

УДК 517.977

# О СТРУКТУРЕ СИНГУЛЯРНОСТИ МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙКОНАЛА ПРИ НАРУШЕНИИ ГЛАДКОСТИ КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА

А.А. УСПЕНСКИЙ, П.Д. ЛЕБЕДЕВ

**Аннотация.** Зарождение негладких особенностей у минимаксного (обобщенного) решения задачи Дирихле для уравнения эйконала обусловлено существованием псевдовершин — особых точек границы краевого множества. Нахождение псевдовершин является первым шагом процедуры построения сингулярного множества решения краевой задачи. Отыскание указанных точек требует построения локальных решений уравнения типа золотой пропорции, устанавливающего связь между оператором эйконала и геометрией краевого множества. При этом проблема выявления локальных решений уравнения связана с задачей нахождения неподвижных точек отображений, формируемых при локальной перепараметризации границы краевого множества. В работе получены необходимые условия существования псевдовершин при нарушении гладкости кривизны параметрически заданной границы краевого множества. Условия выписаны в различных эквивалентных формах. В частности, получено представление в виде выпуклой комбинации односторонних производных кривизны. Предъявлены формулы для коэффициентов выпуклой комбинации, которые определяются маркерами — скалярными характеристиками псевдовершин. Для маркеров найден вид алгебраического уравнения, корнями которого они являются. Приведен пример численно-аналитического построения минимаксного решения задачи Дирихле, иллюстрирующий эффективность развиваемых методов решения негладких краевых задач.

**Ключевые слова:** уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, быстродействие, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия, псевдовершина.

**Mathematics Subject Classification:** 32S30, 32T27, 34H20, 35A18, 35B32

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных первого порядка, к которым относится уравнение эйконала, моделируют процессы, протекающие в механике, геометрической оптике, теории оптимального управления, дифференциальных играх, сейсмологии, экономике, в других отраслях знания и сферах приложения. Проблема существования классического решения в классе непрерывно дифференцируемых функций и проблема единственности решения преодолеваются введением обобщенных решений, рассматриваемых уже, как правило, на множестве непрерывных функций, а порой и на множестве разрывных функций (см. [1]–[4]).

---

A. A. USPENSKII, P. D. LEBEDEV, ON SINGULARITY STRUCTURE OF MINIMAX SOLUTION TO DIRICHLET PROBLEM FOR EIKONAL TYPE EQUATION WITH DISCONTINUOUS CURVATURE OF BOUNDARY OF TARGET SET.

© Успенский А.А., Лебедев П.Д. 2021.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Поступила 2 июля 2020 г.

Концепция минимаксного решения [4] базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [5] и позволяет развивать теоретические подходы и эффективные численные процедуры построения решений различных классов краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа, изучаемых, в частности, в теории управления и дифференциальных играх (например, [6]–[8]).

В настоящей работе исследуется проблема возникновения сингулярности у минимаксного решения уравнения Гамильтона – Якоби, которое имеет смысл функции оптимального результата в соответствующей задаче управления по быстродействию. Невыпуклость краевого множества влечет (даже при достаточно высоком порядке дифференцируемости его границы) потерю гладкости минимаксного решения. Изучается случай, когда граница краевого множества дважды непрерывно дифференцируема, при этом имеет точки нарушения гладкости кривизны. Построение обобщенного решения начинается с выявления сингулярного множества, на котором градиент решения терпит разрыв. Методы и конструктивные подходы к построению сингулярных множеств, а на их основе аналитические и численные процедуры построения решения краевой задачи Дирихле для уравнения типа эйконала предложены в [9]–[15].

Ключевым соотношением развиваемой теории является уравнение типа золотой пропорции, решения которого определяют псевдовершины. Основным результатом работы является теорема о необходимых условиях существования псевдовершин — особых точек границы краевого множества, связанных с характеристикой множества с точки зрения его меры невыпуклости [16]. Условия получены в неклассическом виде как условия стационарности (в форме односторонних пределов) функции двух переменных, определяющей значимую часть уравнения типа золотой пропорции. Кроме того, необходимые условия найдены в форме, устанавливающей связь конструкций гладкого анализа с конструкциями выпуклого анализа, — в виде выпуклой комбинации односторонних производных третьего порядка. Важными элементами конструкций являются соотношения для определения коэффициентов выпуклой комбинации, которые представляют собой функции от односторонних маркеров псевдовершин. При этом сами маркеры вычисляются как корни многочлена третьего порядка, чьи коэффициенты формируются по выявленным законам с помощью односторонних производных кривизны.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы примером построения минимаксного решения краевой задачи Дирихле, имеющего смысл функции оптимального результата для соответствующей задачи управления по быстродействию.

## 2. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Гамильтона – Якоби:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 1 = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  — норма вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ . Краевое условие в (2.1) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Кривая  $\Gamma$  не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства  $\Gamma$  существенным образом влияют на структуру минимаксного решения задачи (2.1), их полный перечень указан ниже при обосновании утверждений.

Минимаксное решение задачи (2.1)  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$  [9], где  $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  до множества  $M$ , является функцией оптимального результата в задаче управления по быстродействию с простой динамикой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu_1, \\ \dot{x}_2 = \nu_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где управление  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  стеснено ограничением  $\|\nu\| \leq 1$ ,  $M$  — целевое множество. Кроме того, минимаксное решение задачи (2.1) противоположно по знаку фундаментальному (по С.Н. Кружкову) решению  $u = u_k(x, y)$  [2] краевой задачи Дирихле для уравнения эйконала для случая изотропной среды:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1, \quad u|_\Gamma = 0. \tag{2.3}$$

Здесь краевое условие то же, что и в задаче (2.1). Карты линий уровня фундаментального решения задачи (2.3) и минимаксного решения задачи (2.1) совпадают. В этом смысле решения обеих краевых задач эквивалентны. Характер эволюции волновых фронтов и их особенностей определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Невыпуклость этого множества влечет наличие у решения задачи сингулярного множества, которое в общем случае состоит из нуль- и одномерных многообразий. Как при аналитическом, так и при численном построении минимаксного решения задачи (2.1) особая роль отведена псевдовершинам — точкам границы краевого множества, которые порождают ветви сингулярного множества.

Отметим, что нахождение псевдовершин проще всего осуществляется на двух классах кривых, ограничивающих краевое множества. Первый класс составляют кусочно-гладкие кривые, изломы которых являются псевдовершинами [12]. Вторым классом являются кривые с порядком гладкости не ниже третьего, у которых псевдовершины содержатся во множестве точек со стационарной кривизной [13]. Наиболее сложными для анализа выступают кривые переменной гладкости, порядок которой при локальном рассмотрении может меняться в диапазоне от 1 до 2. Для случая, когда гладкость кривой минимальна, т.е. равна 1, получены необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в терминах односторонних частичных пределов дифференциальных соотношений, зависящих от свойств локальных диффеоморфизмов, определяющих псевдовершины [14]. В настоящей работе исследован один из промежуточных случаев, при котором в точках параметрически заданной кривой  $\Gamma$  существует классическая кривизна, но при этом допускается разрыв координатных функций по производным третьего порядка.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывное отображение числового промежутка  $T = (\hat{t}, \check{t})$ ,  $-\infty \leq \hat{t} < \check{t} \leq +\infty$  на плоскость. Вектор-функция  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  является трижды непрерывно дифференцируемой функцией всюду на  $T$  за исключением конечной совокупности  $T^0 \subset T$  точек  $t_0 \in T^0$ , в которых односторонние производные третьего порядка конечны и при этом нарушается хотя бы одно из равенств

$$\gamma_1'''(t_0 - 0) = \gamma_1'''(t_0 + 0), \quad \gamma_2'''(t_0 - 0) = \gamma_2'''(t_0 + 0).$$

Образ  $\Gamma = \{\mathbf{x} = \gamma(t) : t \in T\}$  этого отображения представляет собою плоскую кривую. В рассмотрение также включим контуры — кривые, заданные на конечных интервалах  $T = (\hat{t}, \check{t})$ ,  $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$ , допускающие доопределение в концевых точках  $t = \hat{t}$  и  $t = \check{t}$  так, что  $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$ .

В дальнейшем будем иметь дело с локальными решениями уравнения вида

$$G(t_1, t_2) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь  $G = G(t_1, t_2)$  — симметрическая функция двух переменных (ее вид и дифференциальные свойства определены ниже) в плоскости параметров  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ . Решения вида  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$  этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях  $\Pi_+(t_0) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$ . Здесь  $t_0 \in T$  и фиксировано,

параметры  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ . Под решениями этого уравнения понимаются локальные диффеоморфизмы [17], [18]. В данном случае, говоря о локальном диффеоморфизме, полагаем, что он определен в полукрестности (левой или правой, в зависимости от ситуации) точки рассмотрения. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , определенный уравнением (3.1), полунепрерывен слева в точке  $t_1 = t_0$  и отображает левую полукрестность точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полукрестность, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \\ \text{(A2)} \quad & \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0. \end{aligned}$$

Соответственно, будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $t_1 = t_1(t_2)$ , определенный уравнением (3.1), полунепрерывен справа в точке  $t_1 = t_0$  и отображает правую полукрестность точки  $t_2 = t_0$  в ее правую полукрестность, если выполняются условия, аналогичными свойствам (A1), (A2), а именно, выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & t_1((t_0, t_0 + \delta_2)) = (t_0 - \delta_1, t_0), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \\ \text{(A2)} \quad & \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0. \end{aligned}$$

Отметим, что условия (A2) и (A2) помимо условия полунепрерывности выражают один из возможных способов определения (в предельной форме) неподвижных точек. Речь идет о точках  $(t_2, t_1) = (t_0, t_0)$ , лежащих на биссектрисе первого и третьего координатных углов пространства параметров, которые являются предельными для графиков локальных диффеоморфизмов. Существование таких точек и сопутствующих им локальных диффеоморфизмов ранее показано на примерах [12].

Выберем произвольно и зафиксируем два произвольных момента  $t_1 \in T$  и  $t_2 \in T$ ,  $t_1 < t_2$ . Проведем через точки  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$  касательные прямые.

**Определение 3.1.** *Псевдовершиной кривой  $\Gamma$  называется точка*

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (x_1^*, x_2^*),$$

где  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$  — однопараметрическое подмножество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1^* - \gamma_1(t_1)) \gamma_2'(t_1) = (x_2^* - \gamma_2(t_1)) \gamma_1'(t_1), \\ (x_1^* - \gamma_1(t_2)) \gamma_2'(t_2) = (x_2^* - \gamma_2(t_2)) \gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (3.2)$$

определяемое непрерывным слева в точке  $t_1 = t_0$  локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$  левой полукрестности точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полукрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(\gamma(t_1), (x_1^*, x_2^*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_1^*, x_2^*)) = 0. \quad (3.3)$$

С точки зрения геометрии  $(x_1^*, x_2^*)$  — точка пересечения касательных к кривой  $\Gamma$  в точках  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$ ,  $G = G(t_1, t_2)$  — разность квадратов расстояний между указанными точками  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$  кривой  $\Gamma$  и точкой  $(x_*, x_*)$  пересечения касательных, проведенных через  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$ .

