целой функции, логарифмические характеристики и меры, условие Линделефа.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D20

1. Введение

1.1. Описание основных результатов. Для пары распределений точек Z и W конечной верхней плотности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вещественной осью $\mathbb{R}$ даются несколько версий необходимых и одновременно достаточных условий на их расположение, при которых для любой целой функции экспоненциального типа $g \neq 0$, обращающейся в нуль на W, существует целая функция экспоненциального типа $f \neq 0$, обращающаяся в нуль на Z, удовлетворяющая одному из трех вариантов ограничений:

1) $\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \bigl|g(iy)\bigr|$ для всех $y \in \mathbb{R}$, т.е. всюду на мнимой оси $i\mathbb{R}$;
2) $\ln\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \ln\bigl|g(iy)\bigr| + o\bigl(|y|\bigr)$ при $y \to \pm\infty$;

A.E. Salimova, B.N. Khabibullin, Growth of entire functions of exponential type and characteristics of points distributions along straight line in complex plane.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по проекту № 20-31-90074–Аспиранты (А.Е. Салимова) и в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393, Б.Н. Хабибуллин).

Поступила 5 мая 2021 г.

3) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется целая функция экспоненциального типа $f \neq 0$, обращающаяся в нуль на Z и удовлетворяющая неравенству $\ln\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \ln\bigl|g(iy)\bigr| + \varepsilon|y|$ при всех $y \in \mathbb{R} \setminus E$, где $E \subset \mathbb{R}$ — множество конечной линейной лебеговой меры.

Исследование проведено в рамках обобщения и развития классической теоремы П. Мальявена и Л.А. Рубела 1960-х гг. [1, теорема 4.1], в которой был рассмотрен только случай расположения $\mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^+$ и $\mathsf{W} \subset \mathbb{R}^+$ на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$. Критерии даются в терминах мажорирования специальных логарифмических характеристик и (суб)мер для Z соответствующими логарифмическими характеристиками и (суб)мерами для W. При этом в последнем третьем варианте никаких дополнительных требований на Z и W не накладывается, а в первом и втором вариантах предполагается асимптотическая отделенность углами от мнимой оси для Z и W и либо расположение W полностью в правой или левой полуплоскости, либо условие типа Линделефа для W вдоль мнимой оси $i\mathbb{R}$ об определенной симметричности мнимых частей обратных величин $1/\mathsf{w}$ к $\mathsf{w} \in \mathsf{W}$ вида

$$\left|\sum_{\substack{\mathsf{w}\in\mathsf{W}\\ 1\leqslant|\mathsf{w}|\leqslant r}} \operatorname{Im}\frac{1}{\mathsf{w}}\right| = O(1) \quad \text{при } r \to +\infty.$$

Перейдем к точным формулировкам.

1.2. Обозначения и соглашения. Одноточечные множества $\{x\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как x. Так, для множества *натуральных чисел* $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ полагаем $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Множество $\mathbb{R}$ *действительных чисел,* со стандартными порядковой ($\leq$, $\sup / \inf$), алгебраической и топологической структурами в основном рассматривается как *вещественная ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$; $i\mathbb{R}$ — *мнимая ось*, $\overline{\mathbb{R}} := -\infty \cup \mathbb{R} \cup +\infty$ — *расширенная действительная прямая* с двумя концами $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, дополненная неравенствами $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и снабженная естественной порядковой топологией, а $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup +\infty$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup +\infty$. *Интервалы на* $\overline{\mathbb{R}}$ — связные подмножества в $\overline{\mathbb{R}}$, такие, как *отрезок* $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$ с *концами* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, где $[a, b] = \varnothing$ — *пустое множество* при $a < b$, а также $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$ и *открытый интервал* $(a, b) := (a, b] \cap [a, b)$. По определению $\inf \varnothing := +\infty$ и $\sup \varnothing := -\infty$. *Правые и левые открытые полуплоскости* обозначаем соответственно как $\mathbb{C}_{\mathrm{rh}} := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ и $\mathbb{C}_{\mathrm{lh}} := -\mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$. Через $\overline{D}(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant r\bigr\}$ обозначаем *замкнутый круг радиуса* $r \in \mathbb{R}^+$ *с центром в нуле.* Для $x \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ полагаем $x^+ := \sup\{0, x\}$, а $X^+ := \{x^+ \colon x \in X\}$. *Расширенной числовой функции* $f \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ сопоставляем ее *положительную часть* $f^+ \colon s \underset{s\in S}{\longmapsto} (f(s))^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ и *отрицательную часть* $f^- := (-f)^+ \colon S \to \overline{\mathbb{R}}^+$. Если в записи суммы верхний предел суммирования меньше нижнего предела суммирования или суммирование ведется по пустому множеству, то по определению сумма равна нулю.

1.3. Распределения точек на комплексной плоскости. Каждому *распределению точек* $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_\mathsf{j}\}$ из $\mathbb{C}$, состоящему из пронумерованных не более чем счетным количеством индексов j точек $\mathsf{z}_\mathsf{j} \in \mathbb{C}$, сопоставляем *считающую меру* [2, 0.1.2]

$$n_{\mathsf{Z}} \colon S \underset{S\subset\mathbb{C}}{\longmapsto} \sum_{\mathsf{z}_\mathsf{j}\in S} 1 \in \overline{\mathbb{N}}_0 \tag{1.1}$$

— число точек z_j, попавших в S. При этом то же обозначение

$$n_{\mathsf{Z}} \colon z \underset{z\,\in\,\mathbb{C}}{\longmapsto} n_{\mathsf{Z}}(z) = \sum_{\mathsf{z}_\mathsf{j}=z} 1 \in \overline{\mathbb{N}}_0 \tag{1.2}$$

используется и для *считающей функции* распределения точек Z, а

$$n_{\mathsf{Z}}^{\rm rad}(r) \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\overset{(1.2)}{:=}} \sum_{|z|\leqslant r} n_{\mathsf{Z}}(z) = \sum_{|\mathsf{z}_{\mathsf{j}}|\leqslant r} 1 \overset{(1.1)}{=} n_{\mathsf{Z}}\bigl(\overline{D}(r)\bigr) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \tag{1.3}$$

— *радиальная считающая функция* для Z по *замкнутым кругам* $\overline{D}(r)$.

Распределения точек Z и Z' *совпадают,* или *равны,* и пишем $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}'$, если у них одни и те же считающие меры или функции $n_{\mathsf{Z}} \overset{(1.1)}{=} n_{\mathsf{Z}'}$, а включение $\mathsf{Z} \subset \mathsf{Z}'$ означает, что выполнено неравенство $n_{\mathsf{Z}} \overset{(1.2)}{\leqslant} n_{\mathsf{Z}'}$. *Объединение* $\mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}'$ определяется считающей мерой или функцией $n_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{Z}'} := n_{\mathsf{Z}} + n_{\mathsf{Z}'}$, а при $\mathsf{Z} \subset \mathsf{Z}'$ *разность* $\mathsf{Z}' \setminus \mathsf{Z}$ определяется считающей мерой или функцией $n_{\mathsf{Z}'\setminus\mathsf{Z}} := n_{\mathsf{Z}'} - n_{\mathsf{Z}}$. Точка $z \in \mathbb{C}$ *принадлежит* Z, т.е. $z \in \mathsf{Z}$, если $n_{\mathsf{Z}}(z) > 0$ для считающей функции (1.2), а $z \notin \mathsf{Z}$, если $n_{\mathsf{Z}}(z) = 0$. Для $S \subset \mathbb{C}$ пересечение $\mathsf{Z} \cap S$ определяется сужением n_{Z} на S, а включение $\mathsf{Z} \subset S$ означает, что $\mathsf{Z} = \mathsf{Z} \cap S$.

