ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 82-96.

УДК 517.55

О ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ И ЕГО СОПРЯЖЕННОМ

А.В. ЛУЦЕНКО, И.Х. МУСИН

Аннотация. Рассматривается пространство Фреше – Шварца $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области Ω многомерного комплексного пространства и гладких вплоть до границы, с топологией, определяемой счетным семейством норм, построенных с помощью определенного семейства $\mathcal{H}$ раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$. Изучается задача описания сильного сопряженного для этого пространства в терминах преобразования Лапласа функционалов. Интерес к ней связан с исследованиями Б.А. Державца классических проблем теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, А.В. Абанина, С.В. Петрова и К.П. Исаева современных проблем теории абсолютно представляющих систем в различных пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях комплексного пространства, с заданной граничной гладкостью, при решении которых важную роль сыграли полученные ими теоремы типа Пейли – Винера – Шварца. Основная в работе теорема 1.1 утверждает, что преобразование Лапласа линейных непрерывных функционалов устанавливает изоморфизм между сильным сопряженным к рассматриваемому функциональному пространству и некоторым пространством целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, представляющим собой внутренний индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций, и обобщает соответствующий результат второго автора 2020 года. Основу доказательства теоремы составляют схема, предложенная М. Неймарком и Б.А. Тейлором. На основе теоремы 1.1 и теоремы 7.6.11 из монографии Л. Хёрмандера (L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* // North Holland; 3rd edition, 1990) исследована задача о разрешимости систем дифференциальных уравнений с частными производными в $A^m_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Получен аналог теоремы 7.6.13 из монографии Л. Хёрмандера. При этом, как и при установлении теоремы 1.1, по существу использовались свойства преобразования Юнга – Фенхеля функций семейства $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, целые функции.

1. Введение

1. О задаче. Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $A_c(\Omega)$ – пространство функций, голоморфных в Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}$ – замыкании области Ω. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ через $A_c^{(m)}(\Omega)$ обозначим пространство голоморфных в Ω функций f, все частные производные которых $(D^\alpha f)(z) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$ (если $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, то $(D^\alpha f)(z) := f(z)$) до порядка m включительно допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$. Таким образом,

A.V. Lutsenko, I.Kh. Musin, On space of holomorphic functions with boundary smoothness and its dual.

© Луценко А.В., Мусин И.Х. 2021.

Исследование А.В. Луценко выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00168, https://rscf.ru/project/21-11-00168/.

Поступила 8 июня 2021 г.

$A_c^{(0)}(\Omega) = A_c(\Omega)$. Пространство $A_c^{(m)}(\Omega)$ наделим нормой

$$q_m(f) = \sup_{z\in\Omega, |\alpha|\le m} |(D^\alpha f)(z)|.$$

Пусть $A^\infty(\Omega) = \lim\limits_{m\to\infty} pr\ A_c^{(m)}(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^\infty$ – семейство выпуклых функций $h_m : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ с $h_m(0) = 0$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

i_1) $h_m(x) = h_m(|x_1|, \dots, |x_n|), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

i_2) существуют числа $a_m > 0$ такие, что

$$h_m(x) \ge \|x\| \ln(1 + \|x\|) - a_m\|x\| - a_m, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

i_3) $\lim\limits_{x\to\infty} (h_m(x) - h_{m+1}(x)) = +\infty$;

i_4) $\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} (h_{m+1}(\alpha+\beta) - h_m(\alpha)) < \infty$ для $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| = 1$;

i_5) каково бы ни было $p \in \mathbb{N}$ существует число $l = l(m,p) \in \mathbb{N}$ такое что

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \exp(\max_{|\beta|\le p} h_{m+l}(\alpha+\beta) - h_m(\alpha)) < \infty.$$

Определим пространство $A_\mathcal{H}(\Omega)$ функций на Ω, как проективный предел нормированных пространств

$$A_m(\Omega) = \{f \in A^\infty(\Omega) : p_m(f) = \sup_{z\in\Omega,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(z)|}{e^{h_m(\alpha)}} < \infty\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду условия i_3) пространство $A_{m+1}(\Omega)$ непрерывно вложено в $A_m(\Omega)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $A_\mathcal{H}(\Omega)$ – пространство Фреше, непрерывно вложенное в $A^\infty(\Omega)$, и, в силу условия i_4), инвариантное относительно дифференцирования.

Пространства голоморфных функций с граничной гладкостью естественным образом возникают при исследовании многих задач комплексного анализа, теории операторов, теории аппроксимаций [1]–[9].

Ясно, что для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\lambda) = e^{\langle\lambda,z\rangle}$ принадлежит $A^\infty(\Omega)$. Также, $f_z \in A_\mathcal{H}(\Omega)$ (лемма 2.1). Поэтому для любого линейного непрерывного функционала Φ на $A^\infty(\Omega)$ ($A_\mathcal{H}(\Omega)$) в $\mathbb{C}^n$ корректно определена функция $\hat\Phi(z) = \Phi(e^{\langle\lambda,z\rangle})$. Ее называем преобразованием Лапласа функционала Φ.

В данной работе мы изучаем задачу описания сильного сопряженного $A_\mathcal{H}^*(\Omega)$ для пространства $A_\mathcal{H}(\Omega)$ в терминах преобразования Лапласа функционалов. Решение этой задачи позволяет перейти к исследованию в рассматриваемом пространстве классических проблем теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, современных проблем теории абсолютно представляющих систем. Основная в работе теорема 1.1 утверждает, что преобразование Лапласа линейных непрерывных функционалов устанавливает изоморфизм между сильным сопряженным к рассматриваемому функциональному пространству и некоторым пространством целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, представляющим собой внутренний индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций.

