ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 97-106.

УДК 517.929

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В.П. МАКСИМОВ

Аннотация. Рассматриваются динамические модели с последействием в форме функционально-дифференциальных уравнений с непрерывным и дискретным временем. Приводится постановка общей задачи управления относительно заданной системы целевых функционалов и дается краткая сводка известных результатов о разрешимости этой задачи при полиэдральных точечных ограничениях на управление. В заключительном разделе представлены результаты об оценке множества достижимости при интегральных ограничениях на управление. Предлагаемый вариант синтеза непрерывных и дискретных систем основан на систематическом использовании теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения и обладает определенными преимуществами при исследовании систем и процессов с последействием. Непрерывно-дискретные функционально-дифференциальные модели позволяют учитывать при моделировании эффекты последействия, включая случаи полной памяти, и эффекты, возникающие при учете импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению фазового состояния по компонентам с непрерывным временем.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные системы, задачи управления, гибридные системы, множества достижимости.

Mathematics Subject Classification: 34K05, 34K30, 34K35, 93B03, 93C23

1. Введение

Актуальные прикладные задачи, возникающие в различных сферах приложений, включая задачи анализа, синтеза и управления для реальных технических и социально-экономических систем, постоянно предлагают все новые и новые виды математических моделей с обыкновенными производными. К ним относятся динамические модели, содержащие одновременно фазовые переменные и уравнения как с непрерывным, так и с дискретным временем (такие модели и соответствующие системы часто называют гибридными). Интерес исследователей к различным классам гибридных моделей постоянно возрастает в течение последних 15 лет. Ограничимся здесь упоминанием известных работ российских и зарубежных авторов (см. [3], [5]–[8], [13]–[15], [19], [20], [23], [24], [27]–[30], [35]). Следует отметить, что стремление предложить единую и универсальную точку зрения на дифференциальные уравнения и уравнения в конечных разностях привело к созданию теории динамических уравнений на временных шкалах (см., например, работы [4], [16]–[18], [22]).

Несмотря на обилие отдельных результатов, общая и относительно полная теория гибридных систем достаточно общего вида в настоящее время отсутствует. В предлагаемой статье обсуждается вариант синтеза непрерывных и дискретных систем, основанный на

V.P. Maksimov, Continuous-discrete dynamic models.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00332.

Поступила 15 февраля 2021 г.

теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ) [21] и обладающий определенными преимуществами при исследовании систем и процессов с последействием. Непрерывно-дискретные функционально-дифференциальные модели позволяют в достаточной для реальных приложений мере охватить эффекты последействия, включая случаи полной памяти, и эффекты, возникающие при учете импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению фазового состояния по компонентам с непрерывным временем. Один из основных аспектов этой проблемы - возможность, необходимость и целесообразность использования в полной мере результатов, отдельно полученных к настоящему времени для функционально-дифференциальных систем и систем разностных уравнений. Отметим, что за редким исключением в работах, имеющих отношение к гибридным системам, соответствующая подсистема с непрерывным временем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В отличие от этих работ, рассматриваемые здесь модели охватывают весьма общий случай дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с последействием, включая системы с импульсными воздействиями.

2. Непрерывно-дискретные модели с последействием

Для описания рассматриваемого класса моделей введем основные пространства. Зафиксируем конечный отрезок $[0,T] \subset R$. Через $L^n = L^n[0,T]$ обозначим пространство суммируемых функций $v : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|v\|_{L^n} = \int_0^T |v(s)|_n \, ds,$$

где $|\cdot|_n$ ($|\cdot|$, если размерность пространства значений ясна из контекста) – норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Символом $L_2^r = L_2^r[0,T]$ обозначаем пространство квадратично суммируемых функций $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_0^T u'(s)v(s)\, ds,$$

где $(\cdot)'$ – символ транспонирования.