При построении минимаксного решения задачи (2.1), или сопутствующего ему отличного лишь знаком фундаментального решения задачи (2.3) геометрической оптики с постоянным коэффициентом преломления среды, удобно использовать некоторые конструкции геометрической теории приближений. Здесь привлечем оператор проецирования  $P_M(\mathbf{x})$  точек  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  на  $M$ . Известно [19], что решение уравнения эйконала является гладким на всей области рассмотрения в случае одноэлементности значений  $P_M(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ , т.е. когда  $\text{card } P_M(\mathbf{x}) = 1$ . Такая ситуация в рассматриваемых задачах реализуется в случае выпуклости краевого множества  $M$ . Тогда согласно введенной терминологии [20] множество  $M$  является «солнцем». В общем же случае, когда  $M$  — невыпуклое множество, свойством солнечности  $M$  не обладает, поскольку количество проекций точек из его дополнения может отличаться от единицы, здесь  $\text{card } P_M(\mathbf{x}) > 1$ .

**Определение 3.2.** Биссектрисой множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  называется

$$L = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \text{card } P_M(\mathbf{x}) > 1 \}.$$

Применительно к задаче управления по быстродействию с динамикой (2.2) множество  $L$  состоит из точек, из которых выходят две и более оптимальных траектории. Таким образом, биссектриса  $L$  множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  является множеством сингулярности функции оптимального результата. Стоит отметить, что биссектриса относится к множествам симметрии, топологические свойства которых изучаются в теории особенностей гладких отображений (например, [21]).

**Определение 3.3.** Ветвью  $L(\mathbf{x}^{(0)})$  биссектрисы  $L$  кривой  $\Gamma$ , где  $\mathbf{x}^{(0)}$  — псевдовершина  $\Gamma$ , называется множество точек  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (x_1 - \gamma_1(t_1))\gamma'_1(t_1) + (x_2 - \gamma_2(t_1))\gamma'_2(t_1) = 0, \\ (x_1 - \gamma_1(t_2))\gamma'_1(t_2) + (x_2 - \gamma_2(t_2))\gamma'_2(t_2) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $t_2 = t_2(t_1)$  — непрерывный слева в точке  $t_1 = t_0$  локальный диффеоморфизм левой полукрестности точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полукрестность, который задается уравнением (3.3) и удовлетворяет условиям (A1), (A2).

По построению система (3.4) является сопряженной к системе (3.2). Ее решениями являются точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , имеющие две ближайшие точки на  $M \subset \mathbb{R}^2$ .

Псевдовершины и ветви биссектрисы являются основными структурными элементами при построении (аналитическом или комбинированном численно-аналитическом) сингулярного множества задачи (2.1).

**Замечание 3.1.** Приведенные выше определения псевдовершины и ветви биссектрисы даны с помощью локального диффеоморфизма вида  $t_2 = t_2(t_1)$ . Учитывая имеющуюся симметрию математической модели, определения 3.1 и 3.3 можно переформулировать в терминах локальных диффеоморфизмов вида  $t_1 = t_1(t_2)$ .

Введем скалярные характеристики псевдовершин.

**Определение 3.4.** Левая односторонняя производная

$$\lambda \triangleq t'_2(t_0 - 0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} \quad (3.5)$$

называется левым маркером псевдовершины  $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$ , здесь  $t_2 = t_2(t_1)$  удовлетворяет (A1), (A2).

**Определение 3.5.** Правая односторонняя производная

$$\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0) = \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0} \quad (3.6)$$

называется правым маркером псевдовершины  $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$ , здесь  $t_1 = t_1(t_2)$  удовлетворяет (A1), (A2).

Важным следствием симметрии уравнения (3.3) выступает связь между односторонними маркерами. Если локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ , является решением (3.3), то ему обратный локальный диффеоморфизм  $t_1 = t_1(t_2)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$ , также является решением уравнения (3.3) (см. [10]). При этом в силу налагаемых на них условий полунепрерывности (A2) и (A2) их графики имеют общую предельную точку  $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ . В этом случае односторонние маркеры взаимнообратны:

$$\mu = \lambda^{-1}. \quad (3.7)$$

Отметим также, что  $\lambda \leq 0$ , ибо  $t'_2(t_1) < 0$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ . Тогда в силу (3.7) и  $\mu \leq 0$ .

Задача выявления условий существования локальных решений уравнения (3.3), удовлетворяющих наборам условий (A1), (A2) и (A1), (A2), составляет самостоятельную проблему. Выработка подходов к ее решению не ограничивается методами классического анализа. Здесь весьма существенной особенностью проблемы является множественность решений, стягивающихся в точки графика тождественной функции  $t_2 = t_1$ , которая будучи очевидным решением уравнения (3.3), тем не менее не удовлетворяет потребностям решения краевых задач (2.1) и (2.3). Один из путей выявления свойств локальных диффеоморфизмов, удовлетворяющих наборам условий (A1), (A2) и (A1), (A2), связан с привлечением условий трансверсальности [10]. Стоит также обратить внимание на просматриваемую (см. условия (A2) и (A2)) связь проблемы существования локального диффеоморфизма с проблемой существования неподвижной точки в пространстве параметров. Метод неподвижных точек имеет весьма обширную область применения в анализе и теории дифференциальных уравнений. Находит он приложение и при изучении негладких задач оптимального управления и при поиске равновесных состояний в игровых задачах (например, [22]).

Маркеры псевдовершины фиксируют качественное состояние кривой с точки зрения дифференцируемости. Другими словами, значения односторонних маркеров «сигналят» о порядке гладкости кривой в псевдовершине. Так, например, в случае трижды дифференцируемости кривой в псевдовершине ее односторонние маркеры равны [10]:

$$\lambda = \mu = -1.$$

Если кривая гладкая, но при этом не имеет классической кривизны, то односторонние маркеры в псевдовершине принимают крайние значения из своего спектра  $[-\infty, 0]$ , здесь  $\lambda = 0$  либо  $\lambda = -\infty$ . Наконец, если рвутся производные первого порядка, то левый маркер равен отношению дифференциалов левой и правой дуг кривой, стянутых в точку (подробнее см. [10]–[15]). Соответственно правый маркер здесь равен их обратному отношению.

Уточним дифференциальные свойства кривой  $\Gamma$ , ограничивающей краевое множество  $M$ . Обозначим  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  определитель второго порядка, построенный на векторах  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ , записанных по строкам. Скалярное произведение этих векторов обозначим  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Будем полагать, что выполняется следующее условие для кривой  $\Gamma$ :

- (B1)  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ ,  $t \in T$ ;  
 (B2)  $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) \neq 0$ ,  $t \in T^0$ .

Условие (B1) означает регулярность кривой  $\Gamma$ . Условие (B2) влечет отличие от нуля кривизны, что обеспечивает существование решений системы уравнений (3.2). Кроме того, эти условия, рассматриваемые в системе, гарантируют, что координатные функции кривой при  $t \in T^0$  не являются плоскими [18]. Это позволяет в аппроксимативных выкладках использовать технику струй [17], [23].

Множество кривых  $\Gamma$  с указанными дифференциальными свойствами и условиями (B1), (B2), обозначим  $\{\Gamma\}_T$ .

В дальнейшем сосредоточимся на выявлении свойств локальных решений уравнения (3.3) вида  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ , в частности, на поиске значения левого маркера. Ранее показано, что локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , удовлетворяющий набору условий (A1), (A2), определяет псевдовершину  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0)$ ,  $t_0 \in T$ , кривой  $\Gamma$ , при этом является локальным решением одной из ветвей уравнения типа уравнения гармонической пропорции с двухпараметрическими коэффициентами (формула (3.5) из [13]). Это уравнение возникает в результате редукции основного уравнения (3.3) и имеет вид [13]:

$$G(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)} = 0. \quad (3.8)$$

Здесь  $s(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$ ,  $t \in T$ . При анализе свойств решений этого уравнения будем использовать технику струй, опирающуюся на локальные разложения скалярных функций вблизи точки рассмотрения  $t = t_0$  по формуле Тейлора. Следуя [17],

под  $k$ -струей, где  $k$  — натуральное число, достаточное число раз дифференцируемой функции  $f(t)$ ,  $t \in T$ , будем понимать многочлен Тейлора  $k$ -го порядка

$$J_t^k f(t_0) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i.$$

Пусть  $f(t)$  и  $g(t)$  — дифференцируемые функции. Сумма  $k$ -струй этих функций находится как сумма соответствующих многочленов Тейлора степени  $k$ . Произведение  $k$ -струй определяется по следующему правилу. Если

$$J_t^k f(t_0) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i, \quad J_t^k g(t_0) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$$

—  $k$ -струи функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , соответственно, то их произведением

$$J_t^k f(t_0) \otimes J_t^k g(t_0)$$

называется многочлен, получаемый естественным (почленным) умножением многочленов  $J_t^k f(t_0)$  и  $J_t^k g(t_0)$ , в котором отброшены все члены степени выше  $k$ .

В последующем будем оперировать 1-, 2- и 3-струями. При этом формируемая модель является трехточечной с наложенным отношением порядка. Здесь точка  $t_0 \in T$  является центральным узлом и, как правило, фиксирована, а точки  $t_1 \in T$  и  $t_2 \in T$  — переменные, причем  $t_1 < t_0 < t_2$ . Ограничения на порядок следования точек  $t_1, t_0, t_2$  продиктованы особенностями сингулярных кривых для уравнения эйконала, которые отмечены в классической работе ([24, стр. 196]). Здесь сингулярные линии — рассеивающие кривые. Оптимальные движения характеристической системы (2.2) с начальной точкой на рассеивающей кривой «скатываются» по разные от нее стороны. В рассматриваемой работе аргументами концов этих траекторий (здесь это отрезки) являются  $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$  и  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$ ,  $\delta_2 > 0$ , где  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальное решение уравнения (3.3) со свойствами (A1), (A2), т.е. здесь как раз  $t_1 < t_0 < t_2$ ,  $t_0$  — аргумент псевдовершины границы краевого множества.

Примем обозначения для приращений:

$$\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0, \quad \Delta_2 = t_2 - t_0 > 0, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Будем различать струи, получаемые дифференцированием вправо, т.е. когда  $t_0 < t_2$ , и струи, получаемые дифференцированием влево, т.е. когда  $t_0 > t_1$ . Тогда две отличающиеся «направлением» дифференцирования 2-струи имеют вид:

$$J_{t_2}^2 f(t_0) \triangleq J_{t_0+\Delta_2}^2 f(t_0) = f(t_0) + \Delta_2 f'(t_0) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''(t_0),$$

$$J_{t_1}^2 f(t_0) \triangleq J_{t_0-\Delta_1}^2 f(t_0) = f(t_0) - \Delta_1 f'(t_0) + \frac{\Delta_1^2}{2} f''(t_0).$$

В силу введенного выше определения произведение этих 2-струй есть многочлен 2-го порядка относительно приращений  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , которые, вообще говоря, рассматриваются как независимые друг от друга величины:

$$J_{t_2}^2 f(t_0) \otimes J_{t_1}^2 g(t_0) = \left( f(t_0) + \Delta_2 f'(t_0) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''(t_0) \right) \otimes \left( g(t_0) - \Delta_1 g'(t_0) + \frac{\Delta_1^2}{2} g''(t_0) \right)$$

$$= f(t_0)g(t_0) - \Delta_1 f(t_0)g'(t_0) + \Delta_2 f'(t_0)g(t_0) - \Delta_1 \Delta_2 f'(t_0)g'(t_0) \quad (3.9)$$

$$+ \frac{\Delta_2^2}{2} f''(t_0)g(t_0) + \frac{\Delta_1^2}{2} f(t_0)g''(t_0).$$

При необходимости можно «управлять» коэффициентами струй, устанавливая зависимость между приращениями  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , например, посредством локального диффеоморфизма. Этот прием используется при обосновании утверждений.

## 4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим случай нестационарной псевдовершины границы краевого множества, в которой нарушается гладкость кривизны. Обоснуем необходимые условия существования псевдовершины в виде обобщенных условий стационарности относительно функции  $G(t_1, t_2)$ , а также получим алгебраические уравнения для отыскания односторонних маркеров. При этом подробно рассмотрим процедуру вычисления только одного из двух маркеров, а именно одностороннего левого маркера.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathbf{x}^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$  — псевдовершина кривой

$$\Gamma = \{\mathbf{x} = \gamma(t) : t \in T\} \in \{\Gamma\}_T$$

в краевом условии задачи Дирихле (2.1), при этом  $\mathbf{x}^{(0)}$  определяется локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$  из (3.8) и выполняются условия (A1), (A2). Кроме того, существует конечный левый маркер  $\lambda = t_2'(t_0 - 0) \leq 0$ , а координатные функции псевдовершины удовлетворяют условиям нестационарности:

$$\gamma_1'(t_0) \neq 0, \quad \gamma_2'(t_0) \neq 0, \quad (4.1)$$

и

$$\gamma_i'''(t_0 - 0) \neq \gamma_i'''(t_0 + 0) \quad (4.2)$$

по крайней мере для одного  $i \in \{1, 2\}$ . Тогда с необходимостью выполняются равенства

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} = 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\lambda - 3) \det(\gamma'(t_0), \gamma_+'''(t_0)) + (3\lambda - 1) \det(\gamma'(t_0), \gamma_-'''(t_0)) \\ = \frac{3 \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle}{s^2} (\lambda - 1)^3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Из (3.8) следует, что в точках  $(t_1, t_2) = (t_1, t_2(t_1))$  графика локального диффеоморфизма имеет место равенство:

$$\frac{\partial G}{\partial t_1} + t_2' \frac{\partial G}{\partial t_2} = 0.$$

Осуществим предельный переход вдоль локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  (см. также [10]):

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} + t_2' \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) выражает условие трансверсального («протыкающего») пересечения замыкания графика локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  с графиком тождественного диффеоморфизма  $t_2 = t_1$  в общей предельной точке  $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ .

Опираясь на условие трансверсальности, выявим ряд свойств псевдовершины. По условию теоремы 4.1 левый маркер существует и конечен, из (4.5) следует формула его нахождения:

$$t_2'(t_0 - 0) = - \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \cdot \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right)^{-1} \right). \quad (4.6)$$

Далее найдем последовательно аппроксимации частных производных, рассматриваемых вдоль диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$ .

Примем ряд соглашений, направленных на компактификацию выкладок. Во всех аппроксимационных конструкциях точка разложения фиксирована, в них  $t_2 = t_0$  и  $t_1 = t_0$  (в зависимости от направления разложения — вправо или влево), и для краткости письма значение  $t_0$  аргументов  $t_2$  и  $t_1$  опущено. Логика вычислений предполагает сначала формирование аппроксимаций при произвольно взятых положительных приращениях

$\Delta_1 = t_0 - t_1$ ,  $\Delta_2 = t_2 - t_0$ , а затем осуществляются аппроксимации при связанных приращениях, обусловленных локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ . Важно отметить, что когда тройка точек связана локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , приращение  $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_0$ , т.е.  $\Delta_2$  зависит от  $\Delta_1$ , причем

$$\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_0 = t_2'(t_0 - 0)(t_1 - t_0) + o(t_1 - t_0) = -\lambda\Delta_1 + o(\Delta_1). \quad (4.7)$$

Отсюда, в частности, следует

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2(\Delta_1) = \Delta_1 - \lambda\Delta_1 + o(\Delta_1) = (1 - \lambda)\Delta_1 + o(\Delta_1), \quad \text{где } 1 - \lambda \neq 0. \quad (4.8)$$

Здесь и далее обозначения вида  $o(\Delta_1^k)$ , где  $k = 1, 2, 3$ , используются для функций, принадлежащих классу функций, имеющих более высокий порядок малости по отношению к аргументу слева от точки рассмотрения, т.е. здесь

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{o(\Delta_1^k)}{\Delta_1^k} = 0.$$

Обозначение  $\varepsilon(\Delta_1)$  используется для функций, принадлежащих классу бесконечно малых в левой полуокрестности точки рассмотрения, здесь

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \varepsilon(\Delta_1) = 0.$$

Полагаем также, что две скалярные функции  $y = q(t)$  и  $y = g(t)$  эквивалентны слева от точки  $t = t_0 \in \mathbb{R}$ , если

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{q(t)}{g(t)} = 1.$$

В этом случае пишем  $q(t) \sim g(t)$ ,  $t_1 \rightarrow t_0 - 0$ .

Для координатных функций  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$  и их производных, вычисленных в центральном узле  $t_0$ , а также для соответствующих координатным функциям струй, будем опускать обозначение аргумента, при этом для односторонних производных уберем обозначения  $t_0 - 0$  и  $t_0 + 0$ , опуская соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс:

$$\gamma'_i = \gamma'_i(t_0), \quad \gamma''_i = \gamma''_i(t_0), \quad \gamma'''_{i,-} = \gamma'''_i(t_0 - 0), \quad \gamma'''_{i,+} = \gamma'''_i(t_0 + 0), \quad i = 1, 2.$$

Начнем с разложения частной производной по первой переменной. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \frac{\det(\gamma'(t_1), \gamma(t_2) - \gamma(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} - \frac{s^2(t_2) \det(\gamma'(t_1), \gamma''(t_1))}{(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))^2} \\ &+ \frac{s(t_2) [s(t_1) (\gamma''_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma''_1(t_1)) - s'(t_1) (\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))]}{(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))^2}. \end{aligned}$$

Примем обозначения:

$$\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_1} = g_1(t_1, t_2) - g_2(t_1, t_2) + g_3(t_1, t_2).$$

Здесь

$$g_1(t_1, t_2) = \frac{g_{11}(t_1, t_2)}{g_{12}(t_1, t_2)}, \quad g_2(t_1, t_2) = \frac{g_{21}(t_1, t_2)}{g_{22}(t_1, t_2)}, \quad g_3(t_1, t_2) = \frac{g_{31}(t_1, t_2)}{g_{32}(t_1, t_2)}$$

— соответствующие дроби в разложении.

Вычислим аппроксимации выделенных дробей, применяя, где это уместно, технику струй. Начнем с аппроксимации числителя первой дроби по порядку малости  $o(\Delta_{12}^3)$ , где  $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$ . Здесь и далее по тексту, принимая во внимание громоздкость вычислений, которые безусловно важны, но тем не менее во многом носят технический характер, опустим ряд промежуточных выкладок, которые при желании или необходимости можно восстановить.

Выпишем разложения для координатных функций, построенные в точках, лежащих по разные стороны от точки рассмотрения  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\gamma_i(t_2) &= \gamma_i + \Delta_2 \gamma'_i + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma''_i + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma'''_{i,+} + o(\Delta_2^3), \\ \gamma_i(t_1) &= \gamma_i - \Delta_1 \gamma'_i + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma''_i - \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma'''_{i,-} + o(\Delta_1^3), \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}g_{11}(t_1, t_2) &= \det(\gamma'(t_1), \gamma(t_2) - \gamma(t_1)) \\ &= \det\left(\gamma' - \Delta_1 \gamma'' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma''' + o(\Delta_1^2), \gamma + \Delta_2 \gamma' + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma'' + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma''' + o(\Delta_2^3) \gamma' \right. \\ &\quad \left. - \gamma + \Delta_1 - \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma'' + \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma''' + o(\Delta_1^3)\right) \\ &= \det\left(\gamma' - \Delta_1 \gamma'' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma''' + o(\Delta_1^2), \Delta \gamma' + \Delta \cdot \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma'' + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma''' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma''' + o(\Delta_{12}^3)\right) \\ &= \Delta \det\left(\gamma' - \Delta_1 \gamma'' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma''' + o(\Delta_1^2), \gamma' + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma'' + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta} \gamma''' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1^3}{6\Delta} \gamma''' + o(\Delta_{12}^2)\right) \tag{4.9} \\ &= \Delta \left( \det(\gamma', \gamma') + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta} \det(\gamma', \gamma'''_+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1^3}{6\Delta} \det(\gamma', \gamma'''_-) - \Delta_1 \det(\gamma'', \gamma') - \Delta_1 \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \det(\gamma'', \gamma'') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1^2}{2} \det(\gamma'''_-, \gamma') + o(\Delta_{12}^2) \right) \\ &= \Delta \left( \frac{\Delta}{2} \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta} \det(\gamma', \gamma'''_+) + \left( \frac{\Delta_1^3}{6\Delta} - \frac{\Delta_1^2}{2} \right) \det(\gamma', \gamma'''_-) + o(\Delta_{12}^2) \right) \\ &= \Delta^2 \left( \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{2} + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) + o(\Delta_{12}) \right).\end{aligned}$$

Заметим, что неравенство (4.2), накладываемое на односторонние производные третьего порядка, существенно усложняет аппроксимационные конструкции.

Проведем аппроксимацию с помощью 3-струй знаменателя первой дроби [13]:

$$\begin{aligned}g_{12}(t_1, t_2) &\approx (J_{t_2}^3 \gamma_1 - J_{t_1}^3 \gamma_1)^2 \\ &= \left( \Delta_2 \gamma'_1 + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma''_1 + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma'''_{1,+} + \Delta_1 \gamma'_1 - \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma''_1 + \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma'''_{1,-} \right)^2 \\ &= \left( \Delta \gamma'_1 + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \Delta \gamma''_1 + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma'''_{1,+} + \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma'''_{1,-} \right)^2 \\ &= \Delta^2 (\gamma'_1)^2 + \Delta^2 (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 = \Delta^2 \left( (\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 \right).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$g_{12}(t_1, t_2) = \Delta^2 \left( (\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 \right) + o(\Delta_{12}^3). \tag{4.10}$$

Первая дробь  $g_1(t_1, t_2)$  с учетом допустимого сокращения в аппроксимационных разложениях числителя (4.9) и знаменателя (4.10) на  $\Delta^2$  при естественном понижении на две единицы порядков приближений примет вид

$$g_1(t_1, t_2) = \frac{\frac{1}{2} \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma''_+)}{(\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 + o(\Delta_{12})} + \frac{\frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})}{(\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 + o(\Delta_{12})}, \quad \Delta_{12} \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Перейдем ко второй дроби  $g_2(t_1, t_2) = \frac{g_{21}(t_1, t_2)}{g_{22}(t_1, t_2)}$ . Аппроксимируем с помощью 1-струй знаменатель второй (и в силу равенства, также знаменатель третьей) дроби:

$$\begin{aligned} g_{22}(t_1, t_2) &\approx (J_{t_1}^1 \gamma'_2 \otimes J_{t_2}^1 \gamma'_1 + J_{t_2}^1 \gamma'_2 \otimes J_{t_1}^1 \gamma'_1)^2 \\ &= (\gamma'_2 - \Delta_1 \gamma''_2) \otimes (\gamma'_1 + \Delta_2 \gamma''_1) + (\gamma'_2 + \Delta_2 \gamma''_2) \otimes (\gamma'_1 - \Delta_1 \gamma''_1) \\ &= (\gamma'_1 \gamma'_2 + \Delta_2 \gamma'_2 \gamma''_1 - \Delta_1 \gamma'_1 \gamma''_2 + \gamma'_1 \gamma'_2 - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 + \Delta_2 \gamma'_1 \gamma''_2)^2 \\ &= (2\gamma'_1 \gamma'_2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_2 \gamma''_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_2)^2 \\ &= (2\gamma'_1 \gamma'_2 + (\Delta_2 - \Delta_1) (\gamma'_2 \gamma''_1 + \gamma'_1 \gamma''_2))^2 \\ &= (2\gamma'_1 \gamma'_2)^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma'_2 (\gamma'_2 \gamma''_1 + \gamma'_1 \gamma''_2). \end{aligned}$$

Стало быть, имеет место разложение:

$$g_{22}(t_1, t_2) = g_{32}(t_1, t_2) = (2\gamma'_1 \gamma'_2)^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma'_2 (\gamma'_2 \gamma''_1 + \gamma'_1 \gamma''_2) + o(\Delta_{12}), \quad \Delta_{12} \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Осуществим с помощью 1-струй аппроксимацию числителя второй дроби с порядком малости  $o(\Delta_{12})$ :

$$\begin{aligned} g_{21}(t_1, t_2) &\approx J_{t_2}^1 s^2 \otimes J_{t_1}^1 \det(\gamma', \gamma'') \\ &= (s^2 + 2\Delta_2 s s') \otimes (\det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1 (\det(\gamma'', \gamma'') + \det(\gamma', \gamma'''_-))) \\ &= s^2 \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1 s^2 \det(\gamma', \gamma'''_-) + 2\Delta_2 s s' \det(\gamma', \gamma''). \end{aligned}$$

Тогда

$$g_{21}(t_1, t_2) = s^2 \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1 s^2 \det(\gamma', \gamma'''_-) + 2\Delta_2 s s' \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12}), \quad \Delta_{12} \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

С учетом (4.12) и (4.13) вторая дробь раскладывается следующим образом:

$$g_2(t_1, t_2) = \frac{s^2 \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1 s^2 \det(\gamma', \gamma'''_-) + 2\Delta_2 s s' \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12})}{(2\gamma'_1 \gamma'_2)^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma'_2 (\gamma'_2 \gamma''_1 + \gamma'_1 \gamma''_2) + o(\Delta_{12})}, \quad \Delta_1 \downarrow 0.$$

С помощью 1-струй аппроксимируем числитель третьей дроби:

$$\begin{aligned} &s(t_2) [s(t_1) (\gamma''_2(t_1) \gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2) \gamma''_1(t_1)) - s'(t_1) (\gamma'_2(t_1) \gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_1))] \\ &\approx (s + \Delta_2 s') \otimes (\gamma''_2 \gamma'_1 s + \gamma'_2 \gamma''_1 s - 2\gamma'_1 \gamma'_2 s' + 2\Delta_2 \gamma''_1 \gamma''_2 s - \Delta_1 \gamma'''_{2,-} \gamma'_1 s - \Delta_1 \gamma'''_{1,-} \gamma'_2 s \\ &\quad - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma'_1 s' - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 s' - \Delta_2 \gamma'_2 \gamma'_1 s' - \Delta_2 \gamma'_1 \gamma'_2 s' + \Delta_1 \gamma'_1 \gamma'_2 s' + \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 s' + 2\Delta_1 \gamma'_1 \gamma'_2 s''_-) \\ &= \gamma''_2 \gamma'_1 s^2 + \gamma'_2 \gamma''_1 s^2 - 2\gamma'_1 \gamma'_2 s' s + \Delta_2 \gamma''_2 \gamma'_1 s s' + \Delta_2 \gamma'_2 \gamma''_1 s s' - 2\Delta_2 \gamma'_1 \gamma'_2 (s')^2 \\ &\quad + 2\Delta_2 \gamma''_1 \gamma''_2 s^2 - \Delta_1 \gamma'''_{2,-} \gamma'_1 s^2 - \Delta_1 \gamma'''_{1,-} \gamma'_2 s^2 - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma'_1 s s' - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 s s' \\ &\quad - \Delta_2 \gamma'_2 \gamma'_1 s s' - \Delta_2 \gamma'_1 \gamma'_2 s s' + \Delta_1 \gamma'_1 \gamma'_2 s s' + \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 s s' + 2\Delta_1 \gamma'_1 \gamma'_2 s s''_- \end{aligned}$$

$$= \gamma_2'' \gamma_1' s^2 + \gamma_2' \gamma_1'' s^2 - 2\gamma_1' \gamma_2' s' s - 2\Delta_2 \gamma_1' \gamma_2' (s')^2 + 2\Delta_2 \gamma_1'' \gamma_2'' s^2 \\ - \Delta_1 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' s^2 - \Delta_1 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' s^2 + 2\Delta_1 \gamma_1' \gamma_2' s s''.$$

Следовательно,

$$g_{31}(t_1, t_2) = s^2 \gamma_2'' \gamma_1' + s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' \\ + \Delta_1 (-s^2 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' - s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' + 2s s'' \gamma_2' \gamma_1') + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' + o(\Delta_{12}), \quad \Delta_{12} \rightarrow 0.$$

Разложение третьей дроби принимает вид:

$$g_3(t_1, t_2) = \frac{s^2 \gamma_2'' \gamma_1' + s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1'}{(2\gamma_1' \gamma_2')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') + o(\Delta_{12})} \\ + \frac{\Delta_1 (-s^2 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' - s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' + 2s s'' \gamma_2' \gamma_1') + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' + o(\Delta_{12})}{(2\gamma_1' \gamma_2')^2 + 4(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') + o(\Delta_{12})}.$$

Имеем

$$-g_2(t_1, t_2) + g_3(t_1, t_2) = \frac{-g_{21}(t_1, t_2) + g_{31}(t_1, t_2)}{g_{22}(t_1, t_2)}. \quad (4.14)$$

Тогда аппроксимация числителя этой дроби имеет вид:

$$\begin{aligned} -g_{21}(t_1, t_2) + g_{31}(t_1, t_2) &\approx -s^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_1 s^2 \det(\gamma', \gamma''') - 2\Delta_2 s s' \det(\gamma', \gamma'') \\ &\quad + s^2 \gamma_2'' \gamma_1' + s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + \Delta_1 (-s^2 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' \\ &\quad - s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' + 2s s'' \gamma_2' \gamma_1') + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ &= -s^2 \gamma_2'' \gamma_1' + s^2 \gamma_2' \gamma_1'' + \Delta_1 s^2 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' - \Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' - 2\Delta_2 s s' \gamma_2' \gamma_1' \\ &\quad + 2\Delta_2 s s' \gamma_2' \gamma_1'' + s^2 \gamma_2'' \gamma_1' + s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' \\ &\quad + \Delta_1 (-s^2 \gamma_{2,-}''' \gamma_1' - s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' + 2s s'' \gamma_2' \gamma_1') + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ &= 2s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' - 2\Delta_2 s s' \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_2 s s' \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' \\ &\quad - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ &= 2s^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2s s' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 s s' \det(\gamma', \gamma'') + 2\Delta_2 s^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ &\quad - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' \\ &= 2 \left( (\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 \right) \gamma_2' \gamma_1'' \\ &\quad - 2(\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'') \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_2 (\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'') (\gamma_1' \gamma_2'' - \gamma_2' \gamma_1'') \\ &\quad + 2\Delta_2 \left( (\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 \right) \gamma_1'' \gamma_2'' - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' \\ &\quad - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' \\ &= 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' \gamma_1'' + 2(\gamma_2')^3 \gamma_1'' - 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' \gamma_1'' - 2(\gamma_2')^2 \gamma_2'' \gamma_1' \\ &\quad - 2\Delta_2 \left( (\gamma_1')^2 \gamma_1'' \gamma_2'' - \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_1'')^2 + \gamma_2' \gamma_1' (\gamma_2'')^2 - (\gamma_2')^2 \gamma_2'' \gamma_1'' \right) \\ &\quad + 2\Delta_2 \left( (\gamma_1')^2 \gamma_1'' \gamma_2'' + (\gamma_2')^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \right) - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' \\ &\quad - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' \\ &= -2(\gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + 2\Delta_2 \gamma_1' \gamma_2' \left( (\gamma_1'')^2 - (\gamma_2'')^2 \right) + 4\Delta_2 (\gamma_2')^2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ &\quad - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2' \\ &= -2(\gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + 2\Delta_2 \gamma_2' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - 2\Delta_2 \gamma_2' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') \\ &\quad - 2\Delta_2 (s')^2 \gamma_2' \gamma_1' + 2\Delta_1 s s'' \gamma_2' \gamma_1' - 2\Delta_1 s^2 \gamma_{1,-}''' \gamma_2'. \end{aligned}$$

После сокращения на 2 числителя и знаменателя дроби (4.14) стало возможным записать разложение частной производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= g_1(t_1, t_2) - g_2(t_1, t_2) + g_3(t_1, t_2) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma_-''') + o(\Delta_{12})}{(\gamma_1')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_1'' + o(\Delta_{12})} \\ &\quad + \frac{-(\gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_2 \gamma_2' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_1 \gamma_2' \gamma_{1,-}''' - s^2}{2(\gamma_1' \gamma_2')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') + o(\Delta_{12})} \\ &\quad + \frac{-\Delta_2 \gamma_2' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_2 \gamma_1' \gamma_2' (s')^2 + \Delta_1 \gamma_1' \gamma_2' s s_-'' + o(\Delta_{12})}{2(\gamma_1' \gamma_2')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') + o(\Delta_{12})}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Аппроксимации дробей в (4.15) согласованы по порядку. Перемножением соответствующих 1-струй найдем аппроксимации числителя и знаменателя результирующей дроби в (4.15):

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{2} \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma_-''') \right) \otimes \\ &\otimes (2(\gamma_1' \gamma_2')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'')) \\ &+ ((\gamma_1')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_1'') \otimes (-(\gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_2 \gamma_2' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_1 \gamma_2' \gamma_{1,-}''' - s^2 \\ &- \Delta_2 \gamma_2' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_2 \gamma_1' \gamma_2' (s')^2 + \Delta_1 \gamma_1' \gamma_2' s s_-'' ) \\ &= (\gamma_1' \gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2' (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \det(\gamma', \gamma'') \\ &+ \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma_-''') \\ &- (\gamma_1' \gamma_2')^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_2 (\gamma_1')^2 \gamma_2' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_1 (\gamma_1')^2 \gamma_2' \gamma_{1,-}''' - s^2 \\ &- \Delta_2 (\gamma_1')^2 \gamma_2' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_2 (\gamma_1')^3 \gamma_2' (s')^2 + \Delta_1 (\gamma_1')^3 \gamma_2' s s_-'' \\ &- (\Delta_2 - \Delta_1) (\gamma_2')^2 \gamma_1' \gamma_1'' \det(\gamma', \gamma'') = \gamma_1' \gamma_2' ((\Delta_2 - \Delta_1) (\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \det(\gamma', \gamma'') \\ &+ \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2') \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2') \det(\gamma', \gamma_-''') + \Delta_2 \gamma_1' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \\ &- \Delta_1 \gamma_1' \gamma_{1,-}''' - s^2 - \Delta_2 \gamma_1' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_2 (\gamma_1')^2 (s')^2 + \Delta_1 (\gamma_1')^2 s s_-'' \\ &- (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_2' \gamma_1'' \det(\gamma', \gamma'') = \gamma_1' \gamma_2' (-\Delta_1 \gamma_1' \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') \\ &+ \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2') \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} (\gamma_1' \gamma_2') \det(\gamma', \gamma_-''') \\ &+ \Delta_2 \gamma_1' \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_1 \gamma_1' \gamma_{1,-}''' - s^2 - \Delta_2 (\gamma_1')^2 (s')^2 + \Delta_1 (\gamma_1')^2 s s_-'' ) \\ &= (\gamma_1')^2 \gamma_2' \left( -\Delta_1 \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right. \\ &\quad \left. + \Delta_1 \gamma_1' s s_-'' - \Delta_1 \gamma_{1,-}''' - s^2 + \Delta_2 \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_2 \gamma_1' (s')^2 \right) \\ &= (\gamma_1')^2 \gamma_2' \left( -\Delta_1 \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right. \\ &\quad \left. + \Delta_1 \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \Delta_1 \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') - \Delta_2 \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Выше были использованы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_2 \gamma_1' (s')^2 &= \Delta_2 \left( \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \frac{\gamma_1' \langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{s^2} \right) \\
&= \Delta_2 \frac{\gamma_1'' (\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'') ((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2) - \gamma_1' (\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'')^2}{s^2} \\
&= \Delta_2 \frac{(\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'') (\gamma_1'' (\gamma_1')^2 + \gamma_1'' (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 \gamma_1'' - \gamma_1' \gamma_2' \gamma_2'')}{s^2} \\
&= \Delta_2 \frac{(\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2'') \gamma_2' (\gamma_1'' \gamma_2' - \gamma_1' \gamma_2'')}{s^2} \\
&= -\Delta_2 \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \gamma_1' s s_-'' - \Delta_1 \gamma_{1,-}''' s^2 &= \Delta_1 (\gamma_1' s s_-'' - \gamma_{1,-}''' s^2) \\
&= \Delta_1 \left( \gamma_1' s \left( \frac{\langle \gamma', \gamma_-''' \rangle s^2 + (\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^3} \right) - \gamma_{1,-}''' s^2 \right) \\
&= \Delta_1 \left( \gamma_1' \langle \gamma', \gamma_-''' \rangle + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} - \gamma_{1,-}''' s^2 \right) \\
&= \Delta_1 \left( \gamma_1' (\gamma_1' \gamma_{1,-}''' + \gamma_2' \gamma_{2,-}''') + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} - \gamma_{1,-}''' ((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2) \right) \\
&= \Delta_1 \left( (\gamma_1')^2 \gamma_{1,-}''' + \gamma_1' \gamma_2' \gamma_{2,-}''' + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} - \gamma_{1,-}''' (\gamma_1')^2 - \gamma_{1,-}''' (\gamma_2')^2 \right) \\
&= \Delta_1 \left( \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} + \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right).
\end{aligned}$$

Выпишем разложение частной производной вдоль диффеоморфизма, затем вынесем за скобки  $\Delta_1$  и, используя условия (4.1), сократим числитель и знаменатель на  $(\gamma_1')^2 \gamma_2' \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \left( (\gamma_1')^2 \gamma_2' \left( -\Delta_1 \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \right. \right. \\
&\quad + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + \Delta_1 \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} + \Delta_1 \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \\
&\quad \left. \left. - \Delta_2 \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) + o(\Delta_1) \right) \\
&\quad \cdot \left( 2(\gamma_1')^4 (\gamma_2')^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1) (\gamma_1')^3 \gamma_2' (2\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \right)^{-1} \\
&= \Delta_1 \left( -\gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta_1 \Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta_1 \Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma_-''))^2}{s^2} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') - \frac{\Delta_2 \gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{\Delta_1 s^2} + \varepsilon(\Delta_1) \Bigg) \\ \left( 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)(\gamma_1')(2\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \right)^{-1}.$$

Найдем предел дроби, стоящей сомножителем после приращения  $\Delta_1$ . При его вычислении учтем разложения (4.7) и (4.8), из которых, в частности, следуют предельные равенства

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\lambda, \quad \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta_1} = 1 - \lambda, \quad \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\lambda}{1 - \lambda}.$$

В результате получаем:

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \left( -\gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta_1 \Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\Delta_1^2 - 3\Delta \Delta_1}{3\Delta^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right) \\ \left( 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)(\gamma_1')(2\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \right)^{-1} \\ + \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \left( \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') - \frac{\Delta_2 \gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \\ \left( 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' + 2(\Delta_2 - \Delta_1)(\gamma_1')(2\gamma_2' \gamma_1'' + \gamma_1' \gamma_2'') \right)^{-1} \\ = \left( -\gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{-\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda - 2}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right. \\ \left. + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \left( 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' \right)^{-1} \\ = \left( -\gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{-\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right. \\ \left. + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \left( 2(\gamma_1')^2 \gamma_2' \right)^{-1}. \tag{4.16}$$

Получили линейную асимптотику функции  $\frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1}$  слева от  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \sim C_1(t_0 - t_1), \quad C_1 = \text{const}, \quad t_1 \rightarrow t_0 - 0.$$

Здесь числовой коэффициент  $C_1$  в разложении равен пределу (4.16). Отсюда следует, что

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} = 0.$$

Тем самым обосновано первое равенство в (4.3).

Далее обратимся к  $\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_2}$ . Поскольку функция  $G = G(t_1, t_2)$  симметрична, то ее частные производные получаются перестановкой переменных, здесь

$$\frac{\partial G(t_2, t_1)}{\partial t_2} = \frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_1}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\det(\gamma'(t_2), \gamma(t_1) - \gamma(t_2))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} - \frac{(s(t_1))^2 \det(\gamma'(t_2), \gamma''(t_2))}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2} \\ + \frac{s(t_1)(s(t_2)(\gamma_2''(t_2)\gamma_1'(t_1) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1''(t_2)) - s'(t_2)(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)))}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2}.$$

Примем обозначения:

$$\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_2} = q_1(t_1, t_2) - q_2(t_1, t_2) + q_3(t_1, t_2),$$

где

$$q_1(t_1, t_2) = \frac{q_{11}(t_1, t_2)}{q_{12}(t_1, t_2)}, \quad q_2(t_1, t_2) = \frac{q_{21}(t_1, t_2)}{q_{22}(t_1, t_2)}, \quad q_3(t_1, t_2) = \frac{q_{31}(t_1, t_2)}{q_{32}(t_1, t_2)}$$

– соответствующие дроби в разложении. Существенное облегчение при построении аппроксимаций этих дробей доставляет симметрия математической модели. В силу симметрии здесь при формировании разложений компонент  $\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_2}$  следует использовать соответствующие компоненты  $\frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_1}$ , заменяя в них приращение  $\Delta_2$  на  $-\Delta_1$ ,  $\Delta_1$  на  $-\Delta_2$ ,  $\Delta$  на  $-\Delta$ ,  $\gamma'''_{i,-}$  на  $\gamma'''_{i,+}$ ,  $\gamma'''_{i,+}$  на  $\gamma'''_{i,-}$ ,  $i = 1, 2$ .

Имеем

$$\det(\gamma'(t_2), \gamma(t_1) - \gamma(t_2)) = \Delta^2 \left( \frac{1}{2} \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) + \frac{3\Delta\Delta_2^2 - \Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) \right) + o(\Delta_{12}^3).$$

Тогда

$$q_1(t_1, t_2) = \frac{\Delta^2 \left( \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{2} + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) \right) + o(\Delta_{12}^3)}{\Delta^2 ((\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1) + o(\Delta_{12}^3)} = \frac{\frac{\det(\gamma', \gamma'')}{2} + \frac{\Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) + o(\Delta_{12})}{(\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 + o(\Delta_{12})}.$$

Аппроксимация числителя второй дроби  $q_2(t_1, t_2)$ :

$$g_{21}(t_1, t_2) = (s(t_1))^2 \det(\gamma'(t_2), \gamma''(t_2)) = s^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_2 s^2 \det(\gamma', \gamma'''_+) - 2\Delta_1 s s' \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12}).$$

Аппроксимация числителя третьей дроби  $g_3(t_1, t_2)$ :

$$q_{31}(t_1, t_2) = \gamma''_2 \gamma'_1 s^2 + \gamma'_2 \gamma''_1 s^2 - 2\gamma'_2 \gamma'_1 s s' + 2\Delta_1 \gamma'_2 \gamma'_1 (s')^2 - 2\Delta_1 \gamma''_1 \gamma''_2 s^2 + \Delta_2 \gamma'_1 \gamma''_{2,+} s^2 + \Delta_2 \gamma'_2 \gamma'''_{1,+} s^2 - 2\Delta_2 \gamma'_2 \gamma'_1 s s''_+ + o(\Delta_{12}).$$

Числитель дроби

$$-q_2(t_1, t_2) + q_3(t_1, t_2) = \frac{-q_{21}(t_1, t_2) + q_{31}(t_1, t_2)}{q_{22}(t_1, t_2)}$$

имеет вид:

$$-q_{21}(t_1, t_2) + q_{31}(t_1, t_2) = -2(\gamma'_2)^2 \det(\gamma', \gamma'') + 2\Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - 2\Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 \langle \gamma', \gamma'' \rangle + 2\Delta_1 \gamma'_2 \gamma'_1 (s')^2 + 2\Delta_2 \gamma'_2 \gamma'''_{1,+} s^2 - 2\Delta_2 \gamma'_2 \gamma'_1 s s''_+ + o(\Delta_{12}).$$

После сокращения на 2 числителя и знаменателя дроби, стоящей вторым слагаемым получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= q_1(t_1, t_2) - q_2(t_1, t_2) + q_3(t_1, t_2) \\ &= \frac{\frac{\det(\gamma', \gamma'')}{2} - \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) + \frac{3\Delta\Delta_2^2 - \Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) + o(\Delta_{12})}{(\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma'_1 \gamma''_1 + o(\Delta_{12})} \\ &\quad + \left( -(\gamma'_2)^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1 \gamma'_2 \gamma''_1 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \right. \\ &\quad \left. + \Delta_1 \gamma'_2 \gamma'_1 (s')^2 + \Delta_2 \gamma'_2 \gamma'''_{1,+} s^2 - \Delta_2 \gamma'_2 \gamma'_1 s s''_+ + o(\Delta_{12}) \right) \end{aligned}$$

$$(2(\gamma'_1\gamma'_2)^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)\gamma'_1\gamma'_2(\gamma'_2\gamma''_1 + \gamma'_1\gamma''_2) + o(\Delta_{12}))^{-1}.$$

Аппроксимации дробей в разложении согласованы по порядку. Перемножением соответствующих 1-струй найдем аппроксимации числителя и знаменателя результирующей дроби:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\Delta_1^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_-) + \frac{3\Delta\Delta_2^2 - \Delta_2^3}{6\Delta^2} \det(\gamma', \gamma'''_+) \right) \\ & \otimes \left( 2(\gamma'_1\gamma'_2)^2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)\gamma'_1\gamma'_2(\gamma'_2\gamma''_1 + \gamma'_1\gamma''_2) \right) + \left( (\gamma'_1)^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)\gamma'_1\gamma''_1 \right) \\ & \otimes \left( -(\gamma'_2)^2 \det(\gamma', \gamma'') + \Delta_1\gamma'_2\gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \Delta_1\gamma'_2\gamma''_1 \langle \gamma', \gamma'' \rangle + \Delta_1\gamma'_2\gamma'_1 (s')^2 \right. \\ & \quad \left. + \Delta_2\gamma'_2\gamma''_{1,+} s^2 - \Delta_2\gamma'_2\gamma'_1 s s'_+ \right) \\ & = (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 \left( \Delta_2\gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\Delta_1^3}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) - \frac{\Delta_2^3 - 3\Delta\Delta_2^2}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) \right. \\ & \quad \left. - \Delta_2\gamma'_1 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \Delta_2\gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) + \Delta_1 \frac{\gamma'_2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \\ & = (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 \left( -\Delta_1\gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) \right. \\ & \quad \left. + \Delta_1\gamma'_1 s s'_- - \Delta_1\gamma''_{1,-} s^2 + \Delta_2\gamma''_1 \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \Delta_2\gamma'_1 (s')^2 \right) \\ & = (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 \left( -\Delta_1\gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\Delta_2^3}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\Delta_1^3 - 3\Delta\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) \right. \\ & \quad \left. + \Delta_1\gamma'_1 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \Delta_1\gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) - \Delta_2 \frac{\gamma'_2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Тогда разложение частной производной после сокращения на  $(\gamma'_1)^2 \gamma'_2 \neq 0$  и вынесения за скобки  $\Delta_1$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} & = \Delta_1 \left( \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) - \frac{\Delta_2^3 - 3\Delta\Delta_2^2}{3\Delta_1\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma'_1 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\gamma'_2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) + \varepsilon(\Delta_1) \right) \\ & \quad (2(\gamma'_1)^2 \gamma'_2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)\gamma'_1(2\gamma'_2\gamma''_1 + \gamma'_1\gamma''_2) + \varepsilon(\Delta_1))^{-1}. \end{aligned}$$

Вычислим предел дроби, руководствуясь (4.7), (4.8):

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \left( \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\Delta_1^2}{3\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) - \frac{\Delta_2^3 - 3\Delta\Delta_2^2}{3\Delta_1\Delta^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma'_1 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) + \frac{\gamma'_2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) + \varepsilon(\Delta_1) \right) \\ & \quad (2(\gamma'_1)^2 \gamma'_2 + 2(\Delta_2 - \Delta_1)\gamma'_1(2\gamma'_2\gamma''_1 + \gamma'_1\gamma''_2) + \varepsilon(\Delta_1))^{-1} \tag{4.17} \\ & = \left( -\lambda\gamma''_2 \det(\gamma', \gamma'') - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_-) + \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma'''_+) \right. \\ & \quad \left. + \lambda\gamma'_1 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \frac{\gamma'_2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) (2(\gamma'_1)^2 \gamma'_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Получили эквивалентность функции  $\frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2}$  и линейной функции слева от  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \sim C_2(t_0 - t_1), \quad C_2 = \text{const}, \quad t_1 \rightarrow t_0 - 0.$$

Числовой коэффициент  $C_2$  в разложении равен пределу (4.17). Отсюда следует

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial G(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} = 0.$$

Тем самым обосновано второе равенство в (4.3).

Обратимся к условию (4.6), которое после подстановки коэффициентов (4.16) и (4.17), приведения подобных членов в числителе и знаменателе, принимает вид:

$$\begin{aligned} \lambda = & \left( -\gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{-\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \right. \\ & \left. + \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \\ & \left( -\lambda \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \frac{1}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \right. \\ & \left. + \lambda \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') - \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \\ & - \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \\ = & -\lambda^2 \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + \lambda \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \\ & + \lambda^2 \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') + \frac{\lambda^3}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') - \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') \\ & - \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} + \lambda^2 \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') \\ & + \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') - \lambda \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda}{3(1-\lambda)^2} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \\ & - \lambda^2 \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} = 0. \end{aligned}$$

Также выполнено:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \left( \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} - \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 3}{3(1-\lambda)^2} \right) \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') \\ & + \left( \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} - \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} \right) \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + (\lambda^2 + 1) \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') \\ & - (\lambda^2 + 1) \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - 2\lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} - \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 3}{3(1-\lambda)^2} = -\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 3}{3(1-\lambda)^2} = -\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{3(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda-3}{3(1-\lambda)},$$

$$\frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2} - \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 1}{3(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}}{-(1-\lambda)^2} = \frac{(\lambda - \frac{1}{3})(\lambda-1)}{-(1-\lambda)^2} = \frac{3\lambda-1}{3(1-\lambda)},$$

то

$$\lambda^2 \frac{\lambda-3}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda-1}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''')$$

$$+ (\lambda^2 + 1) \left( \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} \right) - 2\lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} = 0.$$

Осуществим алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \gamma_1' \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} &= \det(\gamma', \gamma'') \left( \gamma_2'' - \gamma_1' \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{s^2} \right) \\ &= \det(\gamma', \gamma'') \frac{\gamma_2'' ((\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2) - \gamma_1' (\gamma_1' \gamma_2'' - \gamma_2' \gamma_1'')}{s^2} \\ &= \det(\gamma', \gamma'') \frac{\gamma_2'' (\gamma_1'')^2 + \gamma_2'' (\gamma_2'')^2 - \gamma_2'' (\gamma_1'')^2 + \gamma_1' \gamma_2' \gamma_1''}{s^2} \\ &= \det(\gamma', \gamma'') \frac{\gamma_2'' (\gamma_2'')^2 + \gamma_1' \gamma_2' \gamma_1''}{s^2} \\ &= \frac{\gamma_2' \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lambda^2 \frac{\lambda-3}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda-1}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') + (\lambda^2 + 1) \frac{\gamma_2' \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}$$

$$- 2\lambda \frac{\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{\lambda-3}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda-1}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''')$$

$$+ \frac{\gamma_2' \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda^2 + 1 - 2\lambda) = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{\lambda-3}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{3\lambda-1}{3(1-\lambda)} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''')$$

$$+ \frac{\gamma_2' \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda-1)^2 = 0,$$

$$\lambda^2 (\lambda-3) \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_+''') + (3\lambda-1) \gamma_2' \det(\gamma', \gamma_-''') = \frac{3\gamma_2' \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda-1)^3.$$

Сократим на  $\gamma_2' \neq 0$ :

$$\lambda^2 (\lambda-3) \det(\gamma', \gamma_+''') + (3\lambda-1) \det(\gamma', \gamma_-''') = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda-1)^3.$$

Равенство (4.4) доказано, что завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 5. СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ

**Следствие 5.1.** В условиях теоремы 4.1 равенство (4.4) эквивалентно равенству

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2) k'_+ + (3\lambda - 1) k'_- = 0, \quad (5.1)$$

где  $k'_- = k'(t_0 - 0)$  — односторонняя левая кривизна,  $k'_+ = k'(t_0 + 0)$  — односторонняя правая кривизна кривой  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{x}^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ .

*Доказательство.* В уравнении (4.4) соберем все члены в его левой части, приведем подобные члены относительно степеней левого маркера, затем перегруппируем:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\lambda - 3) \det(\gamma', \gamma_+''') + (3\lambda - 1) \det(\gamma', \gamma_-''') - \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda - 1)^3 = 0, \\ & \lambda^2 (\lambda - 3) \left( \det(\gamma', \gamma_+''') - \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} \right) \\ & \quad + (3\lambda - 1) \left( \det(\gamma', \gamma_-''') - \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} \right) = 0, \\ & \lambda^2 (\lambda - 3) (\det(\gamma', \gamma_+''') s^2 - 3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle) \\ & \quad + (3\lambda - 1) (\det(\gamma', \gamma_-''') s^2 - 3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Осталось заметить, что в квадратных скобках стоят числители соответствующих односторонних производных кривизны

$$k'_\pm = \frac{\det(\gamma', \gamma_\pm''') s^2 - 3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^5}.$$

Разделив левую часть (5.2) на  $s^5 \neq 0$ , получим (5.1).  $\square$

Введем в рассмотрение алгебраические уравнения, действительные корни которых взаимнообратны.

**Определение 5.1.** Для произвольной тройки действительных чисел  $a, b, c$  два алгебраических уравнения третьего порядка относительно  $z$

$$\begin{aligned} az^2(z - 3) + b(3z - 1) + c(z - 1)^3 &= 0, \\ bz^2(z - 3) + a(3z - 1) + c(z - 1)^3 &= 0, \end{aligned}$$

будем называть сопряженными уравнениями.

**Лемма 5.1.** Если  $\lambda \neq 0$  — действительный корень уравнения

$$az^2(z - 3) + b(3z - 1) + c(z - 1)^3 = 0, \quad (5.3)$$

то обратная величина  $\mu = \lambda^{-1}$  — корень ему сопряженного уравнения

$$bz^2(z - 3) + a(3z - 1) + c(z - 1)^3 = 0. \quad (5.4)$$

*Доказательство.* По условию  $\lambda = \mu^{-1}$  — корень уравнения (5.3):

$$a\mu^{-2}(\mu^{-1} - 3) + b(3\mu^{-1} - 1) + c(\mu^{-1} - 1)^3 = 0.$$

Преобразуем это равенство:

$$\begin{aligned} a \frac{1 - 3\mu}{\mu^3} + b \frac{3 - \mu}{\mu} + c \left( \frac{1 - \mu}{\mu} \right)^3 &= 0, \\ a \frac{1 - 3\mu}{\mu^3} + b \frac{3\mu^2 - \mu^3}{\mu^3} + c \frac{(1 - \mu)^3}{\mu^3} &= 0, \\ \frac{-a(3\mu - 1) - b(\mu^3 - 3\mu^2) - c(\mu - 1)^3}{\mu^3} &= 0. \end{aligned}$$

После сокращения на  $-\mu^{-3} \neq 0$ , получаем

$$b(\mu^3 - 3\mu^2) + a(3\mu - 1) + c(\mu - 1)^3 = 0.$$

Таким образом,  $\mu = \lambda^{-1}$  удовлетворяет уравнению (5.4).  $\square$

**Следствие 5.2.** В условиях теоремы 4.1 правый маркер  $\mu = t'_1(t_0 + 0)$  псевдовершины удовлетворяет равенству

$$\mu^2(\mu - 3) \det(\gamma', \gamma''') + (3\mu - 1) \det(\gamma', \gamma''_+) = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\mu - 1)^3. \quad (5.5)$$

*Доказательство.* В силу теоремы 4.1 левый маркер  $\lambda = t'_2(t_0 - 0)$  удовлетворяет равенству

$$\lambda^2(\lambda - 3) \det(\gamma', \gamma''_+) + (3\lambda - 1) \det(\gamma', \gamma''_-) = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2} (\lambda - 1)^3.$$

Другими словами, он является корнем уравнения (5.3) с коэффициентами

$$a = \det(\gamma', \gamma''_+), \quad b = \det(\gamma', \gamma''_-), \quad c = -\frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}.$$

Поскольку односторонние маркеры (см. (3.7)) взаимнообратны, здесь  $\mu = \lambda^{-1}$ , то в силу леммы 5.1 правый маркер  $\mu$  является корнем сопряженного уравнения (5.4), стало быть, он удовлетворяет равенству (5.5).  $\square$

**Следствие 5.3.** В условиях теоремы 4.1 правый маркер  $\mu = t'_1(t_0 + 0)$  псевдовершины удовлетворяет равенству

$$(\mu^3 - 3\mu^2) k'_- + (3\mu - 1) k'_+ = 0. \quad (5.6)$$

*Доказательство.* В силу следствия 5.2 правый маркер  $\mu$  удовлетворяет равенству (5.5). Заметим, что равенства (4.4) и (5.5) получаются друг из друга циклической заменой величин  $\lambda, \gamma''_+, \gamma''_-$  на  $\mu, \gamma''_-, \gamma''_+$  соответственно. Тогда, осуществив алгебраические преобразования над (5.5), аналогичные тем, что выполнялись в следствии 5.1 над равенством (4.4), получим (5.6).  $\square$

**Следствие 5.4.** В условиях теоремы 4.1 найдутся строго отделенные от нуля коэффициенты выпуклой комбинации

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$

такие, что

$$\alpha \det(\gamma', \gamma''_+) + \beta \det(\gamma', \gamma''_-) = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}, \quad (5.7)$$

$$\alpha k'_+ + \beta k'_- = 0. \quad (5.8)$$

*Доказательство.* Коэффициенты находятся конструктивно. Обратимся к равенству (4.4). Согласно формуле бинома Ньютона

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = \lambda^2(\lambda - 3) + (3\lambda - 1).$$

Поскольку левый маркер  $\lambda \leq 0$ , то

$$(\lambda - 1)^3 < 0, \quad \lambda^2(\lambda - 3) < 0, \quad (3\lambda - 1) < 0.$$

Поделим обе части равенства (4.4) на  $(\lambda - 1)^3 < 0$ , тем самым нормировав коэффициенты перед определителями  $\det(\gamma', \gamma''_+)$  и  $\det(\gamma', \gamma''_-)$ :

$$\frac{\lambda^2(\lambda - 3)}{(\lambda - 1)^3} \det(\gamma', \gamma''_+) + \frac{3\lambda - 1}{(\lambda - 1)^3} \det(\gamma', \gamma''_-) = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}.$$

Получили разложение (5.7) с выпуклыми строго положительными коэффициентами, зависящими от левого маркера. Здесь

$$\alpha = \alpha(\lambda) = \frac{\lambda^2(\lambda-3)}{(\lambda-1)^3} > 0, \quad \beta = \beta(\lambda) = \frac{3\lambda-1}{(\lambda-1)^3} > 0, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (5.9)$$

Равенства (5.8) получаются делением обеих частей равенства (5.1) на тот же нормирующий коэффициент  $(\lambda-1)^3 < 0$ . При этом коэффициенты при односторонних кривизнах совпадают с соответствующими коэффициентами (5.9).

Далее, обратившись к (5.5), найдем его представление через выпуклую комбинацию, зависящую от правого маркера  $\mu$ . Поделим обе части этого равенства на нормирующий член

$$(\mu-1)^3 = \mu^3 - 3\mu^2 + 3\mu - 1 = \mu^2(\mu-3) + (3\mu-1).$$

Поскольку правый маркер  $\mu \leq 0$ , то

$$(\mu-1)^3 < 0, \quad \mu^2(\mu-3) < 0, \quad 3\mu-1 < 0.$$

Получаем

$$\frac{3\mu-1}{(\mu-1)^3} \det(\gamma', \gamma_+''') + \frac{\mu^2(\mu-3)}{(\mu-1)^3} \det(\gamma', \gamma_-''') = \frac{3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s^2}. \quad (5.10)$$

Обозначим

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mu) = \frac{3\mu-1}{(\mu-1)^3}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\mu) = \frac{\mu^2(\mu-3)}{(\mu-1)^3}. \quad (5.11)$$

Здесь  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $\tilde{\beta} > 0$ ,  $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = 1$ . Формула (5.10) является представлением основного равенства теоремы 4.1 с помощью выпуклых коэффициентов, зависящих от правого маркера. Непосредственной подстановкой  $\mu = \lambda^{-1}$  в формулы (5.11) убеждаемся, что  $\tilde{\alpha}(\mu) = \alpha(\lambda)$ ,  $\tilde{\beta}(\mu) = \beta(\lambda)$ , т.е. формула (5.10) совпадает с (5.7). Аналогично конструируется равенство с односторонними производными кривизны с коэффициентами, зависящими от  $\mu = \lambda^{-1}$ , которое эквивалентно равенству (5.8):

$$\tilde{\alpha}k'_+ + \tilde{\beta}k'_- = 0. \quad (5.12)$$

В (5.12) коэффициенты вычисляются по формулам (5.11).  $\square$

## 6. ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле (2.1) для случая, когда краевое множество  $M$  ограничено параметрически заданной кривой

$$\Gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in T \},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= r(t) \cos t, \quad \gamma_2(t) = r(t) \sin t, \quad t \in T = [0, 2\pi], \\ r(t) &= \begin{cases} 1.5 - 0.5 \cos^2 2t - 0.1 \cos^3 2t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right], \\ 1.5 - 0.5 \cos^2 2t + 0.4 \cos^3 2t, & t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Граница  $\Gamma = \partial M$  краевого множества дважды непрерывно дифференцируема и имеет четыре точки, отвечающие моментам  $t = t_0 \in T^0$ ,  $T^0 = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ , в которых нарушается гладкость кривизны. Указанные точки являются псевдовершинами краевого множества. С помощью аналитических вычислений не трудно установить, что все они являются нестационарными по обеим координатам, а вычисленные в них односторонние производные третьего порядка конечны и не равны друг другу (здесь реализуется разрыв

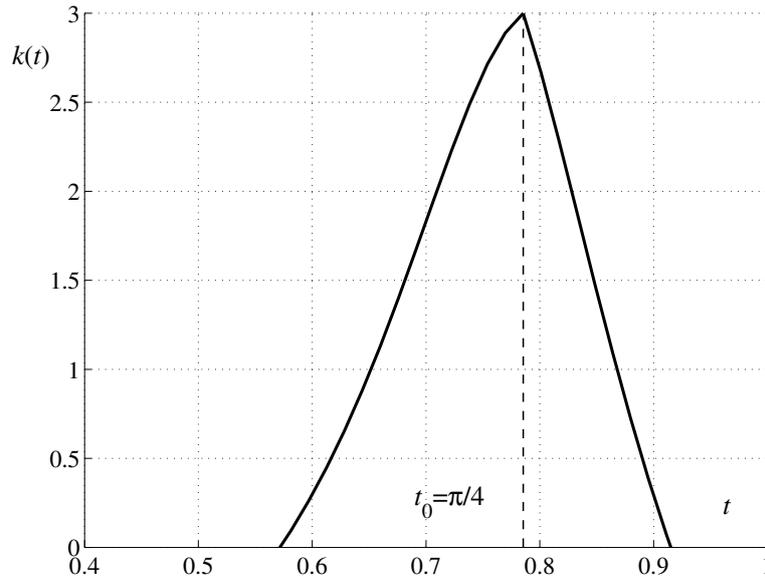


Рис. 1: График кривизны  $k(t)$  в окрестности псевдовершины при  $t_0 = \pi/4$

с конечным скачком производной третьего порядка функции полярного радиуса  $r(t)$ . Таким образом, выполняются условия теоремы 4.1. В качестве иллюстрации на рис. 1. приведен график кривизны  $k(t)$  в окрестности одной из псевдовершин, когда  $t_0 = \pi/4$ . Для этой точки  $\gamma'_1(t_0) = -1/\sqrt{2} \neq 0$ ,  $\gamma'_2(t_0) = 1/\sqrt{2} \neq 0$ , кривизна непрерывна, ее значение  $k(t_0) = 3$ . При этом в указанной точке кривизна является негладкой функцией, здесь односторонние производные кривизны  $k'(t_0 - 0) = 4.8$ ,  $k'(t_0 + 0) = -19.2$ .

Заметим, что нахождение в точной форме локальных диффеоморфизмов, определяющих псевдовершины, весьма затруднен. Их отыскание проведено численно-аналитическими методами (их описание см., например, в [15]). Графики взаимно обратных локальных диффеоморфизмов  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$ , определяющих псевдовершину при  $t_0 = \pi/4$ , приведены на Рис. 2.

Важно подчеркнуть, что для построения ветвей сингулярного множества необходимо в каждой из псевдовершин найти значение хотя бы одного из двух односторонних маркеров. Здесь привлекается уравнение (5.1) для отыскания левого маркера. Так, например, в псевдовершине, отвечающей  $t_0 = \pi/4$ , при известных значениях односторонних производных кривизны уравнение (5.1) принимает вид

$$-19.2 (\lambda^3 - 3\lambda^2) + 4.8 (3\lambda - 1) = 0,$$

а после упрощения

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 0.75\lambda + 0.25 = 0.$$

Массив корней уравнения, вычисленных приближенными методами, равен

$$\Lambda = \{-0.4028, 0.19339, 3.20942\}.$$

Значение левого маркера псевдовершины равно отрицательному корню, здесь

$$\lambda \approx -0.4028.$$

С точки зрения геометрии левый маркер равен тангенсу угла наклона графика  $t_2 = t_2(t_1)$  по отношению к положительному направлению оси  $t_1$ . Соответственно, правый маркер  $\mu = \frac{1}{\lambda} \approx -2.4826$  — тангенс угла наклона графика  $t_1 = t_1(t_2)$  по отношению к положительному направлению оси  $t_2$ .

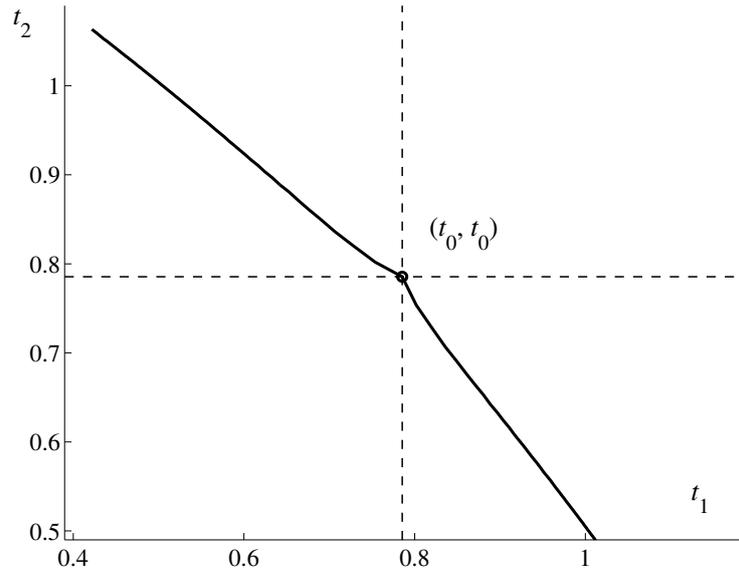


Рис. 2: Склейка графиков локальных диффеоморфизмов  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$ , определяющих псевдовершину кривой  $\Gamma = \partial M$  при  $t_0 = \pi/4$

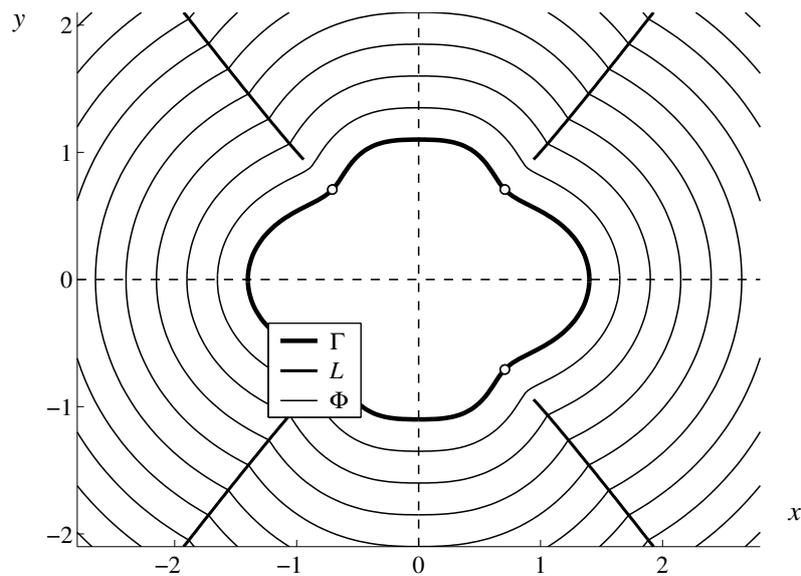
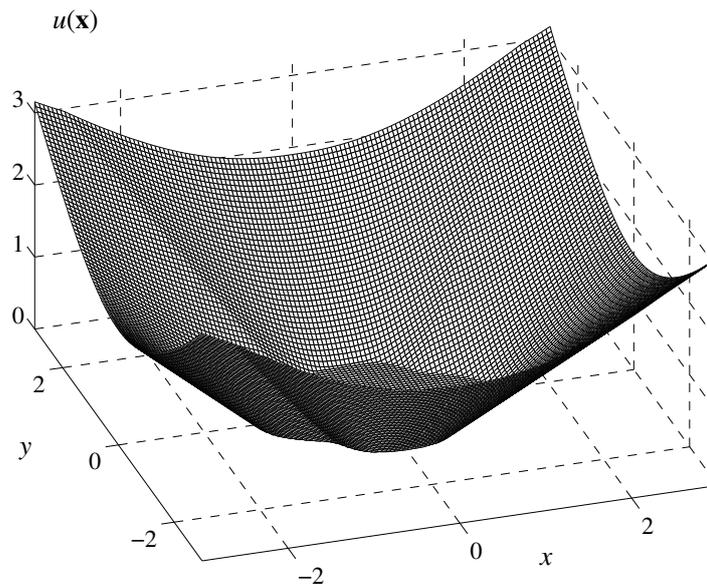


Рис. 3: Граница  $\Gamma$  краевого множества, сингулярное множество  $L$  и линии уровня  $\Phi$  минимаксного решения  $u(\mathbf{x})$  (графическими маркерами в виде кругов малого радиуса отмечены псевдовершины множества)

Далее, зная в каждой псевдовершине ее маркеры и соответствующие им локальные диффеоморфизмы, конструируем ветви сингулярного множества, решая систему уравнений (3.4). Другой подход к построению ветвей сингулярного множества связан с интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых краевые условия определяются маркерами псевдовершины, а динамика – локальными диффеоморфизмами (см. [15]). На Рис. 3 показаны найденные приближенными методами ветви сингулярного множества и карта линий уровня минимаксного решения задачи (2.1). На Рис. 4 представлена аппроксимация графика минимаксного решения, которое, заметим, терпит «градиентную катастрофу» в точках сингулярного множества.

Рис. 4: График минимаксного решения  $u(\mathbf{x})$ 

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.А. Олейник. *Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений* // УМН. **12**:3(75), 3–73 (1957).
2. С.Н. Кружков. *Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала I* // Матем. сборник. **98**:3, 450–493 (1975).
3. M.G. Crandall, P.L. Lions. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* // *em Trans. Amer. Math. Soc.* **277**:1, 1–42 (1983).
4. А.И. Субботин. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий. 336 с. 2003.
5. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука. 1974.
6. Г.В. Папаков, А.М. Тарасьев, А.А. Успенский. *Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби* // ПММ. **60**:4, 570–581 (1996).
7. E.K. Kostousova. *On feedback target control for uncertain discrete-time systems through polyhedral techniques* // *Вычислительные технологии*. **22**:2, 19–36 (2017).
8. Б.И. Ананьев, М.И. Гусев, Т.Ф. Филиппова. *Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью*. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2018.
9. V.N. Ushakov, A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev. *Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation* // *Proc. Steklov Inst. Math.* **263**:2, 191–201 (2008).
10. А.А. Успенский, П.Д. Лебедев. *Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой* // *Тр. ИММ УрО РАН*. **14**:4, 82–100 (2008).
11. А.А. Uspenskii, P.D. Lebedev. *On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution* // *Proc. Steklov Inst. Math.* **272**:1, 255–270 (2011).
12. А.А. Успенский. *Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрого действия* // *Тр. ИММ УрО РАН*. **20**:3, 276–290 (2014).
13. А.А. Успенский. *Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала* // *Тр. ИММ УрО РАН*. **21**:1, 250–263 (2015).
14. А.А. Успенский, П.Д. Лебедев. *Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества* // *Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки*. **28**:1, 31–46 (2018).

15. П.Д. Лебедев, А.А. Успенский. *Построение решения задачи управления по быстрдействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. **53**, 98–114 (2019).
16. В.Н. Ушаков, А.А. Успенский. *Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **26**:1, 95–120 (2016).
17. Дж. Брус, П. Джиблин. *Кривые и особенности*. М.: Мир. 1988.
18. Т. Брекер, Л. Ландер. *Дифференцируемые ростки и катастрофы*. М.: Мир. 1977.
19. А.Р. Алимов, И.Г. Царьков. *Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения* // УМН. **71**:1, 3–84 (2016).
20. Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин. *Некоторые свойства чебышевских множеств* // Докл. АН СССР. **118**:1, 17–19 (1958).
21. V.D. Sedykh. *On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in  $\mathbb{R}^k$*  // Advanced Studies in Pure Mathematics Singularity Theory and Its Applications. **43**, 401–419 (2006).
22. D.A. Serkov. *On fixed point theory and its applications to equilibrium models* // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. **9**:1, 20–31 (2016).
23. В.И. Арнольд. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: «Фазис». 1996.
24. Р. Айзекс. *Дифференциальные игры*. М.: Мир. 1967.

Александр Александрович Успенский,  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,  
ул. С. Ковалевской, 16,  
620990, г. Екатеринбург, Россия  
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Павел Дмитриевич Лебедев,  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,  
ул. С. Ковалевской, 16,  
620990, г. Екатеринбург, Россия  
E-mail: pleb@yandex.ru