Отметим, что задача описания сильного сопряженного для различных пространств голоморфных функций с граничной гладкостью рассматривалась Б.А. Державцом [2], А.В. Абаниным и С.В. Петровым [10], С.В. Петровым [11], К.П. Исаевым [12] и вторым автором данной работы в [5], [13]. В частности, в [13] эта задача изучалась для случая, когда семейство $\mathcal{H}$ состоит из функций h_m, определенных по правилу:

$$h_m : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to h\left(\sum_{j=1}^n |x_j| - m\right) \quad \text{при условии, что} \quad \sum_{j=1}^n |x_j| > m;$$

$h_m(x) = 0$, если $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le m$ $(m \in \mathbb{N})$, где $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ – выпуклая функция с $h(0) = 0$ такая, что:

1) $h(t) = h(|t|),\ t \in \mathbb{R}$;

2) h не убывает на $[0, \infty)$;

3) существует число $a > 0$ такое, что $h(t) \ge t \ln(t+1) - at - a,\ t \ge 0$.

Легко проверить, что в этом конкретном случае условия $i_1) - i_4)$ выполняются. Условие $i_5)$ также выполнено. Действительно, образуем логарифмически выпуклую последовательность $(M_k)_{k=0}^{\infty}$, полагая $M_k = e^{h(k)}$. Известно [13], что для любого натурального числа $s \ge n+1$ ряд $\sum\limits_{|\alpha| \ge 0} \frac{M_{|\alpha|}}{M_{|\alpha|+s}}$ сходится. Далее, для $m, p, l \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \ge m + l$

$$\max_{|\beta| \le p} h_{m+l}(\alpha + \beta) - h_m(\alpha) = h(|\alpha| + p - m - l) - h(|\alpha| - m).$$

Следовательно,

$$\exp(\max_{|\beta| \le p} h_{m+l}(\alpha + \beta) - h_m(\alpha)) = \frac{M_{|\alpha|+p-m-l}}{M_{|\alpha|-m}}.$$

Таким образом, если $l \ge p+n+1$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \exp(\max\limits_{|\beta| \le p} h_{m+l}(\alpha+\beta) - h_m(\alpha))$ сходится.

Отметим еще, что если для каждого $m \in \mathbb{N}$ сужение h_m на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной, то условие $i_5)$ может быть заменено следующим:

$i_5')$ для любых $m, \nu \in \mathbb{N}$ найдется число $l = l(m, \nu) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \exp(h_{m+l}(\alpha + \nu\gamma) - h_m(\alpha)) < \infty,$$

где $\gamma = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Таким образом, рассматриваемая здесь задача – более общая, чем в [13].

2. Обозначения и определения. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Для $u = (u_1, \ldots, u_n),\ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n,$$

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}.$$

Через λ_m обозначим меру Лебега в $\mathbb{C}^m$.

Пространство голоморфных в области $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathcal{O}$ обозначаем $A(\mathcal{O})$.

$A'_{\mathcal{H}}(\Omega)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, $(A^\infty(\Omega))^*$ $(A_c^*(\Omega)$ – сильное сопряженное для пространства $A^\infty(\Omega)$ $(A_c(\Omega))$.

$H_\Omega(z) = \sup\limits_{\lambda \in \Omega} Re\, \langle \lambda, z \rangle,\ z \in \mathbb{C}^n$ – опорная функция области Ω.

Положим $\ln^+ t = \ln t$ для $t > 1$ и $\ln^+ t = 0$ для $0 \le t \le 1$.

$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\}$.

Преобразование Юнга – Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле:

$$g^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Основной результат и организация работы. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_m в $\mathbb{C}^n$ по правилу:

$$\varphi_m(z) = h_m^*(\ln^+ |z_1|, \ldots, \ln^+ |z_n|), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Так как h_m^* – выпуклая функция в $\mathbb{R}^n$ и принимает конечные значения, то функция h_m^* непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, φ_m – непрерывная плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированное пространство

$$P_m = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_m = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{\exp(H_\Omega(z) + \varphi_m(z))} < \infty \right\}.$$

Ясно, что банахово пространство P_m непрерывно вложено в P_{m+1} для каждого $m \in \mathbb{N}$. Через $P_{\mathcal{H}}$ обозначим индуктивный предел пространств P_m.

Теорема 1.1. *Отображение $L : T \in A^*_{\mathcal{H}}(\Omega) \to \hat{T}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ и $P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство теоремы основано на идеях М. Неймарка [14] и Б.А. Тейлора [15] и использует ряд результатов из [5] и [16], приведенных в разделе 3. В разделе 2 установлены некоторые полезные свойства пространств $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$, $P_{\mathcal{H}}$ и семейства функций φ_m. В разделе 4 приведено одно применение теоремы 1.1, относящееся к теории дифференциальных уравнений с частными производными. А именно, установлен аналог теоремы 7.6.13 из [23].

2. Вспомогательные утверждения

Предложение 2.1. *Пусть непрерывная функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $g(0) = 0$ такова, что при некотором $a > 0$*

$$g(x) \geq \|x\| \ln(\|x\| + 1) - a\|x\| - a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ супремум функции $g_x(\xi) = \langle \xi, x\rangle - g(\xi)$ в $\mathbb{R}^n$ достигается в некоторой точке $\xi^* = \xi^*(x)$ такой, что $\|\xi^*\| \leq e^{2a} e^{\|x\|}$.

Доказательство. Отметим вначале, что в силу условия на g

$$0 \leq g^*(x) \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (\|\xi\|(\|x\| - \ln(1 + \|\xi\|) + a) + a), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ супремум функции g_x достигается в некоторой точке $\xi^* = \xi^*(x)$ такой, что $\|\xi^*\| \leq e^{2a} e^{\|x\|}$. Действительно, если предположить, что $\|\xi^*\| > e^{2a} e^{\|x\|}$, то

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (\|\xi\|(\|x\| - \ln(1 + \|\xi\|) + a) + a) &= \|\xi^*\|(\|x\| - \ln(1 + \|\xi^*\|) + a) + a \\ &< -a\|\xi^*\| + a < 0. \end{aligned}$$

Но это противоречит тому, что $g^*(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. □

Предложение 2.2. *Пусть непрерывная функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $g(0) = 0$ такова, что при некотором $a > 0$*

$$g(x) \geq \|x\| \ln(\|x\| + 1) - a\|x\| - a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $b > 0$.

Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|y - x\| \leq be^{-\|x\|}$, имеем

$$|g^*(y) - g^*(x)| \leq be^{2a+b}.$$

Доказательство. Пользуясь предложением 2.1 и его обозначениями, для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|y - x\| \leq be^{-\|x\|}$ имеем

$$\begin{aligned} g^*(y) - g^*(x) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (\langle y, \xi\rangle - g(\xi)) - \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (\langle x, \xi\rangle - g(\xi)) \\ &\leq \langle y, \xi^*(y)\rangle - g(\xi^*(y))) - \langle x, \xi^*(y)\rangle + g(\xi^*(y))) = \langle y - x, \xi^*(y)\rangle \\ &\leq \|y - x\|\|\xi^*(y)\| \leq be^{-\|x\|} e^{2a} e^{\|y\|} \leq be^{2a+b}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} g^*(x) - g^*(y) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(\langle x,\xi\rangle - g(\xi)) - \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(\langle y,\xi\rangle - g(\xi)) \\ &\le \langle x,\xi^*(x)\rangle - g(\xi^*(x)) - \langle y,\xi^*(x)\rangle + g(\xi^*(x)) = \langle x-y,\xi^*(x)\rangle \\ &\le \|x-y\|\|\xi^*(x)\| \le be^{-\|x\|}e^{2a}e^{\|x\|} \le be^{2a+b}. \end{aligned}$$

□

Из предложения 2.2 получаем следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть непрерывная функция $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с $g(0)=0$ такова, что при некотором $a>0$*

$$g(x) \ge \|x\|\ln(\|x\|+1) - a\|x\| - a, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Пусть $b>0$.

Тогда для всех $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y\in\mathbb{R}^n$ таких, что $\|y-x\|\le be^{-(|x_1|+\dots+|x_n|)}$ имеем

$$|g^*(y) - g^*(x)| \le be^{2a+b}.$$

Предложение 2.3. *Пусть непрерывная функция $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с $g(0)=0$ такова, что при некотором $a>0$*

$$g(x) \ge \|x\|\ln(\|x\|+1) - a\|x\| - a, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда для всех $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ таких, что

$$|y_j - x_j| \le \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}, \quad j=1,\dots,n,$$

имеем

$$|g^*(\ln^+|y_1|,\dots,\ln^+|y_n|) - g^*(\ln^+|x_1|,\dots,\ln^+|x_n|)| \le 2ne^{2a+2n}.$$

Доказательство. Пусть точки $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям нашего утверждения. Рассмотрим вначале случай, когда $|x_j|\ge 1$, $|y_j|\ge 1$ для $j\in\{1,\dots,n\}$. Тогда

$$|\ln^+|y_j| - \ln^+|x_j|| = \left|\ln\frac{|y_j|}{|x_j|}\right|.$$

Если $\frac{|y_j|}{|x_j|}\ge 1$, то

$$\left|\ln\frac{|y_j|}{|x_j|}\right| = \ln\frac{|y_j|}{|x_j|} = \ln\left(1+\frac{|y_j|-|x_j|}{|x_j|}\right) \le \frac{|y_j|-|x_j|}{|x_j|} \le \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}. \tag{2.1}$$

Если $\frac{|y_j|}{|x_j|}<1$, то поскольку $|y_j|\ge|x_j| - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}$, получаем, что

$$\ln\frac{|y_j|}{|x_j|} = \ln\left(1+\frac{|y_j|-|x_j|}{|x_j|}\right) \ge \ln\left(1-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\ln\frac{|y_j|}{|x_j|}\right| \le \left|\ln\left(1-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}\right)\right| \le \frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}. \tag{2.2}$$

Таким образом, если $|x_j| \geq 1$, $|y_j| \geq 1$ для $j \in \{1, \ldots, n\}$, то благодаря неравенствам (2.1) и (2.2), имеем

$$|\ln^+ |y_j| - \ln^+ |x_j|| \leq \frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}. \tag{2.3}$$

Теперь рассмотрим второй случай: $|x_j| < 1$ или $|y_j| < 1$ для $j \in \{1, \ldots, n\}$. Для определенности предположим, что $|y_j| < 1$. Тогда

$$|\ln^+ |y_j| - \ln^+ |x_j|| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}\right) \leq \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)}. \tag{2.4}$$

Пользуясь неравенствами (2.3) и (2.4), получим, что

$$\begin{aligned}
&\|(\ln^+ |y_1|, \ldots, \ln^+ |y_n|) - (\ln^+ |x_1|, \ldots, \ln^+ |x_n|)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\ln^+ |y_j| - \ln^+ |x_j|| \leq \frac{2n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|x_k|)} \\
&= 2ne^{-(\ln(1+|x_1|)+\cdots+\ln(1+|x_n|))} \leq 2ne^{-(\ln^+ |x_1|+\cdots+\ln^+ |x_n|)}.
\end{aligned}$$

Теперь согласно следствию 2.1 получим, что

$$|g^*(\ln^+ |y_1|, \ldots, \ln^+ |y_n|) - g^*(\ln^+ |x_1|, \ldots, \ln^+ |x_n|)| \leq 2ne^{2a+2n}.$$

□

Из предложения 2.3 получим следующие следствия.