Зададим множество $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$, и определим пространство $PAC^n(m) = PAC^n[0,\tau_1,\dots,\tau_m,T]$ (см. [1]), как пространство кусочно абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) \;=\; \int_0^t v(s)\, ds \;+\; x(0) \;+\; \sum_{k=1}^m \chi_{[\tau_k,T]}(t)\Delta x(\tau_k),$$

где $v \in L^n$, $\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)$, $\chi_{[\tau_k,T]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[\tau_k, T]$:

$$\chi_{[\tau_k,T]}(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in [\tau_k,T], \qquad \chi_{[\tau_k,T]}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin [\tau_k,T].$$

Таким образом, элементы пространства $PAC^n(m)$ – функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,\tau_1)$, $[\tau_1,\tau_2)$, …, $[\tau_m,T]$, непрерывные справа в точках τ_1, …, τ_m. После введения нормы

$$\|x\|_{PAC^n(m)} = \|\dot{x}\|_{L^n} \;+\; |x(0)|_n \;+\; \sum_{k=1}^m |\Delta x(\tau_k)|_n$$

пространство $PAC^n(m)$ становится банаховым и изометрически изоморфным прямому произведению $L^n \times \mathbb{R}^{n+nm}$.

Пространство $AC^n = AC^n[0,T]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{AC^n} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n.$$

Отметим, что пространство $PAC^n(m)$ является конечномерным расширением пространства AC^n. При этом скачки $\Delta x(\tau_k)$ элементов из $PAC^n(m)$ можно интерпретировать как результат импульсного воздействия на элементы пространства AC^n, подробное описание такой интерпретации можно найти в [1].

Зафиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = T$. Через $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$ обозначим пространство функций $z : J \to \mathbb{R}^\nu$ с нормой

$$\|z\|_{FD^\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu.$$

Ниже мы используем символ z для элементов пространства FD^ν, имея в виду $z = col(z(t_0), \ldots, z(t_\mu))$, и вводим символ $\rho z = col(z(t_1), \ldots, z(t_\mu))$. Пространство всех $\rho z, z \in FD^\nu$, погруженное в $FD^\nu(\mu)$: $\rho z \to col(0, z(t_1), \ldots, z(t_\mu)) \in FD^\nu$, будем обозначать символом FD^ν_1.

В описании непрерывно-дискретных моделей будем следовать работе [26].

Общий случай линейной импульсной непрерывно-дискретной модели запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + f, \\ \rho z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + g, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где линейные ограниченные вольтерровы операторы $\mathcal{T}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, действуют следующим образом:

$$\mathcal{T}_{11} : PAC^n \to L^n, \qquad \mathcal{T}_{12} : FD^\nu \to L^n, \qquad \mathcal{T}_{21} : PAC^n \to FD^\nu, \qquad \mathcal{T}_{22} : FD^\nu \to FD^\nu.$$

Напомним, что линейный оператор $V : X \to Y$, где X и Y – линейные пространства измеримых на $[0,T]$ вектор-функций, называется вольтерровым, если для любого $\tau \in (0,T)$ и любого $x \in X$, такого что $x(t) = 0$ на $[0,\tau]$, выполняется равенство $(Vx)(t) = 0$ на $[0,\tau]$. В случае вольтерровости операторов $\mathcal{T}_{ij}$ система (2.1) относится к динамическим моделям с последействием.

Используемое представление этих операторов дается ниже. Наряду с моделью (2.1) мы будем рассматривать и ее сужение, соответствующее случаю, когда фазовое пространство PAC^n компоненты x с непрерывным временем заменяется пространством AC^n. В таком случае импульсное воздействие отсутствует (все $\Delta x(\tau_k)$ равны нулю). При ссылке на такую модель будем дополнительно использовать звездочку: (2.1)*.

Система (2.1) является частным случаем абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ) [21], [1]. Напомним определение АФДУ. Пусть D и B – банаховы пространства, причем D изоморфно прямому произведению $B \times \mathbb{R}^p$ (кратко $D = B \times \mathbb{R}^p$). Уравнение

$$\mathcal{L}y = \varphi \tag{2.2}$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : D \to B$ называется линейным АФДУ. Теория уравнения (2.2) систематически изложена в [21], [1]. Зафиксируем изоморфизм $J = \{\nabla, \Upsilon\} : B \times \mathbb{R}^p \to D$ и обозначим через $J^{-1} = [\delta, r]$ обратное отображение. Здесь $\nabla : B \to D$, $\Upsilon : \mathbb{R}^n \to D$ и $\delta : D \to B$, $r : D \to \mathbb{R}^n$ – соответствующие компоненты операторов J и J^{-1}:

$$J\{v,\alpha\} = \nabla v + \Upsilon\alpha \in D, \qquad v \in B, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p,$$
$$J^{-1}y = \{\delta y, ry\} \in B \times \mathbb{R}^p, \qquad y \in D.$$

Система

$$\delta y = v, \quad ry = \alpha \tag{2.3}$$

называется главной краевой задачей. Для любого $\{v,\alpha\} \in B \times \mathbb{R}^p$ элемент

$$y = \nabla v + \Upsilon\alpha \tag{2.4}$$

является решением задачи (2.3). Представление (2.4) дает представление оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}(\nabla v + \Upsilon\alpha) = \mathcal{L}\nabla v + \mathcal{L}\Upsilon Y\alpha = Qv + A\alpha,$$

где $Q : B \to B$ – так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$ и конечномерный оператор $A : \mathbb{R}^p \to D$ определяются равенствами $Q = \mathcal{L}\nabla$ и $A = \mathcal{L}\Upsilon$. Общая теория уравнения (2.2) построена в предположении, что оператор Q является фредгольмовым (т.е. предствим в виде суммы обратимого и вполне непрерывного операторов).

С точки зрения теории АФДУ, система (2.1) может быть записана в виде уравнения (2.2) с оператором $\mathcal{L}$, определенным равенством

$$\mathcal{L}y = \begin{pmatrix} \dot{x} - \mathcal{T}_{11}x - \mathcal{T}_{12}z \\ \rho z - \mathcal{T}_{21}x - \mathcal{T}_{22}z \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $y = col(x,z) \in PAC^n \times FD^\nu$. В этом случае $D = B \times Z$, $B = L^n \times FD_1^\nu$ и $Z = \mathbb{R}^{n+nm} \times \mathbb{R}^\nu$. Заметим также, что операторы δ и r здесь определены равенствами

$$\delta y = col(\dot{x}, \rho z), \qquad ry = col(x(0), \Delta x(\tau_1), \dots, \Delta x(\tau_m), z(0)).$$

Для определения главной части $Q : B \to B$ введем операторы

$$V : L^n \to AC^n, \qquad U : FD_1^\nu \to FD^\nu$$

по формулам

$$(V\mathrm{v})(t) = \int\limits_0^t \mathrm{v}(s)\,ds, \qquad Uv = col(0,v).$$

Таким образом, приходим к представлению

$$Q\begin{pmatrix} \mathrm{v} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{v} - \mathcal{T}_{11}V\mathrm{v} - \mathcal{T}_{12}Uv \\ v - \mathcal{T}_{21}V\mathrm{v} - \mathcal{T}_{22}Uv \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Во всех рассматриваемых далее случаях фредгольмовость оператора Q следует из его обратимости. Общая теория АФДУ дает ответ на принципиальные вопросы о структуре общего решения уравнения (2.1), размерности пространства решений однородного уравнения ($f = 0$, $g = 0$), критериях однозначной разрешимости общих краевых задач. Это дает возможность при изучении непрерывно-дискретных ФДУ сосредоточиться на детальном исследовании актуальных задач, имеющих, в том числе, прикладное значение, используя при этом специфику этого класса динамических моделей. В настоящей работе мы ограничимся результатами исследования задач управления.

3. Задачи управления

Для формулировки общей задачи управления введем в систему (2.1) управляющие воздействия:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu + f, \\ \rho z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + Gu + g, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $F : L_2^r \to L^n$, $G : L_2^r \to FD^\nu$ – линейные ограниченные вольтерровы операторы, и определим операторы $\mathcal{T}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, равенствами:

$$(\mathcal{T}_{11}x)(t) = \int_0^t K^1(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A_0^1(t)x(0) + \sum_{k=1}^m A_k^1(t)\Delta x(\tau_k), \quad t \in [0,T],$$

где элементы $k_{ij}^1(t,s)$ ядра $K^1(t,s)$ измеримы на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и имеют общую суммируемую на $[0,T]$ мажоранту $\kappa(t)$:

$$|k_{ij}^1(t,s)| \leqslant \kappa(t), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

а $(n \times n)$-матрицы $A_0^1, \ldots, A_m^1$ имеют суммируемые на $[0,T]$ элементы;

$$(\mathcal{T}_{12}z)(t) = \sum_{\{j: t_j < t\}} B_j^1(t)z(t_j), \quad t \in [0,T],$$

где элементы матриц B_j^1, $j = 0, \ldots, \mu$, суммируемы на $[0,T]$ (как обычно, здесь и ниже $\sum_{i=k}^l P_i = 0$ для любых P_i, если $l < k$);

$$(\mathcal{T}_{21}x)(t_i) = \int_0^{t_{i-1}} K_i^2(s)\dot{x}(s)ds + A_{i0}^2 x(0) + \sum_{k:\tau_k < t_i} A_{ik}^2 \Delta x(\tau_k), \quad i = 1, \ldots, \mu,$$

где элементы матриц K_i^2 измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$, $(\nu \times n)$-матрицы A_{ik}^2, $i = 1, \ldots, \mu$, $k = 1, \ldots, m$; – постоянные $(\nu \times n)$-матрицы;

$$(\mathcal{T}_{22}z)(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}^2 z(t_j), \quad i = 1, \ldots, \mu,$$

где B_{ij}^2 – постоянные $(\nu \times \nu)$-матрицы.

Начальное состояние системы управления считается заданным:

$$x(0) = \alpha, \qquad z(0) = \delta. \tag{3.2}$$

Цель управления задается равенством

$$\ell y = \ell \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}^N, \tag{3.3}$$

где $\ell : PAC^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to \mathbb{R}^N$ – линейный ограниченный вектор-функционал. Напомним представление такого вектор-функционала:

$$\ell \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k \Delta x(\tau_k) + \sum_{j=0}^\mu \Gamma_j z(t_j).$$

Здесь Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ – постоянные $(N \times n)$-матрицы, Γ_j, $j = 0, 1, \ldots, \mu$ – постоянные $(N \times \nu)$-матрицы, Φ – $(N \times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0, T]$ элементами. Предполагается, что компоненты $\ell_i : PAC^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, линейно независимы.

Для случая, когда управление $u \in L_2^r$ и импульсное управление, в роли которого выступают скачки $\Delta x(\tau_k)$, $k = 1, \dots, m$, траектории $x \in PAC^n(m)$, не стеснены ограничениями, критерий разрешимости задачи (3.1)–(3.3) в классе программных управлений сформулирован в [26].

В случае полиэдральных точечных ограничений на управление u:

$$\Lambda \cdot u(t) \leqslant \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{N_1}, \quad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

естественным образом возникает задача об описании множества всех таких целевых значений β, для которых задача управления (3.1)–(3.4) разрешима. Упомянутое множество называется множеством достижимости для этой задачи. Отметим, что в большинстве работ о множествах достижимости для управляемых динамических моделей достижимость понимается относительно терминальных значений траектории, а в нашем случае – относительно целевого вектор-функционала ℓ общего вида (ℓ-достижимость). Основные конструкции для построения оценок множеств ℓ-достижимости, основанные на использовании результатов [31] исследования обобщенной проблемы моментов, представлены в работе [32] для случая, когда импульсная составляющая управляющего воздействия отсутствует. Случай с импульсной составляющей рассмотрен в [9]. Все построения, используемые для построения внутренних (нижних по включению) и внешних (верхних по включению) оценок множеств достижимости существенно опираются на представление решения задачи Коши для системы (2.1):

$$y = \mathcal{Y}\begin{pmatrix}\alpha\\ \delta\\ \sigma\end{pmatrix} + \mathcal{C}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Здесь $\mathcal{Y}$ – фундаментальная матрица решений однородной системы, $\mathcal{C} = \begin{pmatrix}\mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12}\\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22}\end{pmatrix}$ – оператор Коши, $\sigma = col(\Delta x(\tau_1), \dots, \Delta x(\tau_m))$. Структура оператора Коши, представление и свойства его компонент исследованы в [33], [10], в работах [11], [34] выделен и изучен класс непрерывно-дискретных моделей с дискретной памятью, для которых оператор Коши строится в явном виде по параметрам модели. В этом классе эффективно решается задача о построении программных управлений, приводящих к заданным достижимым целевым значениям [12]. Приложения непрерывно-дискретных моделей к задачам экономической динамики обсуждаются в [11], [2], [25].

4. Оценка множества достижимости для задачи управления с интегральными ограничениями

Рассмотрим задачу управления $(3.1)^*$–(3.3) с интегральными ограничениями на управление $u \in L_2^r$:

$$\int_0^T \Lambda(t) \cdot u(t)\, dt \leqslant \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{N_1}, \tag{4.1}$$

где $\Lambda(\cdot)$ – $(N_1 \times r)$-матрица, элементы которой суммируемы с квадратом на $[0,T]$. Напомним, что звездочка * в ссылке на систему $(3.1)^*$ означает сужение на пространство AC^n всех операторов, действующих на компоненту x фазового вектора $y = col(x,z)$ (таким образом, здесь мы исключаем импульсную компоненту управления).

Воспользуемся представлением (3.5) и получим выражение для значений целевого вектор-функционала на всех траекториях, порождаемых управлениями $u \in L_2^r$:

$$\ell \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} \left(\mathcal{C}_{11} f + \mathcal{C}_{12} g + \mathcal{C}_{11} F u + \mathcal{C}_{12} G u \right) ds + \Psi_0 \alpha + \Gamma_0 \delta$$
$$+ \Gamma \left(\mathcal{C}_{21} f + \mathcal{C}_{22} g + \mathcal{C}_{21} F u + \mathcal{C}_{22} G u \right),$$

где $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu)$.

Сгруппируем отдельно слагаемые, содержащие управление:

$$\ell \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} \left(\mathcal{C}_{11} F u + \mathcal{C}_{12} G u \right) ds + \Gamma \left(\mathcal{C}_{21} F u + \mathcal{C}_{22} G u \right) + \widetilde{\beta},$$

где

$$\widetilde{\beta} = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} \left(\mathcal{C}_{11} f + \mathcal{C}_{12} g \right) ds + \Gamma \left(\mathcal{C}_{21} f + \mathcal{C}_{22} g \right) + \Psi_0 \alpha + \Gamma_0 \delta \tag{4.2}$$

– сумма слагаемых, не содержащих управляющей переменной и отражающих зависимость от заданного начального состояния системы и от заданных внешних воздействий.

Для дальнейших преобразований воспользуемся представлением компонент оператора Коши, построенного в [33]:

$$(\mathcal{C}_{11} f)(t) = \int_0^t C_{11}(t,s) ds, \qquad (\mathcal{C}_{12} g)(t) = \sum_{l: t_l \leqslant t} \int_0^t C_{12}(t,s) ds g(t_l), \quad t \in [0,T];$$

$$(\mathcal{C}_{21} f)(t_i) = \int_0^{t_i} C_{21}(i,s) f(s) ds, \qquad (\mathcal{C}_{22} g)(t_i) = \sum_{l=1}^{i} C_{i,l} g(t_l), \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Выражения для ядер C_{ij}, $i,j = 1,2$, можно найти в указанной работе. С использованием этих представлений, равенство (3.3), определяющее цель управления, приводится к интегральной форме относительно управления u:

$$\int_0^T M(t) \cdot u(t) \, dt \; = \; \beta \; - \; \widetilde{\beta}, \tag{4.3}$$

где $M(t)$ – $(N \times r)$-матрица (моментная матрица), постоянный вектор $\widetilde{\beta}$ определен равенством (4.2). Таким образом задача управления с интегральными ограничениями на управление сведена к системе

$$\int_0^T M(t) \cdot u(t) dt = (\beta - \widetilde{\beta}) \in \mathbb{R}^N, \qquad \int_0^T \Lambda(t) \cdot u(t) dt \leqslant \gamma \in \mathbb{R}^{N_1}. \tag{4.4}$$

Нижняя по включению оценка множества достижимости основана на следующих конструкциях. Разобьем промежуток $[0,T]$ на частичные промежутки точками $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\mathcal{K}-1}$:

$$0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{\mathcal{K}-1} < T = \vartheta_{\mathcal{K}},$$

и обозначим через $\chi_i(t)$ характеристическую функцию промежутка $(\vartheta_{i-1}, \vartheta_i]$. Класс используемых управлений ограничим кусочно-постоянными управлениями вида

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} d_i \chi_i(t), \tag{4.5}$$

где $d_i \in \mathbb{R}^r$ – постоянные векторы. Определим постоянные $(N \times r)$-матрицы M_i и $(N_1 \times r)$-матрицы Λ_i равенствами

$$M_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} M(t)dt, \qquad \Lambda_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} \Lambda(t)dt.$$

Зафиксируем набор векторов $\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^N$ и для каждого j сформулируем задачу линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \lambda_j' \cdot M_i d_i \to \max, \qquad \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \Lambda_i d_i \leqslant \gamma. \tag{4.6}$$

Пусть $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_{\mathcal{N}_1}}$ – подмножество набора $\{\lambda_j\}$, $j = 1, \ldots, \mathcal{N}$, для каждого элемента которого задача (4.6) имеет решение $\mathcal{D}^{j_k} = (d_1^{j_k}, \ldots, d_{\mathcal{K}}^{j_k})$, $k = j_1, \ldots, j_{\mathcal{N}_1}$. Каждое такое решение при его подстановке в (4.5) определяет программное управление $u^{j_k}(t)$, которое дает достижимое значение целевого вектор-функционала ℓ:

$$\ell \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T M(t) \cdot u^{j_k}(t)\, dt = \rho^{j_k}.$$

Совокупность этих значений (точек в пространстве $\mathbb{R}^N$) позволяет дать внутреннюю оценку множества достижимости.

Теорема 4.1. *Пусть P – множество всех выпуклых комбинаций точек ρ^{j_k}, $k = j_1, \ldots, j_{\mathcal{N}_1}$. Тогда любое значение $\beta \in \mathbb{R}^N$, такое, что точка $\rho = \beta - \widetilde{\beta}$, где постоянный вектор $\widetilde{\beta}$ определен равенством* (4.2), *принадлежит множеству P, является достижимым значением целевого вектор-функционала ℓ в задаче* (3.1)*–(3.3), (4.1).

Доказательство. Каждое управление $u^{j_k}(t)$ удовлетворяет интегральному ограничению (4.1). Этому ограничению удовлетворяет и любое управление

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_1} \omega_k u^{j_k}(t),$$

где

$$\omega_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_1} \omega_k = 1.$$

Действительно, из

$$\int_0^T \Lambda(t) u^{j_k}(t)\, dt \leqslant \gamma$$

следует, что

$$\omega_k \int_0^T \Lambda(t) u^{j_k}(t) dt = \int_0^T \Lambda(t) \omega_k u^{j_k}(t) dt \leqslant \omega_k \gamma, \quad k = 1, \ldots, \mathcal{N}_1.$$