Верхнюю плотность (при порядке 1) распределения точек Z обозначаем как [3]–[5]

$$\overline{\mathsf{dns}}_{\mathsf{Z}} := \limsup_{r\to+\infty} \frac{n_{\mathsf{Z}}^{\rm rad}(r)}{r} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \tag{1.4}$$

Ключевую роль далее будут играть логарифмические характеристики для распределений точек на $\mathbb{C}$, введенные для *положительных* распределений точек $\mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^+$ в основополагающей для настоящего исследования статье П. Мальявена и Л.А. Рубела [1] (см. также монографию Л.А. Рубела [6]) и распространенные на произвольные *комплексные* распределения точек $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ в работах Б.Н. Хабибуллина [7]–[10], [2, 3.2].

Определим *правый и левый характеристические логарифмы* для $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ как

$$l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(r) := \sum_{\substack{0<|\mathsf{z}_k|\leqslant r\\ \mathsf{z}_k\in\mathbb{C}_{\rm rh}}} \operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_k} = \sum_{0<|\mathsf{z}_k|\leqslant r} \operatorname{Re}^+\frac{1}{\mathsf{z}_k} \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad 0 < r \leqslant +\infty, \tag{1.5}$$

$$l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(r) := \sum_{\substack{0<|\mathsf{z}_k|\leqslant r\\ \mathsf{z}_k\in\mathbb{C}_{\rm lh}}} -\operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_k} = \sum_{0<|\mathsf{z}_k|\leqslant r} \operatorname{Re}^-\frac{1}{\mathsf{z}_k} \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad 0 < r \leqslant +\infty, \tag{1.6}$$

а также *правую* и *левую логарифмические меры интервалов* $(r, R] \subset \overline{\mathbb{R}}^+$

$$l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(r,R) \overset{(1.5)}{:=} l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(R) - l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(r) \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad 0 < r < R \leqslant +\infty, \tag{1.7}$$

$$l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(r,R) \overset{(1.6)}{:=} l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(R) - l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(r) \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad 0 < r < R \leqslant +\infty, \tag{1.8}$$

которые порождают *логарифмическую субмеру интервалов* $(r, R] \subset \overline{\mathbb{R}}^+$ для Z

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) := \max\{l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(r,R), l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(r,R)\} \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad 0 < r < R \leqslant +\infty, \tag{1.9}$$

где для $\mathsf{Z} = \varnothing$ по определению $l_\varnothing(r,R) \equiv 0$ при всех $0 < r < R \leqslant +\infty$.

1.4. Целые функции, предшествующие результаты и постановки задач. Кольцо $\mathsf{Hol}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$ состоит из всех голоморфных функций на $\mathbb{C}$, т.е. $\mathsf{Hol}(\mathbb{C})$ — кольцо *целых функций.* Через $\mathsf{Hol}_*(\mathbb{C}) := \bigl\{f \in \mathsf{Hol}(\mathbb{C})\colon f \neq 0\bigr\}$ обозначаем множество всех ненулевых целых функций. Через Zero_f обозначаем *распределение всех корней* целой функции $f \neq 0$ со считающей функцией n_{Zero_f} в смысле (1.2), равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ кратности корня функции f в точке z. Целая функция $f \neq 0$ на $\mathbb{C}$ *обращается в нуль* на распределении точек Z и пишем $f(\mathsf{Z}) = 0$, если $\mathsf{Z} \subset \mathsf{Zero}_f$.

Целую функцию f называют *целой функцией экспоненциального типа* (пишем *ц.ф.э.т*), если конечен ее тип (при порядке 1) [3]–[5], [11, 2.1], [12, (1.1)]

$$\mathsf{type}_f := \limsup_{z\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}. \tag{1.10}$$

Распределение точек $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z_j}\} \subset \mathbb{C}$ порождает идеал [1], [6, гл. 22], [12]

$$I(\mathsf{Z}) := \bigl\{f \in \mathsf{Hol}(\mathbb{C})\colon f(\mathsf{Z}) = 0\bigr\} \subset \mathsf{Hol}(\mathbb{C})$$

в кольце $\mathsf{Hol}(\mathbb{C})$, а также идеал в кольце всех ц.ф.э.т.[1]

$$I^1(\mathsf{Z}) := I(\mathsf{Z}) \cap \bigl\{f \in \mathsf{Hol}(\mathbb{C})\colon \mathsf{type}_f \overset{(1.10)}{<} +\infty\bigr\},$$

для которых при удалении нулевой функции используем еще и обозначение

$$I_*(\mathsf{Z}) := I(\mathsf{Z}) \cap \mathsf{Hol}_*(\mathbb{C}), \quad I^1_*(\mathsf{Z}) := I^1(\mathsf{Z}) \cap \mathsf{Hol}_*(\mathbb{C}).$$

Всюду далее $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$, $\mathsf{W} = \{\mathsf{w_j}\} \subset \mathbb{C}$ — *распределения точек конечной верхней плотности*

$$\overline{\mathsf{dns}}_\mathsf{Z} + \overline{\mathsf{dns}}_\mathsf{W} < +\infty. \tag{1.11}$$

Через mes обозначаем линейную лебегову меру евклидовой длины на $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1 ([7, основная теорема], [8, основная теорема], [2, теорема 3.2.1])**.** *Если $\mathsf{W} \subset \mathbb{C}_{\rm rh}$ лежит в правой полуплоскости, то эквивалентны следующие три утверждения:*

I. *Для любой функции $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ при любом $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ найдутся функция $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$ и борелевское множество $E \subset \mathbb{R}$, для которых*

$$\ln\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \ln\bigl|g(iy)\bigr| + \varepsilon|y| \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R} \setminus E \text{ и } \mathsf{mes}\, E < +\infty. \tag{1.12}$$

II. *При любом $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ существуют пара функций $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ с $\mathsf{Zero}_g \cap \mathbb{C}_{\rm rh} = \mathsf{W}$ и $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, а также борелевское множество $E \subset \mathbb{R}$, для которых выполнено* (1.12).

III. *Для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ найдется число $C \in \mathbb{R}^+$, для которого*

$$l_\mathsf{Z}(r, R) \leqslant l_\mathsf{W}(r, R) + \varepsilon \ln\frac{R}{r} + C \quad \text{при всех } 0 < r < R < +\infty. \tag{1.13}$$

В [9, (0.2)] распределение точек $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z_j}\}$ называется *отделенным* (углами) *от* $i\mathbb{R}$, если

$$|\mathrm{Re}\, \mathsf{z_j}| \geqslant d|\mathsf{z_j}| \quad \text{при всех } \mathsf{j} \text{ для некоторого числа } d > 0. \tag{1.14}$$

Условие (1.14) геометрически означает, что все ненулевые точки из Z лежат вне пары непустых открытых вертикальных углов, содержащих $i\mathbb{R} \setminus 0$. Распределение точек Z *асимптотически отделено углами от* $i\mathbb{R}$, если [12, (1.2)]

$$\left(\liminf_{\mathsf{j}\to\infty} \frac{\bigl|\mathrm{Re}\, \mathsf{z_j}\bigr|}{|\mathsf{z_j}|} > 0\right) \underset{\text{или}}{\Longleftrightarrow} \left(\limsup_{\mathsf{j}\to\infty} \frac{\bigl|\mathrm{Im}\, \mathsf{z_j}\bigr|}{|\mathsf{z_j}|} < 1\right). \tag{1.15}$$

Пара эквивалентных ограничений (1.15) геометрически означает, что найдется пара непустых открытых вертикальных углов, содержащих $i\mathbb{R} \setminus 0$, для которой точки $\mathsf{z_j}$ лежат вне этой пары углов при всех j за исключением их конечного числа.

Теорема 1.2 ([12, основная теорема])**.** *Пусть при* (1.11) *и $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$, и $\mathsf{W} \subset \mathbb{C}_{\rm rh}$ асимптотически отделены углами от $i\mathbb{R}$ в смысле* (1.15)*. Тогда эквивалентны три утверждения:*

I. *Для любой функции $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ с распределением корней, асимптотически отделенным углами от $i\mathbb{R}$, найдется функция $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$ с ограничением*

$$\ln\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \ln\bigl|g(iy)\bigr| + o(|y|) \quad \text{при } y \to +\infty. \tag{1.16}$$

II. *Существует пара $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ с $\mathsf{Zero}_g \cap \mathbb{C}_{\rm rh} = \mathsf{W}$ и $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, удовлетворяющая* (1.16).

[1] В [1] и [6] идеал $I^1(\mathsf{Z})$ обозначен соответственно как $\mathcal{F}(\mathsf{Z})$ и $F(\mathsf{Z})$.

III. *Существуют* $C \in \mathbb{R}^+$ *и ограниченная функция* $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *с* $d(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$, *для которых выполнены неравенства*

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) \leqslant l_{\mathsf{W}}(r,R) + d(R)\ln\frac{R}{r} + C \quad \text{при всех } 0<r<R<+\infty. \tag{1.17}$$

Исходный для теорем 1.1 и 1.2 совместный результат П. Мальявена и Л.А. Рубела получен в начале 1960-х только для распределений точек, лежащих исключительно на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, которые, очевидно, отделены углами от мнимой оси в смысле (1.14).

Теорема 1.3 ([1, теорема 4.1], [6, гл. 22])**.** *Если при* (1.11) *и* $\mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^+$, *и* $\mathsf{W} \subset \mathbb{R}^+$ *лежат на положительной полуоси, то эквивалентны три утверждения:*

I. *Для любой функции* $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ *найдется функция* $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$ *с ограничением*

$$\bigl|f(iy)\bigr| \leqslant \bigl|g(iy)\bigr| \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}. \tag{1.18}$$

II. *Существует пара* $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ *с* $\mathsf{Zero}_g \cap \mathbb{C}_{\mathrm{rh}} = \mathsf{W}$ *и* $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, *удовлетворяющая* (1.18).

III. *Существуют* $C \in \mathbb{R}^+$, *для которого*

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) \leqslant l_{\mathsf{W}}(r,R) + C \quad \text{при всех } 0<r<R<+\infty. \tag{1.19}$$

В нашей статье выполняются следующие три задачи.

1. Распространение теоремы Мальявена – Рубела 1.3 с распределений положительных точек на распределения комплексных точек $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ и $\mathsf{W} \subset \mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$, асимптотически отделенные углами от мнимой оси $i\mathbb{R}$, в теореме 2.1 из §2.
2. Полный отказ от условия о расположении W в правой полуплоскости из теоремы 1.1 при некотором изменении утверждения II в теореме 4.1 из §4.
3. Замена расположения W в правой полуплоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$ из теорем 1.2 и 2.1 на условие

$$\sup_{r\geqslant 1}\Biggl|\sum_{1<|\mathsf{w}_{\mathsf{j}}|\leqslant r} \operatorname{Im}\frac{1}{\mathsf{w}_{\mathsf{j}}}\Biggr| < +\infty \tag{1.20}$$

в теоремах 4.2 и 4.3 из §4 с некоторыми изменениями в промежуточных утверждениях II. Условие (1.20), очевидно, охватывает все распределения вещественных точек $\mathsf{W} \subset \mathbb{R}$ и распределения точек, симметричные относительно вещественной оси или нуля.

Ключевую роль в доказательствах всех теорем из §3 играет теорема 3.2 из §3 о взаимосвязях между логарифмическими (суб)мерами для распределений точек и различными вариантами условия Линделефа (3.1), (3.2) и (3.3) рода 1 для распределений точек на $\mathbb{C}$.

2. Распространение теоремы Мальявена – Рубела на распределения комплексных точек

Теорема 2.1. *При условии* (1.11) *для любых* $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ *и* $\mathsf{W} \subset \mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$, *асимптотически отделенных углами от* $i\mathbb{R}$ *в смысле* (1.15), *утверждения* I–III *из теоремы* 1.3 *эквивалентны.*

Доказательство. Для доказательства импликации I$\Longrightarrow$II достаточно построить ненулевую ц.ф.э.т. g с $\mathsf{Zero}_g \cap \mathbb{C}_{\mathrm{rh}} = \mathsf{W}$. В качестве такой функции можно выбрать ц.ф.э.т. g в виде четного канонического произведения Адамара – Вейерштрасса [3]–[5]

$$g(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{:=} \prod_{\mathsf{j}}\Bigl(1-\frac{z^2}{\mathsf{w}_{\mathsf{j}}^2}\Bigr).$$

Для доказательства импликации II$\Longrightarrow$III в обозначении

$$J_{i\mathbb{R}}(r,R;\ln|f|) := \frac{1}{2\pi}\int_r^R \frac{\ln\bigl|f(iy)f(-iy)\bigr|}{y^2}\,\mathrm{d}y, \quad 0<r<R<+\infty, \tag{2.1}$$

для целых функций f будет использована

Лемма 2.1 ([8, (1.3)], [9, (0.4)] и в явном виде в [13, предложение 4.1, (4.19)]). *При каждом фиксированном числе $r_0>0$ для любой ц.ф.э.т. $f\neq 0$ имеет место соотношение*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\max\Bigl\{\bigl|J_{i\mathbb R}(r,R;\ln|f|)-l^{\rm rh}_{\mathsf{Zero}_f}(r,R)\bigr|,\ \bigl|J_{i\mathbb R}(r,R;\ln|f|)-l^{\rm lh}_{\mathsf{Zero}_f}(r,R)\bigr|\Bigr\}<+\infty. \tag{2.2}$$

Логарифмирование и интегрирование неравенства (1.18) из утверждения II теоремы Мальявена – Рубела по отрезку $[r,R]$ с делением на y^2, как в (2.1), дает неравенства

$$J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|f|\bigr)\leqslant J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr)\quad\text{для всех } r_0\leqslant r<R<+\infty. \tag{2.3}$$

По лемме 2.1, примененной к ц.ф.э.т. $f\neq 0$, для некоторого числа $C_f\in\mathbb R^+$ получаем

$$l_{\mathsf Z}(r,R)\overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf{Zero}_f}(r,R)\overset{(2.2)}{\leqslant} J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|f|\bigr)+C_f\overset{(2.3)}{\leqslant} J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr)+C_f$$

для всех $r_0\leqslant r<R<+\infty$. Вновь по лемме 2.1, но примененной уже к ц.ф.э.т. $g\neq 0$, можем продолжить эту цепочку неравенств с некоторым числом $C_g\in\mathbb R^+$ как

$$l_{\mathsf Z}(r,R)\leqslant J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr)+C_f\overset{(2.2)}{\leqslant} l^{\rm rh}_{\mathsf{Zero}_g}(r,R)+C_g+C_f \text{ при всех } r_0\leqslant r<R<+\infty, \tag{2.4}$$

где из определения (1.5) правой логарифмической меры и из условия $\mathsf{Zero}_g\cap\mathbb C_{\rm rh}=\mathsf W\subset\mathbb C_{\rm rh}$ утверждения II правая часть равна

$$l^{\rm rh}_{\mathsf W}(r,R)+C_g+C_f=l_{\mathsf W}(r,R)+C_g+C_f.$$

Отсюда для постоянной $C:=C_g+C_f$, не зависящей от $r>r_0$ и $R>r$, по определениям (1.7), (1.8) и (1.9) при достаточно малом $r_0>0$ можно рассматривать все $0<r<R<+\infty$, что дает требуемые неравенства (1.19) и соответственно утверждение III.

Для доказательства импликации III$\Longrightarrow$I будет использована

Теорема 2.2 ([9, основная теорема]). *Пусть $g\neq 0$ — ц.ф.э.т., а распределение корней Zero_g и распределение точек $\mathsf Z=\{\mathsf z_{\mathsf j}\}$ отделены (углами) от $i\mathbb R$ в смысле* (1.14). *Для существования ц.ф.э.т. $f\neq 0$, обращающейся в нуль на $\mathsf Z$ и удовлетворяющей* (1.18), *необходимо и достаточно, чтобы существовало число $M\in\mathbb R$ такое, что*

$$l_{\mathsf Z}(r,R)\leqslant J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr)+M\quad\textit{для всех } 1\leqslant r<R<+\infty. \tag{2.5}$$

Пусть в условиях утверждения III теоремы 2.1 выполнены условия теоремы 2.2. Тогда для ц.ф.э.т. $g\neq 0$ с $\mathsf W\subset\mathsf{Zero}_g$ по лемме 2.1 существует число $C_g\in\mathbb R^+$, с которым

$$l_{\mathsf Z}(r,R)\overset{(1.19)}{\leqslant} l_{\mathsf W}(r,R)+C\leqslant l_{\mathsf{Zero}_g}(r,R)+C\overset{(2.2)}{\leqslant} J_{i\mathbb R}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr)+C_g+C$$

при всех $r_0\leqslant r<R<+\infty$. Отсюда при $r_0:=1$ получаем (2.5) и из части достаточности в теореме 2.2 найдется ц.ф.э.т. $f\neq 0$ с $f(\mathsf Z)=0$, удовлетворяющая (1.18).

Пусть теперь распределения точек $\mathsf Z$ и $\mathsf{Zero}_g\supset\mathsf W$ лишь асимптотически отделены углами от $i\mathbb R$ в смысле (1.15). Всегда можно выделить конечное распределение точек $\mathsf Z_0\subset\mathsf Z$ и конечное распределение точек $\mathsf G_0\subset\mathsf{Zero}_g$ так, что $\mathsf Z_\infty:=\mathsf Z\setminus\mathsf Z_0$ и $\mathsf G_\infty:=\mathsf{Zero}_g\setminus\mathsf G_0$ уже отделены углами от $i\mathbb R$ в смысле (1.14). При этом ввиду конечности распределения точек $\mathsf G_0$ по определениям логарифмических функций интервалов (1.5)–(1.6) и (1.7)–(1.9) найдется число $C_0\in\mathbb R^+$, для которого $l_{\mathsf G_0}(r,R)\leqslant C_0$ при всех $0<r<R<+\infty$, откуда

$$\begin{aligned}l_{\mathsf Z_\infty}(r,R)\leqslant l_{\mathsf Z}(r,R)&\overset{(1.19)}{\leqslant} l_{\mathsf W}(r,R)+C\leqslant l_{\mathsf{Zero}_g}(r,R)+C\overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf G_\infty}(r,R)+l_{\mathsf G_0}(r,R)+C\\ &\leqslant l_{\mathsf G_\infty}(r,R)+C_0+C\qquad\text{для всех}\qquad 0<r<R<+\infty.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь ц.ф.э.т. $g_\infty:=g/g_0\neq 0$, где g_0 — некоторый многочлен с распределением корней $\mathsf G_0$, с $g_\infty(\mathsf G_\infty)=0$. По уже доказанной версии импликации III$\Longrightarrow$I для g_∞ в роли g и $\mathsf G_\infty$ в роли $\mathsf W$ ввиду (2.6) найдется ц.ф.э.т. $f_\infty\neq 0$ с $f_\infty(\mathsf Z_\infty)=0$, удовлетворяющая условию (1.18) в виде $\bigl|f_\infty(iy)\bigr|\leqslant\bigl|g_\infty(iy)\bigr|$ при всех $y\in\mathbb R$, откуда по построениям

$$\bigl|(g_0f_\infty)(iy)\bigr|\leqslant\bigl|(g_0g_\infty)(iy)\bigr|=\bigl|g(iy)\bigr|\quad\text{при всех}\quad y\in\mathbb R\quad\text{и}\quad(g_0f_\infty)(\mathsf Z_\infty)=0. \tag{2.7}$$

Пусть число точек в Z_0 равно N, т.е. $N \overset{(1.1)}{:=} n_{\mathsf{Z}_0}(\mathbb{C})$, и f_0 — некоторый многочлен степени N с распределением корней Z_0. Тогда для достаточно малого числа $a>0$ сужение функции

$$f_a(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{:=} af_0(z)\Bigl(\frac{\sin iz}{z}\Bigr)^N$$

на $i\mathbb{R}$ ограничено по модулю единицей на $i\mathbb{R}$ и по (2.7) для ц.ф.э.т. $f := f_a g_0 f_\infty \neq 0$, обращающейся в нуль на $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_0 \cup \mathsf{Z}_\infty$, имеем

$$|f(iy)| = \bigl|(f_a g_0 f_\infty)(iy)\bigr| \overset{(2.7)}{\leqslant} \bigl|g(iy)\bigr|$$

при всех $y\in\mathbb{R}$, что завершает доказательство импликации III$\Longrightarrow$I и теоремы 2.1. □

Замечание 2.1. *Анализ доказательств теорем 1.1 и 1.2, а также теоремы 2.1 показывает, что при доказательстве импликаций III$\Longrightarrow$I каждой из теорем нигде не используется расположение распределения точек W именно в правой полуплоскости $\mathbb{C}_{\rm rh}$. Таким образом, условие $\mathsf{W}\subset\mathbb{C}_{\rm rh}$ в теоремах 1.1, 1.2 и 2.1 применяется только при доказательстве импликаций I$\Longrightarrow$II$\Longrightarrow$III. Ясно, что условие $\mathsf{W}\subset\mathbb{C}_{\rm rh}$ можно в них заменить на расположение $\mathsf{W}\subset\mathbb{C}_{\rm lh}$ целиком в левой полуплоскости с помощью зеркальной симметрии относительно $i\mathbb{R}$.*

3. Условия Линделефа рода 1

Распределение точек $\mathsf{Z}=\{\mathsf{z}_\mathsf{j}\}_{\mathsf{j}\in\mathsf{J}}$ удовлетворяет *условию Линделефа* (рода 1), если

$$\sup_{r\geqslant 1}\Biggl|\sum_{1<|\mathsf{z}_\mathsf{j}|\leqslant r}\frac{1}{\mathsf{z}_\mathsf{j}}\Biggr| < +\infty; \tag{3.1}$$

удовлетворяет $\mathbb{R}$-*условию Линделефа* (рода 1), если

$$\sup_{r\geqslant 1}\Biggl|\sum_{1<|\mathsf{z}_\mathsf{j}|\leqslant r}\operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_\mathsf{j}}\Biggr| < +\infty; \tag{3.2}$$

удовлетворяет $i\mathbb{R}$-*условию Линделефа* (рода 1), если (см. (1.20))

$$\sup_{r\geqslant 1}\Biggl|\sum_{1<|\mathsf{z}_\mathsf{j}|\leqslant r}\operatorname{Im}\frac{1}{\mathsf{z}_\mathsf{j}}\Biggr| < +\infty. \tag{3.3}$$

Особую роль условия Линделефа (3.1) рода 1 обеспечивает теорема Адамара – Линделефа

Теорема 3.1 ([4], [5], [3, 2.10])**.** *Если $f\neq 0$ — ц.ф.э.т., то распределение корней Zero_f конечной верхней плотности и удовлетворяет условию Линделефа* (3.1)*. Обратно, если распределение точек Z конечной верхней плотности и удовлетворяет условию Линделефа* (3.1)*, то найдется ц.ф.э.т. $f\neq 0$ с $\mathsf{Zero}_f=\mathsf{Z}$.*

Следующее предложение сразу следует из определений (3.1), (3.2) и (3.3).

Предложение 3.1. *Пусть $\mathsf{Z}\subset\mathbb{C}$ — распределение комплексных точек.*

[L1] Z *удовлетворяет условию Линделефа* (3.1)*, если и только если* Z *удовлетворяет одновременно $\mathbb{R}$-условию Линделефа* (3.2) *и $i\mathbb{R}$-условию Линделефа* (3.3)*.*

[L2] *Следующие три утверждения эквивалентны:*
- (i) Z *удовлетворяет $\mathbb{R}$-условию Линделефа* (3.2)*;*
- (ii) *для правых и левых логарифмических мер* (1.7) *и* (1.8) *выполнено соотношение*

$$\sup_{1\leqslant r<R<+\infty}\bigl|l_{\mathsf{Z}}^{\rm rh}(r,R)-l_{\mathsf{Z}}^{\rm lh}(r,R)\bigr| < +\infty; \tag{3.4}$$

(iii) *для логарифмической субмеры* (1.9) *выполнено соотношение*

$$\sup_{1\leqslant r<R<+\infty}\Bigl(\bigl|l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r,R)-l_{\mathsf Z}(r,R)\bigr|+\bigl|l_{\mathsf Z}(r,R)-l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r,R)\bigr|\Bigr)<+\infty; \tag{3.5}$$

(iv) *поворот* $i\mathsf Z:=\{i\mathsf z_{\mathsf j}\}\subset\mathbb C$ *на угол* $\frac{\pi}{2}$ *удовлетворяет* $i\mathbb R$*-условию Линделефа* (3.3).

Распределение точек $\mathsf Z$ *разделенное* (относительно расстояния), если существует такое число $d>0$, что расстояние между любыми двумя точками из $\mathsf Z$ не меньше d.

Для доказательства последующих трех теорем потребуется

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathsf Z\subset\mathbb C$ *— распределение точек конечной верхней плотности. Тогда существуют такие разделенные распределения вещественных точек* $\mathsf X\subset\mathbb R$ *и* $\mathsf Y\subset\mathbb R$ *конечной верхней плотности, что объединение* $\mathsf Z\cup\mathsf X$ *удовлетворяет* $\mathbb R$*-условию Линделефа* (3.2), *объединение* $\mathsf Z\cup i\mathsf Y$ *удовлетворяет* $i\mathbb R$*-условию Линделефа* (3.3), *а также*

$$\sup_{1\leqslant r<R<+\infty}\bigl(l_{\mathsf Z\cup\mathsf X}(r,R)-l_{\mathsf Z}(r,R)\bigr)<+\infty, \tag{3.6}$$

$$\sup_{1\leqslant r<R<+\infty}\bigl(l_{(i\mathsf Z)\cup\mathsf Y}(r,R)-l_{i\mathsf Z}(r,R)\bigr)<+\infty. \tag{3.7}$$

При этом объединение $\mathsf Z\cup\mathsf X\cup i\mathsf Y$ *удовлетворяет условию Линделефа* (3.1).

Доказательство. Рассмотрим двоичную последовательность $r_k:=2^k$ с $k\in\mathbb N_0$.

Для построения распределения точек $\mathsf X=\{\mathsf x_{\mathsf j}\}\subset\mathbb R$ при каждом $k\in\mathbb N_0$ произведем следующий выбор интервалов $I_k^{\pm}$ и точек $\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^{\pm}$, образующих $\mathsf X$:

[+] Если $l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})\leqslant l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})$, то положим $I_k^+:=(r_k,r_{k+1}]\subset\mathbb R^+$. Очевидно, можно выбрать такой конечный набор из $N_k\in\mathbb N$ попарно различных точек $\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^+$, включающий точку r_{k+1} и разбивающий I_k^+ на подинтервалы равной длины $(r_{k+1}-r_k)/N_k$, что

$$\begin{aligned} l_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})&\overset{(1.9)}{=}l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})\leqslant l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\sum_{\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^+}\frac{1}{\mathsf x_{\mathsf j}}\\ &\leqslant l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\frac{1}{r_k}\overset{(1.9)}{=}l_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\frac{1}{r_k}. \end{aligned}\tag{3.8}$$

[−] Если $l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})<l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})$, то положим $I_k^-:=[-r_{k+1},-r_k)\subset-\mathbb R^+$, где выбираем такой конечный набор из $N_k\in\mathbb N_0$ попарно различных точек $\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^-$, включающий точку $-r_{k+1}$ и разбивающий I_k^- на подинтервалы равной длины $(r_{k+1}-r_k)/N_k$, что

$$\begin{aligned} l_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})&\overset{(1.9)}{=}l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})\leqslant l^{\rm lh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\sum_{\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^-}\frac{1}{-\mathsf x_{\mathsf j}}\\ &\leqslant l^{\rm rh}_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\frac{1}{r_k}\overset{(1.9)}{=}l_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\frac{1}{r_k}. \end{aligned}\tag{3.9}$$

Покажем сначала, что распределение точек $\mathsf X$ конечной верхней плотности.

По построению из верхних оценок в (3.8) или в (3.9) с завершающим равенством следует

$$N_k\frac{1}{r_{k+1}}\leqslant\sum_{\mathsf x_{\mathsf j}\in I_k^{\pm}}\frac{1}{|\mathsf x_{\mathsf j}|}\leqslant l_{\mathsf Z}(r_k,r_{k+1})+\frac{1}{r_k}\overset{(1.1)}{\leqslant}\int_{\overline D(r_{k+1})\setminus\overline D(r_k)}\Bigl|\operatorname{Re}\frac{1}{z}\Bigr|\,{\rm d}n_{\mathsf Z}(z)+\frac{1}{r_k},$$

где $n_{\mathsf Z}$ — считающая мера из (1.1). Переходя к радиальной считающей функции (1.3), можем продолжить неравенства как

$$N_k\leqslant r_{k+1}\int_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{1}{t}\,{\rm d}n^{\rm rad}_{\mathsf Z}(t)+2\leqslant r_{k+1}\frac{1}{r_k}\int_{r_k}^{r_{k+1}}{\rm d}n^{\rm rad}_{\mathsf Z}(t)+2\leqslant 2\bigl(n^{\rm rad}_{\mathsf Z}(r_{k+1})-n^{\rm rad}_{\mathsf Z}(r_k)+1\bigr), \tag{3.10}$$

откуда суммирование по k дает неравенства

$$n_{\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} 2\Bigl(n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r_{k+1}) - n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r_k) + 1\Bigr) \leqslant 2n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1}) + 2(n+1) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого $r \in (r_n, r_{n+1}]$ получаем

$$\frac{n_{\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r)}{r} \leqslant 2\frac{n_{\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1})}{r_{n+1}} \leqslant 4\frac{n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1})}{r_{n+1}} + 4\frac{n+1}{2^{n+1}} = O(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad r \to +\infty,$$

что доказывает конечность верхней плотности распределения точек X.

Кроме того, из (3.10) в силу конечности верхней плотности Z существует $D \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$, для которого $N_k \leqslant 2n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r_{k+1}) + 2 \leqslant Dr_{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно,

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{N_k} \geqslant \frac{r_{k+1} - r_k}{Dr_{k+1}} = \frac{1}{2D} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

По построениям [$\pm$] это означает, что распределение точек X *разделенное.*

Покажем теперь, что объединение $\mathsf{Z} \cup \mathsf{X}$ удовлетворяет условию (3.6).

При $n < N$ по построению [$+$] части распределения точек X, лежащей на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, из аддитивности последовательно правой (1.7) и левой (1.8) логарифмических мер и из промежуточного срединного неравенства в (3.8) следует

$$\begin{aligned} l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rh}}(r_n, r_N) &\overset{(1.7)}{=} \sum_{k=n}^{N-1} l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rh}}(r_k, r_{k+1}) \overset{(3.8)}{\leqslant} \sum_{k=n}^{N-1}\Bigl(l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(r_k, r_{k+1}) + \frac{1}{r_k}\Bigr) \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(r_k, r_{k+1}) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{r_k} \overset{(1.8)}{=} l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(r_n, r_N) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{2^k} \overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf{Z}}(r_n, r_N) + 2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично, по построению [$-$] части распределения точек X, лежащей на отрицательной полуоси $-\mathbb{R}^+$, из аддитивности последовательно левой (1.8) и правой (1.7) логарифмических мер и из промежуточного срединного неравенства в (3.9) следует

$$\begin{aligned} l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{lh}}(r_n, r_N) &\overset{(1.8)}{=} \sum_{k=n}^{N-1} l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{lh}}(r_k, r_{k+1}) \overset{(3.9)}{\leqslant} \sum_{k=n}^{N-1}\Bigl(l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(r_k, r_{k+1}) + \frac{1}{r_k}\Bigr) \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(r_k, r_{k+1}) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{r_k} \overset{(1.7)}{=} l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(r_n, r_N) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{2^k} \overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf{Z}}(r_n, r_N) + 2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (3.11)-(3.12) по определению (1.9) логарифмической субмеры имеем

$$l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_n, r_N) \overset{(1.9)}{=} \max\Bigl\{l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{lh}}(r_n, r_N), l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rh}}(r_n, r_N)\Bigr\} \leqslant l_{\mathsf{Z}}(r_n, r_N) + 2. \tag{3.13}$$

Отсюда при любых $n \leqslant N$ для любых $r_n < r \leqslant r_{n+1}$ и $r_N < R \leqslant r_{N+1}$ получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathsf{Z}}(r, R) &\leqslant l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r, R) \leqslant l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r, r_{n+1}) + l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_{n+1}, r_N) + l_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_N, r) \\ &\overset{(3.13)}{\leqslant} \frac{1}{r_n} n_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1}) + \bigl(l_{\mathsf{Z}}(r_{n+1}, r_N) + 2\bigr) + \frac{1}{r_N} n_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{N+1}) \\ &\leqslant l_{\mathsf{Z}}(r, R) + \Bigl(2 + 2\frac{n_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{n+1})}{r_{n+1}} + 2\frac{n_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}^{\mathrm{rad}}(r_{N+1})}{r_{N+1}}\Bigr). \end{aligned}$$

Ввиду доказанной конечности верхней плотности распределения точек X последняя величина в круглой скобке ограничена по всем $0 \leqslant n \leqslant N < +\infty$, что доказывает (3.6).

Убедимся наконец, что объединение $\mathsf{Z} \cup \mathsf{X}$ удовлетворяет $\mathbb{R}$-условию Линделефа (3.2).

Построения [$\pm$] показывают, что интервалы $I_k^+ \subset \mathbb{R}^+$ и $-I_k^- \subset \mathbb{R}^+$ не пересекаются и покрывают весь луч $[1, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$.

В случае [+] ввиду равенств

$$l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) + \sum_{\mathsf{x}_{\mathsf{j}} \in I_k^+} \frac{1}{\mathsf{x}_{\mathsf{j}}} = l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) \quad \text{для всех интервалов} \quad (r_k, r_{k+1}] = I_k^+ \subset \mathbb{R}^+$$

из промежуточного срединного неравенства в (3.8) получаем

$$0 \leqslant l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) - l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) \leqslant \frac{1}{r_k} = \frac{1}{2^k},$$

а $l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) = l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1})$, поскольку в противоположном интервале $-I_k^+ \subset -\mathbb{R}^+$ по построению [+] точки для распределения точек X не выбирались. Таким образом,

$$0 \leqslant l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) - l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{для всех интервалов} \quad (r_k, r_{k+1}] = I_k^+ \subset \mathbb{R}^+. \tag{3.14}$$

В случае [–] ввиду равенств

$$l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) + \sum_{\mathsf{x}_{\mathsf{j}} \in I_k^+} \frac{1}{-\mathsf{x}_{\mathsf{j}}} = l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}), \quad \text{для всех интервалов} \quad (r_k, r_{k+1}] = -I_k^- \subset \mathbb{R}^+$$

из промежуточного срединного неравенства в (3.9) получаем

$$0 \leqslant l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) - l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) \leqslant \frac{1}{r_k} = \frac{1}{2^k},$$

а $l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}}(r_k, r_{k+1}) = l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1})$, поскольку в противоположном интервале $-I_k^- \subset \mathbb{R}^+$ по построению [–] точки для распределения точек X не выбирались. Таким образом,

$$0 \leqslant l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) - l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{для всех интервалов} \quad (r_k, r_{k+1}] = -I_k^- \subset \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

При $r \in (r_n, r_{n+1}]$ суммирование по $k \leqslant n$ на основе (3.14) и (3.15) дает

$$\begin{aligned} \bigl|l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(1, r) - l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(1, r)\bigr| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \bigl|l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1}) - l^{\mathrm{rh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_k, r_{k+1})\bigr| + \bigl|l^{\mathrm{lh}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_n, r)\bigr| \\ &\overset{(3.14),(3.15)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{r_n} n^{\mathrm{rad}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_{k+1}) \leqslant 2 + 2\frac{n^{\mathrm{rad}}_{\mathsf{Z}\cup\mathsf{X}}(r_{k+1})}{r_{n+1}} = O(1) \end{aligned}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (r_n, r_{n+1}]$. Последнее из эквивалентности (ii)$\Longleftrightarrow$(i) части L2 предложения 3.1 с соотношением (3.4) означает, что для распределения точек $\mathsf{Z} \cup \mathsf{X}$ выполнено $\mathbb{R}$-условие Линделефа (3.2).

Существование распределения точек Y с требуемыми свойствами, включая (3.7), сразу следует из доказанной части теоремы 3.2 для X после поворота $i\mathsf{Z}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ распределения точек Z с учетом эквивалентности (i)$\Longleftrightarrow$(iv) части [L2] предложения 3.1. Условие Линделефа (3.1) для объединения $\mathsf{Z} \cup \mathsf{X} \cup i\mathsf{Y}$ следует из части [L1] предложения 3.1. □

Следствие 3.1. *Пусть распределение точек* $\mathsf{W} \subset \mathbb{C}$ *конечной верхней плотности. Тогда:*

(a) *Существует ц.ф.э.т.* $g \neq 0$ *со свойствами* $g(\mathsf{W}) = 0$ *и*

$$\sup_{1 \leqslant r < R < +\infty} \Bigl(l_{\mathsf{Zero}_g}(r, R) - l_{\mathsf{W}}(r, R)\Bigr) < +\infty. \tag{3.16}$$

(b) *Если распределение точек* W *асимптотически отделено углами от* $i\mathbb{R}$ *в смысле* (1.15) *и удовлетворяет* $i\mathbb{R}$*-условию Линделефа* (1.20)*, то ц.ф.э.т.* $g \neq 0$*, удовлетворяющую одновременно двум свойствам* $\mathsf{W} \subset \mathsf{Zero}_g$ *и* (3.16)*, можно выбрать с асимптотически отделенным углами от* $i\mathbb{R}$ *распределением корней* Zero_g*.*

Доказательство. По теореме 3.2 существуют распределения точек $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}$ и $i\mathsf{Y} \subset i\mathbb{R}$ конечной верхней плотности, для которых $\mathsf{W} \cup \mathsf{X} \cup i\mathsf{Y}$ удовлетворяет условию Линделефа (3.1) и выполнено (3.6) с W вместо Z. По теореме 3.1 Адамара – Линделефа существует ц.ф.э.т. $g \neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_g = \mathsf{W} \cup \mathsf{X} \cup i\mathsf{Y}$, обращающаяся в нуль на W, для которой по (3.6) с W вместо Z выполнено (3.16), поскольку распределение мнимых точек $i\mathsf{Y} \subset i\mathbb{R}$ на логарифмическую субмеру никак не влияет. Часть (a) доказана.

По части (b) достаточно рассмотреть объединение $\mathsf{W} \cup \mathsf{X}$ с предыдущим выбором распределения вещественных точек $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}$. По $i\mathbb{R}$-условию Линделефа (1.20) для W объединение $\mathsf{W} \cup \mathsf{X}$ удовлетворяет условию Линделефа (3.1) по части [L1] предложения 3.1. По теореме 3.1 Адамара – Линделефа существует ц.ф.э.т. $g \neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_g = \mathsf{W} \cup \mathsf{X}$, обращающаяся в нуль на W, для которой по (3.6) с W вместо Z выполнено (3.16). Очевидно, по-прежнему $\mathsf{Zero}_g = \mathsf{W} \cup \mathsf{X}$ асимптотически отделено углами от $i\mathbb{R}$, поскольку таковы как W по условию, так и распределение вещественных точек $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}$. □

4. Варианты теорем 1.1, 1.2 и 2.1 без условия расположения распределения точек W в правой полуплоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$

Вариант теоремы 1.1 с любым распределением точек W конечной верхней плотности представлен ниже.

Теорема 4.1. *Достаточно лишь условия* (1.11) *конечности верхней плотности* Z *и* W, *чтобы каждое из утверждений* I *и* III *из теоремы* 1.1 *было эквивалентно утверждению:*

$\widehat{\mathrm{II}}$. *При любом* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ *существует пара функций* $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ *со свойством* (3.16) *и* $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, *а также борелевское подмножество* $E \subset \mathbb{R}$, *удовлетворяющие* (1.12).

Доказательство. По части (a) следствия 3.1 существует ц.ф.э.т. $g \neq 0$, с требуемыми в утверждении $\widehat{\mathrm{II}}$ свойствами, а по утверждению I из теоремы 1.1 найдется $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, удовлетворяющая (1.12), что и доказывает импликацию $\mathrm{I} \Longrightarrow \widehat{\mathrm{II}}$.

Если выполнено $\widehat{\mathrm{II}}$, то соответствующее интегрирование (1.12) дает

$$J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|f|\bigr) \leqslant J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|g|\bigr) + \varepsilon \ln\frac{R}{r} + C \quad \text{при всех } 1 \leqslant r < R < +\infty. \tag{4.1}$$

По лемме 2.1, дважды примененной соответственно к ц.ф.э.т. $f \neq 0$ и к ц.ф.э.т. $g \neq 0$, для некоторых положительных чисел C_f, C_g, M получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathsf{Z}}(r,R) &\overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf{Zero}_f}(r,R) \overset{(2.2)}{\leqslant} J_{i\mathbb{R}}\bigl(r,R;\ln|f|\bigr) + C_f \overset{(4.1)}{\leqslant} J_{i\mathbb{R}}\bigl(r,R;\ln|g|\bigr) + \varepsilon\ln\frac{R}{r} + C + C_f \\ &\overset{(2.2)}{\leqslant} l_{\mathsf{Zero}_g}(r,R) + C_g + \varepsilon\ln\frac{R}{r} + C + C_f \overset{(3.16)}{\leqslant} l_{\mathsf{W}}(r,R) + M + C_g + \varepsilon\ln\frac{R}{r} + C + C_f \end{aligned}$$

при всех $1 \leqslant r < R < +\infty$, где при последнем переходе использовано свойство-условие (3.16) из $\widehat{\mathrm{II}}$. Переобозначив здесь сумму $M+C_g+C+C_f$ как число C, получаем соотношение (1.13) утверждения III из теоремы 1.1.

Справедливость импликации $\mathrm{III} \Longrightarrow \mathrm{I}$ из теоремы 1.1 уже отмечена в замечании 2.1 для любых распределений точек Z и W конечной верхней плотности. □

Вариация теоремы 1.2 с $i\mathbb{R}$-условием Линделефа (1.20) на W вместо $W \subset \mathbb{C}_{\mathrm{rh}}$ — это

Теорема 4.2. *Пусть при* (1.11) *и* Z, *и* W *асимптотически отделены углами от* $i\mathbb{R}$ *в смысле* (1.15), *а распределение точек* W *удовлетворяет* $i\mathbb{R}$-*условием Линделефа* (1.20). *Тогда каждое из утверждений* I *и* III *из теоремы* 1.2 *эквивалентно утверждению:*

$\widehat{\mathrm{II}}$. *Существует пара функций* $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ *с* (3.16) *и* $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, *удовлетворяющие* (1.16).

Доказательство. По части (b) следствия 3.1 существует ц.ф.э.т. $g \neq 0$, с требуемыми в утверждении $\widehat{\mathrm{II}}$ свойствами, а по утверждению I теоремы 1.2 найдется $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, удовлетворяющая (1.16), что и доказывает импликацию I$\Longrightarrow\widehat{\mathrm{II}}$.

Если выполнено утверждение $\widehat{\mathrm{II}}$, то интегрируя, как в (2.1), при каждом $r_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ для некоторой ограниченной функции $Q\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Q(x)}{x} = 0, \tag{4.2}$$

и для некоторого числа $C_0 \in \mathbb{R}^+$ из соотношения (1.16) получаем

$$J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|f|\bigr) \leqslant J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|g|\bigr) + \int_r^R \frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y + C_0 \quad \text{при всех } 0 < r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1 ([12, следствие 2.1])**.** *Пусть $r_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$. Если для функции*

$$Q\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$$

выполнено (4.2)*, то найдется убывающая функция $d\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, для которой*

$$\int_r^R \frac{Q(x)}{x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant d(R) \ln\frac{R}{r} \quad \textit{при всех} \quad r_0 \leqslant r < R < +\infty, \tag{4.4}$$

$$\lim_{R\to+\infty} d(R) = 0. \tag{4.5}$$

Если для функции $d\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ выполнено (4.5)*, то найдется возрастающая функция $Q\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, для которой выполнено* (4.2) *и*

$$d(R) \ln\frac{R}{r} \leqslant \int_r^R \frac{Q(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \textit{при всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{4.6}$$

По первой части леммы 4.1 неравенство (4.3) можно переписать как

$$J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|f|\bigr) \leqslant J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|g|\bigr) + d(R) \ln\frac{R}{r} + C_0 \quad \text{для всех} \quad r_0 \leqslant r < R < +\infty, \tag{4.7}$$

где d — некоторая ограниченная функция со свойством (4.5).

По лемме 2.1, дважды примененной соответственно к ц.ф.э.т. $f \neq 0$ и к ц.ф.э.т. $g \neq 0$, для некоторых положительных чисел C_f, C_g, M получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathsf{Z}}(r, R) &\overset{(1.9)}{\leqslant} l_{\mathsf{Zero}_f}(r, R) \overset{(2.2)}{\leqslant} J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|f|\bigr) + C_f \overset{(4.7)}{\leqslant} J_{i\mathbb{R}}\bigl(r, R; \ln|g|\bigr) + d(R) \ln\frac{R}{r} + C_0 + C_f \\ &\overset{(2.2)}{\leqslant} l_{\mathsf{Zero}_g}(r, R) + C_g + d(R) \ln\frac{R}{r} + C_0 + C_f \overset{(3.16)}{\leqslant} l_{\mathsf{W}}(r, R) + M + C_g + d(R) \ln\frac{R}{r} + C_0 + C_f \end{aligned}$$

при всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$, где использовано свойство-условие (3.16) из $\widehat{\mathrm{II}}$. Полагая $C := M + C_g + C_0 + C_f$, получаем соотношение (1.17) утверждения III из теоремы 1.2.

Справедливость импликации III$\Longrightarrow$I из теоремы 1.2 уже отмечена в замечании 2.1 для любых распределений точек Z и W конечной верхней плотности. □

Вариация теоремы 2.1, развивающая и теорему 1.3 Мальявена – Рубела, с $i\mathbb{R}$-условием Линделефа (1.19) на W вместо расположения W в правой полуплоскости — это

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2*. Тогда каждое из утверждений* I *и* III *из теоремы* 1.2 *Мальявена – Рубела эквивалентно утверждению:*

$\widehat{\mathrm{II}}$. *Существует пара функций $g \in I^1_*(\mathsf{W})$ с* (3.16) *и $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, удовлетворяющая* (1.18)*.*

Доказательство. По части (b) следствия 3.1 существует ц.ф.э.т. $g \neq 0$, с требуемыми в утверждении $\widehat{\mathrm{II}}$ свойствами, а по утверждению I из теоремы 1.2 Мальявена – Рубела найдется $f \in I^1_*(\mathsf{Z})$, удовлетворяющая (1.18), что и доказывает импликацию I$\Longrightarrow\widehat{\mathrm{II}}$.

Если выполнено $\widehat{\mathrm{II}}$, то логарифмирование и интегрирование неравенства (1.18) по отрезку $[r, R]$ с делением, как в (2.1), дает неравенства (2.3) с переходом к (2.4) дословно так же, как в доказательстве импликации II$\Longrightarrow$III в теореме 2.1. Применение условия (3.16) из утверждения $\widehat{\mathrm{II}}$ позволяет продолжить (2.4) с некоторым числом $C_0 \in \mathbb{R}^+$ как

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) \leqslant l_{\mathsf{Zero}_g}(r,R) + C_g + C_f \overset{(3.16)}{\leqslant} l_{\mathsf{W}}(r,R) + C_0 + C_g + C_f \quad \text{при всех} \quad r_0 \leqslant r < R < +\infty,$$

откуда при $C := C_0 + C_g + C_f \in \mathbb{R}^+$ получаем III из теоремы 1.2 Мальявена – Рубела с (1.19).

Справедливость импликации III$\Longrightarrow$I уже отмечена в замечании 2.1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Malliavin, L.A. Rubel. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France. **89**:2, 175–201 (1961).
2. Б.Н. Хабибуллин. *Полнота систем экспонент и множества единственности*, изд. 4-ое доп. Уфа: РИЦ БашГУ. 2012. https://www.researchgate.net/publication/271841461
3. R.P.Jr. Boas. *Entire Functions.* New York: Academic Press. 1954.
4. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
5. B.Ya. Levin. *Lectures on entire functions.* Transl. Math. Monographs. **150**. Providence RI: Amer. Math. Soc. 1996.
6. L.A. Rubel, J.E. Colliander. *Entire and Meromorphic Functions.* New York: Springer-Verlag. 1996.
7. Б.Н. Хабибуллин. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Докл. Акад. Наук СССР. **302**:2, 270–273 (1988).
8. Б.Н. Хабибуллин. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сб. **180**:5, 706–719 (1989).
9. Б.Н. Хабибуллин. *О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями* // Analysis Math. **17**:3, 239–256 (1991).
10. Б.Н. Хабибуллин. *О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой* // Матем. заметки. **70**:4, 621–635 (2001).
11. Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелева. *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай* // Алгебра и анализ. **31**:1, 156–210 (2019).
12. А.Е. Салимова, Б. Н. Хабибуллин. *Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой* // Матем. заметки. **108**:4, 588–600 (2020).
13. Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелева, З.Ф. Абдуллина. *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. II. Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче* // Алгебра и анализ. **32**:1, 208–243 (2020).

Анна Евгениевна Салимова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: anegorova94@bk.ru

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru