ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 107-115.

УДК 517.956

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОНАПРАВЛЕННЫМИ СДВИГАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А.Б. МУРАВНИК

Аннотация. Исследуется задача Дирихле в полупространстве для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с операторами, представляющими собой композиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственноподобным переменным (независимым переменным, изменяющимся на всей вещественной оси). Указанные уравнения, существенно обобщающие классические эллиптические уравнения в частных производных, возникают в разнообразных приложениях математической физики, для которых характерны нелокальные и (или) неоднородные свойства процесса или среды. В теоретическом плане интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они связывают между собой значения неизвестной функции (и ее производных) не в одной точке, а в разных, что делает неприменимыми многие классические методы.

Для рассматриваемой задачи устанавливается разрешимость в смысле обобщенных функций (а для уравнения — классическая разрешимость), строится интегральное представление указанного решения формулой пуассоновского типа и доказывается, что построенное решение является классическим вне граничной гиперплоскости и равномерно стремится к нулю при стремлении времениподобной переменной (единственной независимой переменной, изменяющейся на положительной оси, ортогональной гиперплоскости граничных данных) к бесконечности. Ранее исследовались только случаи, в которых оператор сдвига действует лишь по одной пространственноподобной переменной. В настоящей работе операторы сдвига действуют по каждой пространственноподобной переменной.

Для получения ядра Пуассона используется классическая операционная схема Гельфанда – Шилова: к изучаемой задаче применяется преобразование Фурье по всем пространственноподобным переменным (используется тот факт, что операторы сдвига, так же как и дифференциальные операторы, являются мультипликаторами Фурье), и исследуется полученная задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (зависящего от двойственных переменных, как от параметров).

Ключевые слова: эллиптические задачи, дифференциально-разностные уравнения, разнонаправленные сдвиги.

Mathematics Subject Classification: 35R10, 35J25

A.B. Muravnik, Elliptic differential-difference equations with differently directed translations in half-spaces.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00288 А.

Поступила 10 февраля 2021 г.

1. Введение. Постановка задачи

Краевые задачи в полупространстве традиционно считаются характерными для параболических и гиперболических уравнений: единственная независимая переменная, изменяющаяся на полуоси, естественным образом трактуется как время, все остальные переменные — пространственные, а данные, задаваемые на границе области (т.е. на гиперплоскости, ортогональной этой полуоси), трактуются, соответственно, как начальные данные. Однако, на примере уравнения Лапласа в полупространстве (см., напр., [1], [2]) хорошо видно, что некоторые задачи в полупространстве корректны и для стационарных уравнений, причем выделенная указанным выше образом *пространственная* переменная приобретает так называемые *времениподобные* свойства. Действительно, задача

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

т.е. задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве и задача Коши (с тем же самым краевым условием) для уравнения теплопроводности

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} - u_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \tag{1.3}$$

обладают следующим принципиальным сходством: обе задачи корректны в классе ограниченных решений и решение каждой из этих задач представляется в виде свертки краевой функции u_0 с ядром Пуассона, которое для задачи (1.2), (1.3) равно

$$\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4y}}}{(2\sqrt{\pi y})^n},$$

а для задачи (1.1)–(1.2) равно

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{1.4}$$

Таким образом, решение (эллиптической) задачи (1.1)–(1.2) во многом ведет себя подобно решению эволюционной задачи — так, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством по (пространственной) переменной y, и, более того, справедлив тот же самый критерий Репникова – Эйдельмана стабилизации решения (при $y \to +\infty$), что и для случая задачи Коши для уравнения теплопроводности (см. [3]). Это и дает основания характеризовать пространственную переменную y как времениподобную, причем эта времениподобность порождена именно анизотропией области, в которой ставится задача: рассматриваемое уравнение является эллиптическим (а значит, ни одна из независимых переменных не выделяется относительно других), но, исследуя его в анизотропной области, мы тем самым выделяем (по крайней мере) одну независимую переменную (в данном случае — единственную, которая изменяется не на всей оси, а на полуоси), что оказывает влияние и на качественные свойства решения.

Вызывает естественный интерес вопрос, насколько общим является описанное выше явление, и в настоящей работе задача Дирихле в полупространстве исследуется для эллиптических *дифференциально-разностных* уравнений, т.е. уравнений, в которых на неизвестную функцию, помимо дифференциальных операторов, действуют операторы сдвига.

Такие функционально-дифференциальные уравнения в настоящее время активно исследуются во всем мире (см., напр., [4] и имеющуюся там библиографию), что обусловлено их многочисленными приложениями, не покрываемыми классическими моделями математической физики (см., напр., [5]–[8] и имеющуюся там библиографию). Глубокое и полное изложение теории задач в ограниченных областях для эллиптических дифференциально-разностных уравнений (а также тесно связанных с ними нелокальных задач для *дифференциальных* эллиптических уравнений) можно найти в [8]–[11] (см. также имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях исследованы в значительно меньшей степени.

В настоящей работе рассматривается случай, в котором дифференциально-разностное уравнение содержит суперпозицию дифференциального и разностного операторов. А именно, в полупространстве $\Big\{(x,y)\Big| x\in\mathbb{R}^n, y>0\Big\}$ рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,y)+u_{yy}(x,y)+\sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_jx_j}(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\dots,x_n,y)=0, \qquad (1.5)$$

где

$$a_0:=\max_{j=\overline{1,n}}|a_j|<1, \qquad (1.6)$$

а $h_1,\dots,h_n$ — произвольные вещественные параметры.

Модельное уравнение, содержащее оператор сдвига только по одной пространственной переменной (т.е. уравнение (1.5), в котором $a_2=\dots=a_n=0$), рассмотрено в [12]. В настоящей работе рассматривается более общий случай, в котором оператор сдвига (так же, как и вторая производная) действует по каждой из пространственноподобных переменных.

Для двумерного случая (когда переменная x — скалярная), эта задача исследовалась в [13]–[16]. Многомерный случай, насколько известно автору, рассматривается впервые.

2. Операционная схема

Будем использовать классическую операционную схему Гельфанда – Шилова (см., напр., [17, §10]): к задаче (1.2), (1.5) применим (формально) преобразование Фурье по (n-мерной) переменной x:

$$\hat f(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx.$$

Это приводит к следующей начальной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dy^2}=\left(|\xi|^2+\sum_{j=1}^{n}a_j\xi_j^2\cos h_j\xi_j+i\sum_{j=1}^{n}a_j\xi_j^2\sin h_j\xi_j\right)\widehat{u},\quad y\in(0,+\infty), \qquad (2.1)$$

$$\widehat{u}(0;\xi)=\widehat{u_0}(\xi). \qquad (2.2)$$

Отметим, что полученная задача не является задачей Коши, поскольку уравнение имеет второй порядок, а начальное условие только одно.

Обозначая $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\xi_j^2\cos h_j\xi_j$ через $a(\xi)$, а $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\xi_j^2\sin h_j\xi_j$ через $b(\xi)$, получаем уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dy^2}=\big(|\xi|^2+a(\xi)+ib(\xi)\big)\widehat{u}.$$

Итак, (2.1) — это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее от n-мерного параметра ξ, характеристическое уравнение которого имеет два корня $\pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, где

$$\rho = \rho(\xi) = \left(\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad \theta = \theta(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)}.$$

Решаем задачу (2.1)–(2.2), подходящим образом выбираем «свободную» произвольную постоянную (она появляется за счет того, что количество начальных условий меньше порядка уравнения) и к полученному решению

$$\widehat{u_0}(\xi)e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi)]}$$

применяем (формально) обратное преобразование Фурье

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi - y\rho(\xi)(\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi))}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)e^{iz\cdot\xi}dzd\xi \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-z)\cdot\xi - y\rho(\xi)(\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi))}d\xi dz \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i((x-z)\cdot\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi))}e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}d\xi dz \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \cos((x-z)\cdot\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi))e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}d\xi dz \\
&\qquad+\frac{i}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sin((x-z)\cdot\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi))e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}d\xi dz.
\end{aligned}$$

Учитывая нечетность функции $b(\xi)$ по каждой переменной ξ_j, получаем в итоге функцию

$$u(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x-\xi, y)u_0(\xi)d\xi, \tag{2.3}$$

где

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right)d\xi, \tag{2.4}$$

$$G_1(\xi) = \rho(\xi)\cos\theta(\xi), \quad G_2(\xi) = \rho(\xi)\sin\theta(\xi). \tag{2.5}$$

Поскольку значения арктангенса лежат в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, имеем неравенство $|\theta(\xi)| \leqslant \frac{\pi}{4}$, т.е. $\cos\theta(\xi) > 0$ и $\cos 2\theta(\xi) \geqslant 0$. Значит, $\cos\theta(\xi)$ можно представить в виде $\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta(\xi)}{2}}$. Теперь применим формулу

$$\cos^2 2\theta(\xi) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}$$

и снова учтем неотрицательность $\cos 2\theta(\xi)$. Получим, что

$$\cos 2\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}}.$$

Далее, поскольку

$$2\theta(\xi) = \operatorname{arctg} \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)},$$

справедливо равенство

$$\operatorname{tg} 2\theta(\xi) = \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)},$$

а значит,

$$\cos 2\theta(\xi) = \left(1 + \frac{b^2(\xi)}{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2}{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)}} = \frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\sqrt{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)}},$$

поскольку условие (1.6) гарантирует неотрицательность функции $|\xi|^2 + a(\xi)$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\cos\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\sqrt{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем в $\mathbb{R}^n$ функцию

$$\varphi(\xi) := \sqrt{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)} = \sqrt{|\xi|^4 + a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi)|\xi|^2}\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_1(\xi) =& \sqrt{\varphi(\xi)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\sqrt{\left(|\xi|^2 + a(\xi)\right)^2 + b^2(\xi)}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ =& \sqrt{\varphi(\xi)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varphi(\xi) + |\xi|^2 + a(\xi)}{\varphi(\xi)}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varphi(\xi) + |\xi|^2 + a(\xi)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\xi|^2 + a(\xi)} \end{aligned}$$

(в силу неотрицательности функции φ). Следовательно, функция $G_1(\xi)$ ограничена снизу выражением

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\xi|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j| \xi_j^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\xi|^2 - a_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\xi|^2 (1 - a_0)} = \sqrt{\frac{1 - a_0}{2}} |\xi|,$$

что гарантирует корректность определения функции (2.4) в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Отметим, что, применяя в настоящем разделе прямое и обратное преобразования Фурье, мы, в соответствии с общей схемой [17, §10], не заботились об обосновании сходимости интегралов и законности перемены порядка интегрирования, поскольку речь шла о решениях в смысле обобщенных функций. В лемме 3.1 (см. следующий раздел) речь идет о гладких функциях, но она доказывается самостоятельно.

3. Построение ядра Пуассона

Будем называть функцию $u(x,y)$ *классическим решением* уравнения (1.5), если в каждой точке полупространства $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ существуют классические (т.е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей) производные $u_{x_jx_j}$, $j=\overline{1,n}$, и u_{yy} и в каждой точке указанного полупространства выполняется соотношение (1.5).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Функция* (2.4) *является классическим решением уравнения* (1.5) *в полупространстве* $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$.

Доказательство. Подставим функцию $(2\pi)^n\mathcal{E}$ в уравнение (1.5):

$$(2\pi)^n\mathcal{E}_{x_jx_j}(x,y)=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_j^2e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi,\quad j=\overline{1,n};$$

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\mathcal{E}_{y}(x,y)&=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&\quad+\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\mathcal{E}_{yy}(x,y)&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&\quad-\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&\quad-\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&\quad-\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_2^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi\\&\quad-2\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left(x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right)d\xi.\end{aligned}$$

Отметим, что во всех этих случаях дифференцирование под знаком интеграла является законным, потому что возникающие в результате подынтегральные множители не имеют особенностей, а их рост по ξ — не более, чем полиномиальный.

Далее, используя (2.5), получаем, что

$$\begin{aligned}2G_1(\xi)G_2(\xi)&=2\rho(\xi)\cos\theta(\xi)\rho(\xi)\sin\theta(\xi)=\rho^2(\xi)\sin2\theta(\xi)\\&=\rho^2(\xi)\operatorname{tg}2\theta(\xi)\cos2\theta(\xi)\rho^2(\xi)\frac{b(\xi)}{|\xi|^2+a(\xi)}\cos2\theta(\xi)\\&=\rho^2(\xi)\frac{b(\xi)}{|\xi|^2+a(\xi)}\frac{|\xi|^2+a(\xi)}{\sqrt{\left(|\xi|^2+a(\xi)\right)^2+b^2(\xi)}}=b(\xi).\end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)\Big[\cos^2\theta(\xi) - \sin^2\theta(\xi)\Big] = \rho^2(\xi)\cos 2\theta(\xi)$$
$$= \varphi(\xi)\frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\varphi(\xi)} = |\xi|^2 + a(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$(2\pi)^n \mathcal{E}_{yy}(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(|\xi|^2 + a(\xi)\big)\, e^{-yG_1(\xi)} \cos\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right) d\xi$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right) d\xi,$$

а потому

$$(2\pi)^n \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_{x_jx_j}(x,y) + (2\pi)^n \mathcal{E}_{yy}(x,y)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \Bigg(a(\xi)\cos\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right) - b(\xi)\sin\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right)\Bigg) d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j^2 \cos h_j\xi_j \cos\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right)$$
$$- \sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j^2 \sin h_j\xi_j \sin\left(x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right)\Bigg) d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j^2 \cos\left(x\cdot\xi + h_j\xi_j - yG_2(\xi)\right) d\xi$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos\left((x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\ldots,x_n)\cdot\xi - yG_2(\xi)\right) d\xi$$
$$= -\,(2\pi)^n \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{E}_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,y).$$

□

Замечание 3.1. *Если положить* $a_1 = \cdots = a_n = 0$*, т.е. рассмотреть классическое дифференциальное уравнение вместо дифференциально-разностного, то формула* (2.4) *даст известное ядро Пуассона* (1.4) *для задачи Дирихле в полупространстве для уравнения Лапласа.*

4. Свертка с суммируемыми функциями

Теперь найдем мажоранту самой функции $\mathcal{E}(x,y)$, а также ее производных произвольного порядка. Для этого достаточно учесть, что дифференцирование этой функции по любой переменной приводит к появлению в подынтегральной функции в (2.4) множителей вида $G_j(\xi)$, $j = 1, 2$, оцениваемых сверху по абсолютной величине функцией $const|\xi|$, и использовать оценку $G_1(\xi) \geqslant \sqrt{\frac{1-a_0}{2}}|\xi|$, полученную в параграфе 2. Получаем, что

$$\begin{aligned} |\nabla^m \mathcal{E}(x,y)| &\leqslant \frac{C(m)}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-y|\xi|\sqrt{\frac{1-|a_0|}{2}}} d\xi = \frac{2^{\frac{m-n}{2}} C(m)}{\pi^n (1-|a_0|)^{\frac{m+n}{2}} y^{m+n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\eta|^m e^{-|\eta|} d\eta \\ &= \frac{const}{y^{m+n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{m+n-1} e^{-\rho} d\rho = \frac{const}{y^{m+n}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где константа зависит только m, n и a_0.

Теорема 4.1. *Если $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то функция* (2.3) *является классическим бесконечно дифференцируемым решением уравнения* (1.5) *в* $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$. *Это решение принимает граничное значение u_0 при $y = 0$ в смысле обобщенных функций.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 3.1 и оценки (4.1). Второе утверждение доказывается так же, как в [12, Замечание 2]. А именно, краевая задача понимается в смысле Гельфанда – Шилова (см. [17, §10]), решение ищется в классе обобщенных функций n-мерной переменной x, зависящих от вещественного параметра y, дважды дифференцируемых по этому параметру на положительной полуоси и непрерывных по нему в нуле (см., например, [18, §9, п. 5]). Таким образом, вне граничной гиперплоскости построенное решение является гладким (классическим), при этом краевое условие (1.2) понимается как предельное соотношение $u(\cdot, y) \to u_0$ в топологии обобщенных функций переменной x при стремящемся к нулю справа вещественном параметре y. □

Из найденной в данном разделе оценки ядра Пуассона и его производных легко выводится следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Если $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то решение* (2.3) *и любая его производная стремятся к нулю при $y \to +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ и ограничена сверху по абсолютной величине функцией $C(m,n)\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\, y^{-m-n}$, где m — порядок производной.*

Благодарности

Автор выражает благодарность участникам Второй Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа — 2020» за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие лучшему пониманию полученных результатов, их дальнейшему развитию и улучшению их изложения.

Автор глубоко признателен А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.M. Stein, G. Weiss. *On the theory of harmonic functions of several variables. I: The theory of H^p spaces* // Acta Math. **103**:1-2, 25–62 (1960).
2. E.M. Stein. *On the theory of harmonic functions of several variables. II: Behavior near the boundary* // Acta Math. **106**:3-4, 137–174 (1961).
3. V. Denisov, A. Muravnik. *On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations* // Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. **9**, 88–93 (2003).
4. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Усп. матем. наук. **71**:5, 3–112 (2016).

5. M.A. Vorontsov, N.G. Iroshnikov, R.L. Abernathy. *Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation* // Chaos, Solitons, and Fractals. **4**:8-9, 1701–1716 (1994).
6. А.Л. Скубачевский. *О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения* // Дифф. уравн. **34**:10, 1394–1401 (1998).
7. A.L. Skubachevskii. *Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics* // Nonl. Anal. **32**:2, 261–278 (1998).
8. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications.* Birkhäuser, Basel. 1997.
9. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // Совр. матем. фунд. напр. **26**, 3–132 (2007).
10. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. II* // Совр. матем. фунд. напр. **33**, 3–179 (2009).
11. П.Л. Гуревич. *Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера* // Совр. матем. фунд. напр. **38**, 3–173 (2010).
12. А.Б. Муравник, *Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве* // Матем. заметки. **108**:5, 764–770 (2020).
13. А.Б. Муравник. *О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений* // Совр. матем. фунд. напр. **60**, 102–113 (2016).
14. А.Б. Муравник. *Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений* // Матем. заметки. **100**:4, 566–576 (2016).
15. A.B. Muravnik. *On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms* // Math. Model. Nat. Phenom. **12**:6, 130–143 (2017).
16. А.Б. Муравник. *Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач* // Совр. матем. фунд. напр. **63**:4, 678–688 (2017).
17. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Усп. матем. наук. **8**:6, 3–54 (1953).
18. Г.Е. Шилов. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука. 1965.

Андрей Борисович Муравник,
АО «Концерн «Созвездие»,
ул. Плехановская, 14,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: amuravnik@yandex.ru