Суммируя почленно эти неравенства, получаем

$$\int_0^T \Lambda(t)u(t)dt \leqslant \gamma.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что точке множества P, определяемой фиксированным набором коэффициентов выпуклой комбинации, соответствует программное управление с тем же набором коэффициентов при управлениях $u^{j_k}(t)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, М.: Институт компьютерных исследований. 2002.
2. Д.Л. Андрианов, В.О. Арбузов, С.В. Ивлиев, В.П. Максимов, П.М. Симонов. *Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация* // Вестник Пермского университета. Экономика. **27**:4, 8–32 (2015).
3. В.А. Батурин, Е.В. Гончарова, Н.С. Малтугуева. *Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. 5, 53–61 (2010).
4. Ж.И. Бахтина. *Некоторые вопросы теории динамических моделей на тайм-шкалах* // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. **2**:5-1, 19-22 (2014).
5. А.С. Бортаковский. *Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. 6, 16–33 (2007).
6. А.С. Бортаковский. *Оптимальное и субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных непрерывно-дискретных систем* // Известия РАН. Теория и системы управления. 1, 18–33 (2009).
7. А.С. Бортаковский. *Оптимальное и субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных логико-динамических систем* // Известия РАН. Теория и системы управления. 6, 29–46 (2009).
8. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок. *Оптимальное управление гибридными системами* // Известия РАН. Теория и системы управления. 6, 2-52 (2010).
9. В.П. Максимов. *Достижимые значения целевых функционалов для функционально-дифференциальной системы с импульсным воздействием* // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. **23**:123, 441–447 (2018).
10. В.П. Максимов. *К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием* // Труды института математики и механики УрО РАН. **25**:3, 153–162 (2019).
11. В.П. Максимов. *Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики* // Прикладная математика и вопросы управления. 4, 124–135 (2019).
12. В.П. Максимов. *О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью* // Прикладная математика и вопросы управления. 3, 89–104 (2020).
13. В.М. Марченко, З. Зачкевич. *Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных импульсных систем* // Дифференциальные уравнения. **45**:12, 1775–1786 (2009).
14. В.М. Марченко, О.Н. Поддубная. *Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем с многими запаздываниями* // Докл. РАН. **404**:4, 465–469 (2005).
15. С.А. Минюк, О.А. Панасик. *Критерии управляемости и достижимости линейных алгебро-дифференциальных систем* // Известия РАН. Теория и системы управления. 5, 5–18 (2008).

16. Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина. *О стильесовском залатывании временных шкал* // Матем. заметки.**86**:5, 733–735 (2009).
17. R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan, A. Peterson. *Dynamic equations on time scales: A survey* // Journal of Computational and Applied Mathematics. **141**:1-2, 1–26 (2002).
18. R.P. Agarwal, M. Bohner, A. Boichuk, O. Strakh. *Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales* // Mathematical Methods in the Applied Sciences. **38**:17, 4178-4186 (2015).
19. G. Agranovich. *Observability criteria of linear discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements* // Functional Differential Equations. **16**:1, 35–51 (2009).
20. G. Agranovich. *Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements* // Functional Differential Equations. **18**:1-2, 3–12 (2011).
21. N.V. Azbelev, L.F. Rakhmatullina. *Theory of linear abstract functional-differential equations and applications* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. **8**, 1–102 (1996).
22. M. Bohner, A. Peterson. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Boston: Birkhäuser. 2003.
23. A.S. Bortakovski. *Optimal and suboptimal control for sets of trajectories of deterministic continuous discrete systems* // J. of Computer and Systems Sciences International. **48**:1, 14–29 (2009).
24. M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter. *A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory* // IEEE Transactions on Automatic Control. **43**, 31–45 (1998).
25. E.I. Bravyi, V.P. Maksimov, P.M. Simonov. *Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect* // Mathematics. 8, 1832 (2020).
26. A.L. Chadov, V.P. Maksimov. *Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times* // Functional Differential Equations. **19**:1-2, 49–62 (2012).
27. F. Clarke R. Vinter. *Optimal multiprocesses*// SIAM J. Control Optim. **27**:5, 1072–1091 (1989).
28. M. De la Sen. *On the controller synthesis for linear hybrid systems* // IMA Journal of Math. Control and Information. **18**:4, 503–529 (2001).
29. M. De la Sen. *Identification of a class of hybrid systems* // IMA Journal of Math. Control and Information. **20**:3, 233–261 (2003).
30. A. Ichikava, H. Katayama. *Linear Time Varying Systems and Sampled-Data Systems*, Springer, 2001.
31. M.G. Krein, A.A. Nudel'man. *The Markov moment problem and extremal problems*, New York, AMS. 1977.
32. V.P. Maksimov. *On the ℓ-Attainability Sets of Continuous Discrete Functional Differential Systems* // IFAC PapersOnLine. **51**:32, 310–313 (2018).
33. V.P. Maksimov. *The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components* // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. **29**:1, 40–51 (2019).
34. V.P. Maksimov. *On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory* // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. **30**:3, 385–395 (2020).
35. D. Sworder, J. Boid. *Estimation Problems in Hybrid Systems*, Cambridge University Press, 2000.

Владимир Петрович Максимов,
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Букирева, 15,
614990, г. Пермь, Россия
E-mail: `maksimov@econ.psu.ru`