Следствие 2.2. *Пусть функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Предложения 2.3. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ таковы, что*

$$|\zeta_j - z_j| \leq \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|z_k|)}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$|g^*(\ln^+ |\zeta_1|, \ldots, \ln^+ |\zeta_n|) - g^*(\ln^+ |z_1|, \ldots, \ln^+ |z_n|)| \leq 2ne^{2a+2n}.$$

Следствие 2.3. *Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ таковы, что*

$$|\zeta_j - z_j| \leq \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|z_k|)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_m(\zeta) - \varphi_m(z)| \leq 2ne^{2a_m+2n}.$$

Следствие 2.4. *Пусть $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ таковы, что*

$$\|\zeta - z\| \leq \frac{1}{(1+\|z\|)^n}.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_m(\zeta) - \varphi_m(z)| \leq 2ne^{2a_m+2n}.$$

Предложение 2.4. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $l_m > 0$ такая, что*

$$h^*_{m+n}(x) \geq h^*_m(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j - l_m, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n_+, \qquad Y_\gamma = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_1| \geq 1, \ldots, |y_n| \geq 1\}.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} h^*_{m+n}(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - h_{m+n}(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, y\rangle - h_{m+n}(y)) \\ &\geq \sup_{y \in Y_\gamma} (\langle x, y\rangle - h_{m+n}(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, y+\gamma\rangle - h_{m+n}(y+\gamma)) \\ &= \langle x, \gamma\rangle + \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, y\rangle - h_m(y) + h_m(y) - h_{m+n}(y+\gamma)). \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь условием i_4) на $\mathcal{H}$, при некотором $l_m > 0$ имеем

$$\begin{aligned} h^*_{m+n}(x) &\geq \langle x, \gamma\rangle + \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, y\rangle - h_m(y)) - l_m \\ &= \langle x, \gamma\rangle + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - h_m(y)) - l_m = h^*_m(x) + \langle x, \gamma\rangle - l_m. \end{aligned}$$

□

Следствие 2.5. *Для любого $m \in \mathbb{N}$*

$$\varphi_{m+n}(z) \geq \varphi_m(z) + \sum_{j=1}^{n} \ln^+ |z_j| - l_m, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

где l_m – постоянная из предложения 2.4.

Предложение 2.5. *Пусть числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $S \in A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$*

$$|S(f)| \leq c p_m(f), \quad f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

Тогда функционал S может быть представлен в виде:

$$S(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} S_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega),$$

где $S_\alpha \in A^*_c(\Omega)$, причем для норм $\|S_\alpha\|_{A^*_c(\Omega)}$ функционалов S_α справедливо неравенство: $\|S_\alpha\|_{A^*_c(\Omega)} \leq \dfrac{c}{e^{h_m(\alpha)}}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Доказательство этого предложения проводится по стандартной схеме ([15], предложение 2.11, следствие 2.12) с использованием условия i_3).

Лемма 2.1. *Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\lambda) = \exp(\langle \lambda, z\rangle)$ принадлежит $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, причем для каждого $m \in \mathbb{N}$*

$$p_m(f_z) \leq \exp(H_\Omega(z) + \varphi_m(z)) < \infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(f_z) &= \sup_{\lambda \in \Omega, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{|z^\alpha e^{\langle \lambda, z\rangle}|}{e^{h_m(\alpha)}} = \sup_{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{|z_1|^{\alpha_1} \cdots |z_n|^{\alpha_n}}{e^{h_m(\alpha)}} \cdot e^{H_\Omega(z)} \\ &\leq \exp(H_\Omega(z) + \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+} (\alpha_1 \ln^+ |z_1| + \cdots + \alpha_n \ln^+ |z_n| - h_m(\alpha))) = \exp(H_\Omega(z) + \varphi_m(z)). \end{aligned}$$

Таким образом, $f_z \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ и требуемое неравенство установлено. □

Лемма 2.2. *Для любого $S \in A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ функция $\hat{S} \in P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Для любого функционала $S \in A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ функция $\hat{S}(z) = S(e^{\langle \lambda z \rangle})$ корректно определена в $\mathbb{C}^n$. Пользуясь предложением 2.1 и условием i_5), легко показать, что $\hat{S}$ – целая функция в $\mathbb{C}^n$. Далее, так как найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что $|S(f)| \leqslant c p_m(f)$ для всех $f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, то, пользуясь неравенством (2.5), имеем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant c \exp(H_\Omega(z) + \varphi_m(z)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Следовательно, $\hat{S} \in P_{\mathcal{H}}$. □

3. Описание пространства $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$

3.1. Три вспомогательные теоремы. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$E_m = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : N_m(F) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(H_\Omega(z))} < \infty \right\}.$$

Через E обозначим индуктивный предел пространств E_m.

Теорема 3.1. *Отображение $\mathcal{L} : S \in (A^\infty(\Omega))^* \to \hat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $(A^\infty(\Omega))^*$ и E.*

Теорема 3.1 получена в [5] (см. теорема 1). В предположении C^2-гладкости границы области Ω теорема 3.1 доказана Б.А. Державцом [2].

Следующая теорема будет применяться при доказательстве сюръективности отображения L в теореме 1.1. Она доказана в [13] (см. лемма 6.2).

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{O}$ – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть h – плюрисубгармоническая функция в $\mathcal{O}$ и φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi, \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leqslant \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $f \in H(\mathcal{O})$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathcal{O}} |f(\zeta)|^2 e^{-2(\varphi(\zeta) + h(\zeta))} \, d\lambda_n(\zeta) < \infty.$$

Тогда найдется функция $F \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такая, что $F(\zeta, \zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in \mathcal{O}$ и

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n \times \mathcal{O}} \frac{|F(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi(z) + h(\zeta))}}{(1 + \|(z,\zeta)\|)^{2n(\nu+3)}} \, d\lambda_{2n}(z,\zeta) \leq C \int\limits_{\mathcal{O}} |f(\zeta)|^2 e^{-2(\varphi(\zeta) + h(\zeta))} \, d\lambda_n(\zeta),$$

где положительная постоянная C зависит только от n, ν и φ.

Следующий результат доказан в [13] (лемма 6.4). Он будет применяться при доказательстве инъективности отображения L в теореме 1.1.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{O}$ – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть h – плюрисубгармоническая функция в $\mathcal{O}$ и φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi, \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leqslant \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z,\zeta)| \leqslant e^{\varphi(z) + h(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in \mathcal{O},$$

и $S(\zeta, \zeta) = 0$ для $\zeta \in \mathcal{O}$.

Тогда существуют функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такие, что:

a) $S(z,\zeta)=\sum\limits_{j=1}^{n} S_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j), \quad (z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathcal{O};$

b) при некотором $m>0$*, не зависящем от* S*,*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n\times\mathcal{O}} \frac{|S_j(z,\zeta)|^2}{e^{2(\varphi(z)+h(\zeta)+m\ln(1+\|(z,\zeta)\|))}}\,d\lambda_{2n}(z,\zeta)<\infty, \quad j=1,\dots,n.$$

3.2. Свойства пространств $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ и $P_{\mathcal{H}}$.

Определение 3.1. *([17]) Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств* S_n, $n\in\mathbb{N}$*, относительно линейных непрерывных отображений* $g_{mn}: S_n\to S_m$, $m<n$*, таких, что* $g_{n,n+1}$ *вполне непрерывно для каждого* n*, называется пространством* (M^*)*.*

Предложение 3.1. *Пространство* $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ *– пространство* (M^*)*.*

Доказательство предложения 3.1 такое же, как и доказательство леммы 6 в [5]. Надо лишь в соответствующем месте воспользоваться условием $i_3)$ вместо условия $i_4)$ из [5]. Таким образом, пространство Фреше $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ является пространством Фреше – Шварца [18].

Определение 3.2. *([18], [19]) Пусть* $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *– последовательность банаховых пространств таких, что* E_m *непрерывно вложено в* E_{m+1} *для каждого* $m\in\mathbb{N}$ *и* $E=\cup_{m\in\mathbb{N}}E_m$*. Если для любого* $m\in\mathbb{N}$ *существует* $k>m$ *такое, что вложение* E_m *в* E_k *компактно, то индуктивный предел пространств* $E:=\varinjlim E_m$ *называется* (DFS)*-пространством.*

С помощью теоремы Монтеля и следствия 2.5 легко показать, что вложения

$$j_m: P_m\to P_{m+n}(T_C)$$

компактны для каждого $m\in\mathbb{N}$. Следовательно, $P_{\mathcal{H}}$ – (DFS)-пространство.

Пространство $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$, как сильное сопряженное к пространству Фреше – Шварца $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, является (DFS)-пространством [18], [19].

3.3. Доказательство теоремы 1.1. Согласно лемме 2.2 линейное отображение $L: T\in A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)\to\hat{T}$ действует из $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ в $P_{\mathcal{H}}$.

Отображение L непрерывно. Это показывается точно так же, как и в [5].

Докажем, что отображение L сюръективно. Пусть целая функция $F\in P_{\mathcal{H}}$. Тогда $F\in P_m$ при некотором $m\in\mathbb{N}$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{C}^n}\frac{|F(\zeta)|^2e^{-2H_\Omega(\zeta)+\varphi_m(\zeta))}}{(1+\|\zeta\|)^{2n+1}}\,d\lambda_n(\zeta)<\infty.$$

Отсюда, пользуясь следствием 2.5, получим, что

$$\int_{\mathbb{C}^n}|F(\zeta)|^2e^{-2(H_\Omega(\zeta)+\varphi_{m+n(n+1)}(\zeta))}\,d\lambda_n(\zeta)<\infty.$$

Отметим, что функции H_Ω и $\varphi_{m+n(n+1)}$ плюрисубгармоничны в $\mathbb{C}^n$ и для некоторого $C_\Omega>0$

$$|H_\Omega(u)-H_\Omega(v)|\le C_\Omega,\ u,v\in\mathbb{C}^n:\|u-v\|\le 1. \tag{3.1}$$

Поэтому, применяя теорему 3.2 с $\nu=1$, найдем функцию $\Phi\in H(\mathbb{C}^{2n})$ такую, что $\Phi(z,z)=F(z)$ для $z\in\mathbb{C}^n$ и при некотором $c>0$, не зависящем от F,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2n}} \frac{|\Phi(z,\zeta)|^2 e^{-2(H_K(Im\, z)+\varphi_{m+n(n+1)}(\zeta))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{8n}}\, d\lambda_{2n}(z,\zeta)$$
$$\leq c\int_{\mathbb{C}^n} |F(\zeta)|^2 e^{-2(H_\Omega(\zeta)+\varphi_{m+n(n+1)}(\zeta))}\, d\lambda_n(\zeta).$$

Так как $|\Phi|^2 \in psh(\mathbb{C}^{2n})$, то для любого $R>0$

$$|\Phi(z,\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{2n}(R)} \int\limits_{B_R(z,\zeta)} |\Phi(t,u)|^2\, d\lambda_{2n}(t,u), \quad z,\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n,$$

где $B_R(z,\zeta)$ – замкнутый шар в $\mathbb{C}^{2n}$ радиуса R с центром в точке (z,ζ), $\lambda_{2n}(R)$ – объем шара $B_R(z,\zeta)$. Из этого неравенства, полагая $R=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|)}$ и пользуясь неравенством (3.1) и следствием 2.3, стандартным образом выводим равномерную оценку на $|\Phi(z,\zeta)|$ и получаем при некотором $c_1>0$

$$|\Phi(z,\zeta)| \leqslant c_1(1+\|z\|)^{4n}\prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|)^{6n} e^{H_\Omega(z)+\varphi_{m+n(n+1)}(\zeta)}, \quad (z,\zeta)\in\mathbb{C}^{2n},$$

где $c_1>0$ – некоторая постоянная. Теперь, пользуясь следствием 2.5, получим, что при некотором $c_2>0$

$$|\Phi(z,\zeta)| \leqslant c_2(1+\|z\|)^{4n} e^{H_\Omega(z)+\varphi_{m+7n^2+n}(\zeta)}, \quad (z,\zeta)\in\mathbb{C}^{2n}. \tag{3.2}$$

Разложим $\Phi(z,\zeta)$ в степенной ряд по степеням ζ: $\Phi(z,\zeta)=\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}\Phi_\alpha(z)\zeta^\alpha$. По формуле Коши для любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $r_1>0,\ldots,r_n>0$ имеем

$$C_\alpha(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1|=r_1}\ldots\int_{|\zeta_n|=r_n}\frac{\Phi(z,\zeta)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n+1}}\, d\zeta_1\ldots d\zeta_n, \quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Отсюда следует, что $C_\alpha\in H(\mathbb{C}^n)$. Полагая $\nu=7n^2+n$, пользуясь неравенством (3.2) и неубыванием функции $\varphi_{m+\nu}$ по каждой переменной, имеем

$$|C_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_2(1+\|z\|)^{4n} e^{H_\Omega(z)+\varphi_{m+\nu}(r)}}{r^\alpha}, \quad z\in\mathbb{C}^n,$$

где все компоненты $r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n$ положительны. Следовательно,

$$|C_\alpha(z)| \leq c_2(1+\|z\|)^{4n} e^{H_\Omega(z)}\left(\inf_{r\in\Pi_1}\frac{e^{\varphi_{m+\nu}(r)}}{r^\alpha}\right), \quad z\in\mathbb{C}^n,$$

где $\Pi_1=\{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n : r_1\geq 1,\ldots,r_n\geq 1\}$. Отметим, что

$$\inf_{r\in\Pi_1}\frac{e^{\varphi_{m+\nu}(r)}}{r^\alpha} = e^{\inf\limits_{r\in\Pi_1}(\varphi_{m+\nu}(r)-\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\ln r_j)}$$
$$= e^{-\sup\limits_{\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}_+^n}(\langle\alpha,\xi\rangle-h^*_{m+\nu}(\ln^+(e^{\xi_1}),\ldots,\ln^+(e^{\xi_n}))}$$
$$= e^{-\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n}(\langle\alpha,\xi\rangle-h^*_{m+\nu}(\xi))} = e^{-h_{m+\nu}(\alpha)}.$$

Таким образом, при любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ справедлива оценка

$$|C_\alpha(z)| \leq \frac{c_2(1+\|z\|)^{4n}e^{H_\Omega(z))}}{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}}, \quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Следовательно, множество $\left\{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}C_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в E_{4n}, а значит, и в E. Так как пространства $(A^\infty(\Omega))^*$ и E изоморфны (по теореме 3.1), то найдутся функционалы

$S_\alpha \in (A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\hat{S}_\alpha = C_\alpha$ и множество $\mathcal{A} = \left\{e^{h_{m+\nu}(\alpha)} S_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Отсюда, как и в [13], выводим, что найдутся числа $l \in \mathbb{Z}_+$ и $c_3 > 0$ такие, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|S_\alpha(f)| \le \frac{c_3 q_l(f)}{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}}, \quad f \in A^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

Определим функционал T на $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ по правилу:

$$T(f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} S_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega). \tag{3.4}$$

Покажем, что T – линейный непрерывный функционал на $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Пользуясь неравенством (3.3), для любых $f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$|S_\alpha(D^\alpha f)| \le \frac{c_3 \sup\limits_{z\in\Omega,|\beta|\le l} |(D^{\alpha+\beta} f)(z)|}{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}} \le c_3 p_{m+s}(f) e^{\max\limits_{|\beta|\le l} h_{m+s}(\alpha+\beta)-h_{m+\nu}(\alpha)}.$$

Пользуясь условием i_5), подберем натуральное число $s > \nu$ так, что ряд

$$\sum_{|\alpha|\ge 0} e^{\max\limits_{|\beta|\le l} h_{m+s}(\alpha+\beta)-h_{m+\nu}(\alpha)}$$

сходится. Тогда для любого $f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ ряд в правой части в (3.4) сходится абсолютно. Причем, для выбранного s существует постоянная $c_4 > 0$, не зависящая от $f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, такая, что $|T(f)| \le c_4 p_{m+s}(f)$. Следовательно, линейный функционал T корректно определен и является непрерывным. Очевидно, $\hat{T} = F$. Таким образом, отображение L сюръективно.

Следуя схеме из [15], покажем, что отображение L взаимно однозначно. Действительно, пусть для $T \in A'_{\mathcal{H}}(\Omega)$ имеем $\hat{T} \equiv 0$. Покажем, что $T(f) = 0$ для любого $f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Так как T – линейный непрерывный функционал на $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$, то найдутся числа $m \in \mathbb{N}$, $c_5 > 0$ такие, что

$$|T(f)| \le c_5 p_m(f), \quad f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

Воспользовавшись предложением 2.5, представим функционал T в виде:

$$T(f) = \sum_{|\alpha|\ge 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathcal{H}}(\Omega),$$

где $T_\alpha \in A_c^*(\Omega)$, причем для норм $\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)}$ функционалов T_α имеем

$$\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)} \le \frac{c_5}{e^{h_m(\alpha)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда получаем, что $\hat{T}(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \hat{T}_\alpha(z) z^\alpha$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, причем, для целых функций $\hat{T}_\alpha$ справедлива оценка

$$|\hat{T}_\alpha(z)| \le \frac{c_5 e^{H_\Omega(z)}}{e^{h_m(\alpha)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{3.5}$$

Рассмотрим целую функцию

$$S(u,z) = \sum_{|\alpha|\ge 0} \hat{T}_\alpha(z) u^\alpha, \quad z,u \in \mathbb{C}^n.$$

Отметим, что $S \in H(\mathbb{C}^{2n})$. Пользуясь неравенством (3.5) и условием i_5), имеем

$$|S(u,z)| \le c_5 e^{H_\Omega(z))} \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{|u^\alpha|}{e^{h_m(\alpha)}} \le c_6 e^{H_\Omega(z))+\varphi_{m+l}(u)},$$

где $c_6 = c_5 \sum_{|\alpha|\geq 0} e^{h_{m+l}(\alpha)-h_m(\alpha)}$. При этом $S(z,z)=0$ для любого $z\in\mathbb{C}^n$. Тогда (принимая во внимание неравенство (3.1)) по теореме 3.3 существуют функции $S_1,\dots,S_n\in H(\mathbb{C}^{2n})$ такие, что

$$S(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n} S_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j),\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^n,$$

и при некотором $k\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2n}} \frac{|S_j(z,\zeta)|^2}{e^{2(H_\Omega(z)+\varphi_{m+l}(\zeta)+k\ln(1+\|(z,\zeta)\|))}}\,d\lambda_{2n}(z,\zeta)<\infty,\quad j=1,\dots,n.$$

Из этого интегрального неравенства (как и ранее при получении равномерной оценки $|\Phi(z,\zeta)|$) получим, что при всех $j=1,2,\dots,n$

$$|S_j(z,\zeta)|\leq c_7(1+\|z\|)^k\prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|)^{k+2n}\exp(H_\Omega(z)+\varphi_{m+l}(\zeta)),\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^n,$$

где $c_7>0$ – некоторая постоянная. Отсюда с помощью следствия 2.5 получим, что при некотором $c_8>0$ для всех $j=1,2,\dots,n$

$$|S_j(z,\zeta)|\leq c_8(1+\|z\|)^k\exp(H_\Omega(z)+\varphi_{m+l+n(k+2n)}(\zeta)),\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^n. \tag{3.6}$$

Обозначим $l+n(k+2n)$ через q. Разложим S_j в степенной ряд по степеням ζ:

$$S_j(z,\zeta)=\sum_{|\alpha|\geq 0} S_{j,\alpha}(z)\zeta^\alpha,\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^n,\quad j=1,\dots,n.$$

Из неравенства (3.6) (поступая точно так же, как и при оценке функций C_α) получим, что для любых $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\quad j=1,\dots,n$

$$|S_{j,\alpha}(z)|\leq\frac{c_8(1+\|z\|)^k\exp(H_\Omega(z))}{e^{h_{m+q}(\alpha)}}.$$

По теореме 3.1 существуют функционалы $\psi_{j,\alpha}\in(A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\hat{\psi}_{j,\alpha}=S_{j,\alpha}$. Из предыдущей оценки следует, что множество $\{S_{j,\alpha}e^{h_{m+q}(\alpha)}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,j=1,\dots,n}$ ограничено в E. Следовательно, множество $\Psi=\{e^{h_{m+q}(\alpha)}\psi_{j,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,j=1,\dots,n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Тогда найдутся числа $c_9>0$ и $p\in\mathbb{N}$ такие, что

$$|F(f)|\leq c_9 q_p(f),\quad F\in\Psi,\quad f\in A^\infty(\Omega).$$

Значит, для любого $f\in A^\infty(\Omega)$

$$|\Psi_{j,\alpha}(f)|\leqslant\frac{c_9}{e^{h_{m+q}(\alpha)}}q_p(f),\quad \alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\quad j=1,\dots,n. \tag{3.7}$$

Далее, для $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ с отрицательными компонентами, $j\in\{1,\dots,n\}$ пусть $\Psi_{j,\alpha}$ – нулевой функционал из $(A^\infty(\Omega))^*$, $S_{j,\alpha}$ – тождественно равная нулю функция в $\mathbb{C}^n$. Тогда

$$S(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}(S_{j,\alpha}(z)z_j-S_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)})\zeta^\alpha,\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^n.$$

Таким образом,

$$\hat{T}_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{n}(S_{j,\alpha}(z)z_j-S_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}(z)),\quad \alpha\in\mathbb{Z}^n_+.$$

Другими словами,

$$\hat{T}_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{n}(\Psi_{j,\alpha}(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(e^{\langle\lambda,z\rangle}))-\hat{\Psi}_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(z)),\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Отсюда, пользуясь теоремой 3.1, имеем

$$T_\alpha(f)=\sum_{j=1}^{n}(\Psi_{j,\alpha}(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}f)-\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(f)),\quad f\in A^\infty(\Omega).$$

Поэтому

$$T(f)=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\sum_{j=1}^{n}(\Psi_{j,\alpha}(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\alpha f))-\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(D^\alpha f)),\quad f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

Для $N\in\mathbb{N}$ и $j=1,\dots,n$ определим множества

$$B_N=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n:\alpha_1\leqslant N,\dots,\alpha_n\leqslant N\},$$

$$R_{N,j}=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n:\alpha_1\leqslant N,\dots,\alpha_j=N,\dots,\alpha_n\leqslant N\},$$

определим функционал T_N на $A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ по правилу

$$T_N(f)=\sum_{\alpha\in B_N}\sum_{j=1}^{n}\left(\Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\alpha f)\right)-\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(D^\alpha f)\right).$$

Тогда $T(f)=\lim\limits_{N\to\infty}T_N(f)$, $f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Отметим, что

$$T_N(f)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}\Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\alpha f)\right),\quad f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

Пользуясь по ходу неравенством (3.7), имеем для любых $f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$

$$\begin{aligned}|T_N(f)|&\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}|\Psi_{j,\alpha}(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\alpha f))|\\&\leq c_9\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}\frac{\sup\limits_{\lambda\in\Omega,|\beta|\leq p}|(D^\beta(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\alpha f)))(\lambda)|}{e^{h_{m+q}(\alpha)}}.\end{aligned}$$

Отсюда получим, что при любых $\mu\in\mathbb{N}$ и $f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$ справедлива оценка

$$|T_N(f)|\leq c_9p_\mu(f)\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}e^{\sup\limits_{|\beta|\leq p+1}h_\mu(\alpha+\beta)-h_{m+q}(\alpha)}.$$

Теперь, пользуясь условием i_5), выберем μ так, чтобы сходился ряд

$$\sum_{|\alpha|\geq 0}e^{\sup\limits_{|\beta|\leq p+1}h_\mu(\alpha+\beta)-h_{m+q}(\alpha)}.$$

Тогда

$$|T_N(f)|\leq nc_9p_\mu(f)\sum_{|\alpha|\geq N}e^{\sup\limits_{|\beta|\leq p+1}h_\mu(\alpha+\beta)-h_{m+q}(\alpha)}.$$

Отсюда следует, что $T_N(f)\to 0$ при $N\to\infty$. Таким образом, $T(f)=0$ для любого $f\in A_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Это означает, что отображение L инъективно.

По теореме об открытом отображении [20], [21], [22, Open maping theorem 24.30] отображение L^{-1} непрерывно. Итак, L – взаимно однозначное линейное непрерывное отображение пространства $A^*_{\mathcal{H}}(\Omega)$ на $P_{\mathcal{H}}$. Теорема 1.1 доказана.

4. Применение теоремы 1.1 к системам дифференциальных уравнений с частными производными

Пусть P_{ij} – полиномы $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r)$ и $P = (P_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m};\\ j=\overline{1,r}}}$. Определим оператор $\vec{P}(D)$, действующий из $A^m_{\mathcal{H}}(\Omega)$ в $A^r_{\mathcal{H}}(\Omega)$ по правилу:

$$\vec{P}(D)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} P_{1j}(D)f_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} P_{rj}(D)f_j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество всех наборов $Q = (Q_1, \dots, Q_r)$ с полиномиальными компонентами таких, что

$$P_{1j}(z)Q_1(z) + \cdots P_{rj}(z)Q_r(z) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Известно, что это множество, являющееся модулем над кольцом полиномов, имеет конечное число порождающих. Пусть $Q^{(l)} = (Q^{(l)}_1, \dots, Q^{(l)}_r)$ – его порождающие $(l = 1, \dots, s)$.

Теорема 4.1. *Уравнение $\vec{P}(D)\vec{f} = \vec{g}$ разрешимо в $A^m_{\mathcal{H}}(\Omega)$ для $\vec{g} \in A^r_{\mathcal{H}}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{r} Q^{(l)}_i(D)g_i = 0$, $l = 1, \dots, s$.*

Доказательство теоремы 4.1 основано на нижеприводимой теореме Л. Хёрмандера [23] и проводится по стандартной схеме (см., напр., [24]). Обозначим через $M[p \times q]$ множество матриц из p строк и q столбцов, элементы которой полиномы.

Теорема 4.2. *Для данной системы $P \in M[p \times q]$ существует целое число N такое, что для плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций φ и $-\ln d$ таких, что $0 < d \leq 1$, $d(z + \zeta) \leq 2d(\zeta)$, если $|Re z_j| \leq 1$, $|Im z_j| \leq 1$ $(j = 1, \dots, n)$; $|\varphi(z + \zeta) - \varphi(\zeta)| \leq C_0$, если $|z_j| \leq d(\zeta)$ $(j = 1, \dots, n)$, и всех $u \in (A(\mathbb{C}^n))^q$ найдется $v \in (A(\mathbb{C}^n))^q$ с $Pu = Pv$ и $\int \|v\|^2 e^{-\varphi_N}\, d\lambda \leq K \int \|Pu\|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda$, где $\varphi_N(z) = \varphi(z) - N \ln d(z) + N \ln(1 + \|z\|^2)$, K не зависит от u, φ, d.*

Доказательство теоремы 4.1 проводится по стандартной схеме (см., напр., [24]). Отметим лишь, что в качестве функции d можно взять функцию $d(z) := (R_n + \|z\|)^{-n}$, где R_n – достаточно большое положительное число. Тогда можно пользоваться как теоремой 4.2, так и следствием 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р.С. Юлмухаметов. *Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы* // Матем. заметки. **32**:1, 41–57 (1982).
2. Б.А. Державец. *Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.*, Ростов-на-Дону: Ростовский-на-Дону университет, 1983.
3. Е.М. Дынькин. *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала.* Сб. Математическое программирование и смежные вопросы. Труды седьмой зимней школы. Дрогобыч (1974). Москва, С. 40–74. 1976.
4. Р.С. Юлмухаметов. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях* // Матем. сб. **130(172)**:4(8), 500–519 (1986).
5. I.Kh. Musin. *Spaces of functions holomorphic in convex bounded domains of and smooth up to the boundary*, Advances in Mathematics Research. Nova Science Publishers. New York. P. 63–74. 2002.

6. К.В. Трунов, Р.С. Юлмухаметов. *Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях* // Алгебра и анализ. **20**:2, 178–217 (2008).
7. Р.А. Гайсин. *Универсальный критерий квазианалитичности для жордановых областей* // Матем. сб. **209**:12, 57–74 (2018).
8. Р.А. Гайсин. *Критерии квазианалитичности типа Салинаса–Коренблюма для областей общего вида* // Уфимск. матем. журн. **5**:3, 28–40 (2013).
9. А.В. Абанин, Т.М. Андреева. *Аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори* // Матем. заметки, **104**:3, 323–335 (2018).
10. А.В. Абанин, С.В. Петров. *Минимальные абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью* // Владикавк. матем. журн. **14**:3, 13–30 (2012).
11. С.В. Петров. *Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. 5, 25–31 (2010).
12. К.П. Исаев. *Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$* // Изв. вузов. Матем. 1, 29–41 (2019).
13. И.Х. Мусин. *О пространстве функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области и гладких вплоть до границы, и его сопряженном* // Владикавк. матем. журн. **22**:3, 100–111 (2020).
14. M. Neymark. *On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions* // Ark. math. 7, 577–594 (1969).
15. B.A. Taylor. *Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions* // Commun. on pure and appl. mathematics. **24**:1, 39–51 (1971).
16. Il'dar Kh. Musin, Polina V. Yakovleva. *On a space of smooth functions on a convex unbounded set in admitting holomorphic extension in $\mathbb{C}^n$* // Central European Journal of Mathematics. **10**:2, 665–692 (2012).
17. Ж. Себаштьян-и-Сильва. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Математика. **1**:1, 60–77 (1957).
18. В.В. Жаринов. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // УМН. **34**:4, 97–131 (1979).
19. H. Komatsu. *Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces* // J. Math. Soc. Japan. 19, 366-383 (1967).
20. A. Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* // Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
21. В.В. Напалков. *Уравнения свертки в многомерных пространствах* // М.: Наука. 1982.
22. R. Meise, D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis* // Clarendon, Oxford. 1997.
23. L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* // North Holland; 3rd edition, 1990.
24. Б.А. Державец. *О системах уравнений в частных производных в пространстве функций аналитических в шаре и имеющих заданный рост вблизи его границы* // Сиб. матем. журн. **26**:2, 91–97 (1985).

Анастасия Владимировна Луценко,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko.AV@yandex.ru

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru