ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 58-81.

УДК 517.5

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА, А.И. РАФИКОВ

Аннотация. В работе рассматриваются комплексные последовательности уточненного порядка $\rho(r)$. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых из последовательности $\Lambda^2 \supseteq \Lambda^1$ можно выделить правильно распределенное множество Λ с заданной угловой плотностью, содержащее Λ^1. Эти результаты включают в себя большую часть известных результатов, связанных с построением правильно распределенного множества.

Рассматриваются различные применения указанных результатов. На их основе получены теоремы о расщеплении целых функций уточненного порядка $\rho(r)$. Кроме того, найдено асимптотическое представление целой функции с измеримой последовательностью нулей. Оно обобщает классическое представление Б.Я. Левина функций с правильно распределенным нулевым множеством на случай функций с измеримым нулевым множеством. Указанное представление опирается на полученное представление функций, нулевое множество которых имеет нулевую плотность. Его следствием является усиление известного результата М. Картрайт о типе функции с нулевым множеством, имеющим нулевую плотность. Другим следствием является способ построения целых функций экспоненциального типа с заданным индикатором и минимально возможной плотностью – нулевой.

Ключевые слова: последовательность, уточненный порядок, угловая плотность, расщепление функций, целая функция, индикатор.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

В работе исследуются условия существования правильно распределенного множества ([1], гл. II, §1), которое является частью заданной последовательности комплексных чисел и содержит заданную подпоследовательность этой последовательности.

На этой основе изучаются задачи расщепления целых функций и их асимптотического поведения. Полученные результаты применяются также к проблемам полноты систем экспоненциальных мономов в выпуклых областях, представления функций, аналитических на выпуклых компактах, и к проблеме фундаментального принципа для инвариантных подпространств функций.

Задачи построения правильно распределенных множеств (множеств с угловой плотностью и регулярных множеств) рассматривались многими авторами. В этой связи отметим монографии [1] (гл. II, §4) и [2] (гл. I, §3, п. 1, 2, 4), а также работы [3]–[8]. Полученные в них результаты использовались в целях построения целых функций с заданным индикатором, изучения их асимптотического поведения, возможности их расщепления, для

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, A.I. Rafikov, Invariant subspaces in the half-plane.

© Кривошеев А.С., Кривошеева О.А., Рафиков А.И. 2021.

Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Поступила 28 марта 2021 г.

исследования полноты систем экспонент, представления функций рядами экспонент (см., напр., [8], [9]) и др.

Наиболее общие результаты, связанные с построением правильно распределенных множеств порядка один получены в [8]. В данной работе эти результаты распространяются на комплексные последовательности произвольного уточненного порядка $\rho(r)$.

Во втором параграфе получен критерий того, когда из последовательности Λ_2 можно выделить измеримое множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее заданную подпоследовательность Λ_1 последовательности Λ_2 (теорема 2.1). В теореме 2.2 приводятся условия, при которых из последовательности $\Lambda_2 \supseteq \Lambda^1$ можно выделить правильно распределенное множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее Λ^1. Эти результаты содержат в себе большую часть результатов, отмеченных выше, связанных с построением правильно распределенного множества.

В параграфе 3 полученные результаты применяются к задаче расщепления целых функций порядка $\rho(r)$ (теоремы 3.1, 3.2, 3.3).

В заключительном параграфе изучается асимптотическое поведение целых функций порядка $\rho(r)$ с нулевым множеством нулевой плотности (лемма 4.1). Следствием леммы 4.1 является усиление известного результата М. Картрайт ([10], [2], гл. I, §1, теорема 1.1.8) о типе функции с нулевым множеством, имеющим нулевую плотность (следствия 4.1 и 4.2). Другим следствием леммы 4.1 является способ построения целых функций порядка $\rho(r)$ с заданным индикатором и минимально возможной плотностью – нулевой (следствие 4.3). Наконец, в теореме 4.1 получено асимптотическое представление целой функции порядка $\rho(r)$ с измеримой последовательностью нулей. Оно обобщает классическое представление Б.Я. Левина функций с правильно распределенным нулевым множеством на случай функций с измеримым нулевым множеством.

2. Построение правильно распределенных множеств

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Будем рассматривать последовательности уточненного порядка $\rho(r)$ ([1], гл. I, §12). Напомним основные свойства $\rho(r)$. Функция $\rho(r)$, $r > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0, \qquad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0, \tag{2.1}$$

называется уточненным порядком. Имеем:

$$(r^{\rho(r)})' = r^{\rho(r)}(\rho'(r)\ln r + \frac{\rho(r)}{r}) = r^{\rho(r)-1}(r\rho'(r)\ln r + \rho(r)).$$

Таким образом, в силу (2.1) функция $r^{\rho(r)}$ возрастает для достаточно больших r. Положим $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$. Функция $L(r)$ является медленно растущей ([1], гл. I, §12, лемма 5), т.е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1 \tag{2.2}$$

равномерно на любом отрезке $0 < a \leqslant c \leqslant b < \infty$. Из (2.2) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $c \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$(1-\varepsilon)c^{\rho}r^{\rho(r)} \leqslant (cr)^{\rho(cr)} \leqslant (1+\varepsilon)c^{\rho}r^{\rho(r)}, \quad r \geq R(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Верхней плотностью последовательности Λ (при порядке $\rho(r)$) называется величина

$$\bar{n}(\Lambda, \rho(r)) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r^{\rho(r)}} < \infty,$$

где $n(r,\Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k) в круге $B(0,r)$ (радиуса r с центром в нуле). Говорят, что последовательность Λ имеет плотность $n(\Lambda,\rho(r))$ (измерима), если существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r^{\rho(r)}}=n(\Lambda,\rho(r))<\infty.$$

Пусть последовательность $\Lambda_1=\{\xi_p\}_{p=1}^{\infty}$, $|\xi_1|\leqslant|\xi_2|\leqslant\cdots$, состоит из точек λ_k, $k\geq 1$, причем, каждая λ_k встречается в Λ_1 ровно n_k раз. Тогда для любого $\tau>1$ в силу (2.3) имеем:

$$\varlimsup_{p\to\infty}\frac{p}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}\leqslant\varlimsup_{p\to\infty}\frac{n(\tau|\xi_p|,\Lambda_1)}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}=\bar n(\Lambda,\rho(r))\varlimsup_{p\to\infty}\frac{(\tau|\xi_p|)^{\rho(\tau|\xi_p|)}}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}\leqslant\rho^{\rho}\bar n(\Lambda,\rho(r)).$$

Пусть $r>0$. Выберем номер $p(r)$ такой, что $|\xi_{p(r)}|\leqslant r<|\xi_{p(r)+1}|$. Тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r^{\rho(r)}}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{(p(r)+1)}{|\xi_{p(r)}|^{\rho(r)}}\leqslant\varlimsup_{p\to\infty}\frac{p}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}.$$

Таким образом,

$$\bar n(\Lambda,\rho(r))=\varlimsup_{p\to\infty}\frac{p}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}. \tag{2.4}$$

Если Λ имеет плотность, то аналогично получаем:

$$n(\Lambda,\rho(r))=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}}. \tag{2.5}$$

Положим

$$\bar n_0(\Lambda,\tau,\rho(r))=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n(\tau r,\Lambda)}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}},\quad \underline{n}_0(\Lambda,\tau,\rho(r))=\varliminf_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n(\tau r,\Lambda)}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}.$$

Максимальной и минимальной плотностью Λ называются соответственно величины

$$\bar n_0(\Lambda,\rho(r))=\varlimsup_{\tau\to1}\bar n_0(\Lambda,\tau,\rho(r)),\quad \underline{n}_0(\Lambda,\rho(r))=\varlimsup_{\tau\to1}\underline{n}_0(\Lambda,\tau,\rho(r)).$$

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$, $\lambda_k=r_ke^{i\varphi_k}$ и $\rho(r)$ — уточненный порядок. Положим

$$\Lambda^{\vartheta}=\{\eta_k,n_k\},\quad \eta_k=(r_k)^{\rho(r_k)}e^{i\varphi_k},\quad k\geq 1.$$

Вычислим различные плотности последовательности Λ^{ϑ} при уточненном порядке $\widetilde{\rho}(r)\equiv 1$. В силу (2.4), (2.5) и определения Λ^{ϑ} верны равенства

$$\bar n(\Lambda^{\vartheta},1)=\bar n(\Lambda,\rho(r)),\quad n(\Lambda^{\vartheta},1)=n(\Lambda,\rho(r)). \tag{2.6}$$

Далее, для любых τ, $\alpha\in(0,1)$ имеем:

$$\begin{aligned}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n(\tau r,\Lambda)}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}&=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})-n((\tau r)^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}\\&\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})-n(\alpha\tau^{\rho}r^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}\\&=\frac{1-\alpha\tau^{\rho}}{1-\tau^{\rho}}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{n(t,\Lambda^{\vartheta})-n(\alpha\tau^{\rho}t,\Lambda^{\vartheta})}{(1-\alpha\tau^{\rho})t}\\&=\frac{1-\alpha\tau^{\rho}}{1-\tau^{\rho}}\bar n_0(\Lambda,\alpha\tau^{\rho},1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\bar n_0(\Lambda,\rho(r))\leqslant\bar n_0(\Lambda^{\vartheta},1)$. С другой стороны,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n(\tau r,\Lambda)}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}\geq\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})-n(\alpha^{-1}\tau^{\rho}r^{\rho(r)},\Lambda^{\vartheta})}{(1-\tau^{\rho})r^{\rho(r)}}=\frac{1-\alpha^{-1}\tau^{\rho}}{1-\tau^{\rho}}\bar n_0(\Lambda,\alpha^{-1}\tau^{\rho},1).$$

Следовательно, $\bar{n}_0(\Lambda,\rho(r)) \ge \bar{n}_0(\Lambda^\vartheta, 1)$. Таким образом,

$$\bar{n}_0(\Lambda^\vartheta, 1) = \bar{n}_0(\Lambda, \rho(r)). \tag{2.7}$$

Аналогично получаем:

$$\underline{n}_0(\Lambda^\vartheta, 1) = \underline{n}_0(\Lambda, \rho(r)). \tag{2.8}$$

Если Λ измерима, то в силу (2.6)–(2.8) и леммы 2.1 в работе [8] имеем:

$$\underline{n}_0(\Lambda, \rho(r)) = \bar{n}_0(\Lambda, \rho(r)) = n(\Lambda, \rho(r)). \tag{2.9}$$

Рассмотрим теперь более точные характеристики последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Пусть φ, $\psi \in [-2\pi, 2\pi)$, $\psi - \varphi \in (0, 2\pi]$. Такие значения φ, ψ будем называть допустимыми. Положим

$$\Gamma(\varphi,\psi) = \{\lambda = te^{i\theta} : \theta \in (\varphi,\psi), t > 0\}.$$

Символом $\Lambda(\varphi,\psi)$ обозначим последовательность, состоящую из всех пар $\{\lambda_k, n_k\}$ таких, что $\lambda_k \in \Gamma(\varphi,\psi)$.

Говорят (см. [1], гл. II, §1), что Λ имеет угловую плотность, если для всех допустимых φ, ψ, за исключением не более чем счетного множества $\Phi_{\Lambda,\rho(r)}$ последовательность $\Lambda(\varphi,\psi)$ имеет плотность $n(\Lambda(\varphi,\psi),\rho(r))$. Число $\varphi \in \Phi_{\Lambda,\rho(r)} \setminus \{-2\pi\}$ тогда и только тогда, когда

$$\inf_{\beta>0} \bar{n}(\Lambda(\varphi-\beta, \varphi+\beta), \rho(r)) > 0.$$

Число -2π принадлежит или не принадлежит $\Phi_{\Lambda,\rho(r)}$ одновременно с $\varphi = 0$. Нетрудно заметить, что последовательность, имеющая угловую плотность, является измеримой.

Символом Σ обозначим класс неубывающих на $[-2\pi, 2\pi]$ функций $\omega(\varphi)$, обладающих следующими свойствами: $\omega(0) = 0$, функция ω непрерывна слева, $\omega(\varphi) = \omega(\varphi - 2\pi) - \omega(-2\pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Не более чем счетное множество точек разрыва монотонной функции ω обозначим $\Phi(\omega)$.

Пусть Λ имеет угловую плотность. Тогда она единственным образом определяет функцию $\omega_{\Lambda,\rho(r)} \in \Sigma$ по правилу: для φ_1, $\varphi_2 \in (-2\pi, 0) \setminus \Phi_{\Lambda,\rho(r)}$, $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi) \setminus \Phi_{\Lambda,\rho(r)}$

$$\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_1) = -\lim_{\varphi_2 \to 0} n(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2),\rho(r)), \quad \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi) = n(\Lambda(\varphi_1,\varphi),\rho(r)) + \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_1).$$

Точнее говоря, $\omega_{\Lambda,\rho(r)}$ единственным образом продолжается до функции из класса Σ, причем продолжение не зависит от φ_1. Нетрудно заметить, что множества $\Phi_{\Lambda,\rho(r)}$ и $\Phi(\omega_{\Lambda,\rho(r)})$ совпадают. Из определения $\omega_{\Lambda,\rho(r)}$ следует равенство

$$n(\Lambda(\varphi,\psi),\rho(r)) = \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\psi) - \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi) \tag{2.10}$$

для любых допустимых φ, $\psi \in \Phi(\omega_{\Lambda,\rho(r)})$. При этом

$$n(\Lambda,\rho(r)) = \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi + 2\pi) - \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi), \quad \varphi \in [-2\pi, 0).$$

Будем говорить, что последовательность Λ имеет угловую плотность $\omega \in \Sigma$, если она имеет угловую плотность и $\omega_{\Lambda,\rho(r)} = \omega$.

Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k^1, n_k\}_{k=1}^\infty$ и $\Lambda_2 = \{\lambda_j^2, m_j\}_{j=1}^\infty$. Будем говорить, что Λ_1 является подпоследовательностью Λ_2 (писать $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$), если существует набор индексов $j(k)$, $k \ge 1$, такой, что $\lambda_k^1 = \lambda_{j(k)}^2$ и $n_k \leqslant m_{j(k)}$, $k \ge 1$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, $\rho(r)$ — уточненный порядок и $\omega \in \Sigma$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Для любых допустимых φ, $\psi \in \Phi(\omega)$

$$\underline{n}_0(\Lambda_2(\varphi,\psi),\rho(r)) \ge \omega(\psi) - \omega(\varphi), \quad \bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi,\psi),\rho(r)) \leqslant \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

2. Существует Λ с угловой плотностью ω такая, что $\Lambda_1 \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_2$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности $(\Lambda_1)^\vartheta$ и $(\Lambda_2)^\vartheta$. Имеем: $(\Lambda_1)^\vartheta \subseteq (\Lambda_2)^\vartheta$. В силу (2.7) и (2.8) для любых допустимых φ, $\psi \in \Phi(\omega)$

$$\bar{n}_0((\Lambda_1)^\vartheta(\varphi,\psi),1) = \bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi,\psi),\rho(r)), \quad \underline{n}_0((\Lambda_2)^\vartheta(\varphi,\psi),1) = \underline{n}_0((\Lambda_2)^\vartheta(\varphi,\psi),\rho(r)).$$

По теореме 2.4 из работы [8] эквивалентны утверждения:

a) для любых допустимых φ, $\psi \in \Phi(\omega)$

$$\underline{n}_0((\Lambda_2)^\vartheta(\varphi,\psi),1) \geq \omega(\psi) - \omega(\varphi), \quad \bar{n}_0((\Lambda_1)^\vartheta(\varphi,\psi),1) \leqslant \omega(\psi) - \omega(\varphi);$$

b) существует Λ_0 с угловой плотностью ω такая, что $(\Lambda_1)^\vartheta \subseteq \Lambda_0 \subseteq (\Lambda_2)^\vartheta$.

Пусть Λ — подпоследовательность Λ_2 такая, что $\Lambda^\vartheta = \Lambda_0$. В силу (2.6) для любых допустимых φ, $\psi \in \Phi(\omega)$ верно равенство $n(\Lambda(\varphi,\psi),\rho(r)) = n(\Lambda_0(\varphi,\psi),1)$. Таким образом, с учетом эквивалентности утверждений a) и b) теорема доказана. □

Замечание 2.1. *В теореме 2.4 работы* [8] *рассматривается случай $\rho(r) \equiv 1$. Теорема 2.1 распространяет результат этой теоремы на случай произвольного уточненного порядка $\rho(r)$. Частными случаями теоремы 2.1 являются теорема 3 из работы* [4] *и теорема Полиа об измеримом ядре и измеримой оболочке* [3].

Напомним, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ называется правильно распределенным множеством (см. [3], гл. II, §1) при порядке $\rho(r) \to \rho$, если она имеет угловую плотность и при целом ρ дополнительно выполнено условие Линделефа, т.е. для некоторого числа $c \in \mathbb{C}$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{\rho-\rho(r)}\left(c + \frac{1}{\rho}N(r,\Lambda,\rho)\right), \quad N(r,\Lambda,\rho) = \sum_{|\lambda_k|<r} \frac{n_k}{(\lambda_k)^\rho}.$$

Если $|\lambda_k| \geq r$, $k \geq 1$, то $N(r,\Lambda,\rho) = 0$.

Далее дается ответ на вопрос, как в случае целого ρ последовательность с угловой плотностью «превратить» в правильно распределенное множество.

Лемма 2.1. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ имеет плотность $n(\Lambda,\rho(r)) = \tau \geq 0$ и $a > 1$. Тогда имеет место представление*

$$(r_1)^{\rho-\rho(r_1)} \sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau \ln\frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \varepsilon(r_1,r_2), \tag{2.11}$$

где $ar_1 \geq r_2 > r_1 > 0$ и $\varepsilon(r_1,r_2) \to 0$, $r_1 \to \infty$, равномерно по r_2.

Замечание 2.2. *Если в кольце $r_1 \leqslant |\lambda| < r_2$ нет точек λ_k, то считаем, что левая часть в этом равенстве равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\Lambda_1 = \{\xi_p\}$, $|\xi_1| \leqslant |\xi_2| \leqslant \cdots$, которая состоит из точек λ_k, $k \geq 1$, причем, каждая λ_k встречается в Λ_1 ровно n_k раз. Считаем, что $n(r,\Lambda_1) \to +\infty$, $r \to \infty$ (в противном случае утверждение леммы становится тривиальным). По условию Λ_1 имеет плотность τ, т.е. в силу ее определения и (2.5) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{p}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}} = \tau + \delta(p), \quad \delta(p) \to 0, \quad p \to \infty, \\ &\frac{n(r,\Lambda_1)}{r^{\rho(r)}} = \tau + \beta(r), \quad \beta(r) \to 0, \quad r \to \infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Пусть $\tau = 0$. Тогда с учетом (2.3) для всех $r_2 > r_1 > 0$, $r_2/r_1 \leqslant a$, получаем:

$$\sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|}} \leqslant \frac{1}{(r_1)^{\rho(r_1)}} \sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<ar_1} n_k = \frac{1}{(r_1)^{\rho(r_1)}}(n(ar_1,\Lambda) - n(r_1,\Lambda)) \to 0, \quad r_1 \to \infty.$$

Пусть теперь $\tau > 0$. Согласно представлению Л. Эйлера имеем:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \ln n + \gamma + \gamma(n), \quad \gamma(n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.13}$$

где γ — постоянная Эйлера. Отсюда с учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} = &\sum_{r_1 \leqslant |\xi_p| < r_2} \frac{1}{|\xi_p|^{\rho(|\xi_p|)}} = \sum_{r_1 \leqslant |\xi_p| < r_2} \frac{\tau + \delta(p)}{p} \\
=&\tau \sum_{p=n(r_1,\Lambda_1)+1}^{n(r_2,\Lambda_1)} \frac{1}{p} + \sum_{p=n(r_1,\Lambda_1)+1}^{n(r_2,\Lambda_1)} \frac{\delta(p)}{p} \\
=&\tau \ln \frac{n(r_2,\Lambda_1)}{n(r_1,\Lambda_1)} + \tau(\gamma(n(r_2,\Lambda_1)) - \gamma(n(r_1,\Lambda_1))) + \sum_{p=n(r_1,\Lambda_1)+1}^{n(r_2,\Lambda_1)} \frac{\delta(p)}{p} \\
=&\tau \ln \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \tau \left(\ln \frac{\tau + \beta(r_2)}{\tau + \beta(r_1)} + \gamma(n(r_2,\Lambda_1)) - \gamma(n(r_1,\Lambda_1)) \right) \\
&+ \sum_{p=n(r_1,\Lambda_1)+1}^{n(r_2,\Lambda_1)} \frac{\delta(p)}{p} = \tau \ln \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \varepsilon_0(r_1, r_2).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно (2.12) и (2.13) выберем номер p_0 такой, что $|\delta(p)| \leqslant \varepsilon$, $|\gamma(n)| \leqslant \varepsilon$, p, $n \geq p_0$. Согласно (2.12) выберем еще $r(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \ln \frac{\tau + \beta(r_2)}{\tau + \beta(r_1)} \right| \leqslant \varepsilon, \quad n(r_1, \Lambda_1) \geq p_0, \quad r_2 > r_1 > r(\varepsilon).$$

Тогда

$$|\varepsilon_0(r_1, r_2)| \leqslant 3\varepsilon\tau + \varepsilon \sum_{p=n(r_1,\Lambda_1)+1}^{n(ar_1,\Lambda_1)} \frac{1}{p} \leqslant 3\varepsilon\tau + \varepsilon \ln \frac{(ar_1)^{\rho(ar_1)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}}, \quad ar_1 \geq r_2 > r_1 > 0.$$

Отсюда с учетом (2.3) получаем: $\varepsilon_0(r_1, r_2) \to 0$, $r_1 \to \infty$, равномерно по r_2:

$$ar_1 \geq r_2 > r_1 > 0.$$

В силу (2.14)

$$b(r_1) \sum_{r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho}} \leqslant \tau \ln \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \varepsilon_0(r_1, r_2) \leqslant c(r_1) \sum_{r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho}}, \tag{2.15}$$

где

$$b(r_1) = \min_{r_1 \leqslant r \leqslant r_2} r^{\rho - \rho(r)}, \quad c(r_1) = \max_{r_1 \leqslant r \leqslant r_2} r^{\rho - \rho(r)}.$$

Из (2.2) следует, что

$$(1 - \varepsilon_0(r_1))(r_1)^{\rho - \rho(r_1)} \leqslant b(r_1) \leqslant c(r_1) \leqslant (1 + \varepsilon_0(r_1))(r_1)^{\rho - \rho(r_1)}, \tag{2.16}$$

где $\varepsilon_0(r_1) \to 0$, $r_1 \to \infty$. Согласно (2.3), средняя часть в неравенствах (2.14) ограничена при $r_1 \to \infty$. Таким образом, из (2.14)–(2.16) получаем (2.11). Лемма доказана. □

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\Lambda_1 = \{\xi_p, m_p\}$ и $\Lambda_2 = \{\varsigma_j, l_j\}$. Будем писать $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, если для каждого $k \geq 1$ существует $p \geq 1$ такое, что $\lambda_k = \xi_p$, либо существует $j \geq 1$ такое, что $\lambda_k = \varsigma_j$. При этом:

– если существует $p \geq 1$ такое, что $\lambda_k = \xi_p$ и $\lambda_k \neq \varsigma_j$ для любого $j \geq 1$, то $n_k = m_p$;

– если существует $j \geq 1$ такое, что $\lambda_k = \varsigma_j$ и $\lambda_k \neq \xi_p$ для любого $p \geq 1$, то $n_k = l_j$;

– если существуют p, $j \geq 1$ такие, что $\lambda_k = \xi_p = \varsigma_j$, то $n_k = m_p + l_j$.

Лемма 2.2. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$ — целое число, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ имеет угловую плотность $n(\Lambda(\varphi, \psi), \rho(r))$ и*

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} d\omega_{\omega_{\Lambda,\rho(r)}}(\varphi) = \mu = |\mu| e^{i\psi}.$$

Тогда для любых $a > 1$ и $ar_1 \geq r_2 > r_1 > 0$ имеет место представление

$$(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}(N(r_2, \Lambda, \rho) - N(r_1, \Lambda, \rho)) = \overline{\mu} \ln \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \varepsilon(r_1, r_2), \quad \varepsilon(r_1, r_2) \to 0, \quad r_1 \to \infty,$$

($\overline{\mu}$ — комплексное сопряжение).

Доказательство. Пусть вначале $\mu = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что

$$|e^{i\rho\varphi} - e^{i\rho\theta}| \leqslant \frac{\varepsilon}{n(\Lambda, \rho(r))\rho \ln a}, \quad \forall \varphi, \theta : |\varphi - \theta| < \delta. \tag{2.17}$$

Выберем теперь числа

$$\varphi_s \in \Phi(\omega_{\Lambda,\rho(r)}), \quad s = \overline{1,p}, \quad \varphi_1 \in (-2\pi, 0), \quad \varphi_1 < \cdots < \varphi_p < \varphi_1 + 2\pi = \varphi_{p+1},$$

такие, что

$$\varphi_{s+1} - \varphi_s < \delta, \quad s = \overline{1,p}. \tag{2.18}$$

В силу (2.3) с учетом определения интеграла можно считать, что для всех $ar_1 \geq r_2 > r_1 > r(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\ln \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} \left| \sum_{s=1}^{p} e^{-i\rho\varphi_s}(\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_{s+1}) - \omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_s)) - \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} d\omega_{\omega_{\Lambda,\rho(r)}}(\varphi) \right| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\psi_k}$, $\psi_k \in (\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi]$, $k \geq 1$. Тогда в силу (2.18) и (2.17) имеем:

$$\left| \sum_{(\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \left(\frac{n_k}{(\lambda_k)^\rho} - \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho e^{i\rho\varphi_s}} \right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4n(\Lambda, \rho(r))\rho \ln a} \sum_{(\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho}.$$

В силу (2.3) для всех $r_2 \in (r_1, ar_1]$

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} \leqslant \lim_{r_1 \to \infty} \frac{(ar_1)^{\rho(ar_1)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} = a^\rho.$$

Поэтому с учетом (2.11) и (2.9) получаем:

$$\begin{aligned} &(r_1)^{\rho-\rho(r_1)} \sum_{s=1}^{p} \left| \sum_{(\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \left(\frac{n_k}{(\lambda_k)^\rho} - \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho e^{i\rho\varphi_s}} \right) \right| \\ &\leqslant \varepsilon \frac{(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}}{n(\Lambda, \rho(r))\rho \ln a} \sum_{s=1}^{p} \sum_{(\psi_k \in (\varphi_s, \varphi_{s+1}], r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho} \\ &= \varepsilon \frac{(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}}{4n(\Lambda, \rho(r))\rho \ln a} \sum_{r_1 \leqslant |\lambda_k| < r_2} \frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho} = \varepsilon + \varepsilon_0(r_1, r_2), \end{aligned} \tag{2.20}$$

где $ar_1 \ge r_2 > r_1 > 0$, $\varepsilon_0(r_1, r_2) \to 0$, $r_1 \to \infty$. Далее в силу (2.11) и (2.9) имеем:

$$\left|\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{(\psi_k\in(\varphi_s,\varphi_{s+1}],r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{n_k(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}}{|\lambda_k|^\rho e^{i\rho\varphi_s}} - e^{-i\rho\varphi_s}\ln\frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}}(\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_{s+1})-\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_s))\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{p}\left|\sum_{(\psi_k\in(\varphi_s,\varphi_{s+1}],r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{n_k(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}}{|\lambda_k|^\rho} - \ln\frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}}(\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_{s+1})-\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi_s))\right|$$
$$= \sum_{s=1}^{p}|\varepsilon_s(r_1,r_2)| \to 0, \quad ar_1 \ge r_2 > r_1 \to \infty.$$

Поскольку $\mu = 0$, то отсюда с учетом (2.19) и (2.20) получаем:

$$(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}|N(r_2,\Lambda,\rho) - N(r_1,\Lambda,\rho)| \leqslant 4\varepsilon, \quad ar_1 \ge r_2 > r_1 > r_0(\varepsilon).$$

Это завершает доказательство леммы в случае $\mu = 0$.

Пусть теперь $\mu \neq 0$. Положим $\Lambda_1 = \{b_n e^{i(\psi+\pi)/\rho}, 1\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n > 0$, $b_n^{\rho(b_n)} = n/|\mu|$ и $\Lambda_2 = \Lambda_1 \cup \Lambda$. Последовательность Λ_1 лежит на луче $\{\lambda = te^{i(\psi+\pi)/\rho}, t > 0\}$ и имеет плотность $n(\Lambda_1, \rho(r)) = |\mu|$, а Λ_2 имеет угловую плотность $\omega_{\Lambda_2,\rho(r)} = \omega_{\Lambda,\rho(r)} + \omega_{\Lambda_1,\rho(r)}$. Нетрудно заметить, что

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} d\omega_{\Lambda_2,\rho(r)}(\varphi) = \int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} d\omega_{\Lambda,\rho(r)}(\varphi) + \int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} d\omega_{\Lambda_1,\rho(r)}(\varphi) = \mu + |\mu| e^{i(\psi+\pi)} = 0.$$

По доказанному

$$(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}(N(r_2,\Lambda_2,\rho) - N(r_1,\Lambda_2,\rho)) = \beta(r_1,r_2) \to 0, \quad ar_1 \ge r_2 > r_1 \to \infty.$$

В силу (2.11)

$$(r_1)^{\rho-\rho(r_1)}(N(r_2,\Lambda_1,\rho) - N(r_1,\Lambda_1,\rho)) = (r_1)^{\rho-\rho(r_1)} \sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{1}{(b_n e^{i(\psi+\pi)/\rho})^\rho}$$
$$= -e^{-i\psi}(r_1)^{\rho-\rho(r_1)} \sum_{r_1\leqslant|\lambda_k|<r_2} \frac{1}{(b_n)^\rho} = -\,e^{-i\psi}|\mu|\ln\frac{(r_2)^{\rho(r_2)}}{(r_1)^{\rho(r_1)}} + \beta_1(r_1,r_2),$$

где $\beta_1(r_1,r_2) \to 0$, $ar_1 \ge r_2 > r_1 \to \infty$. Таким образом, с учетом определения Λ_2 получаем требуемое равенство. Лемма доказана. □

Будем говорить, что Λ — последовательность общего вида по отношению к ρ, если существуют $-\pi \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \pi$ такие, что углы между векторами $e^{i\rho\varphi_1}$ и $e^{i\rho\varphi_2}$, $e^{i\rho\varphi_2}$ и $e^{i\rho\varphi_3}$, $e^{i\rho\varphi_3}$ и $e^{i\rho\varphi_1}$ строго меньше π, при этом

$$\underline{n}_0(\Lambda(\varphi_\mu - \varphi, \varphi_\mu + \varphi), \rho(r)) > 0, \quad \mu = 1,2,3, \quad \varphi \in (0, \pi/2). \tag{2.21}$$

Отметим, что функция, стоящая слева в этом неравенстве и зависящая от φ, является неубывающей. Поэтому достаточно, чтобы неравенство выполнялось на некоторой последовательности $\varphi = \psi_{\mu,p} \to 0$.

Лемма 2.3. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$ — целое число, $a > 1$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и γ_m — комплексные числа такие, что*

$$(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}\gamma_m \to 0, \quad m \to \infty. \tag{2.22}$$

Предположим, что $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— последовательность общего вида по отношению к* ρ. *Тогда существуют* $A \in \mathbb{C}$ *и последовательность* $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ *такие, что* $n(\Lambda_0, \rho(r)) = 0$ *и*

$$(a^l)^{\rho-\rho(a^l)}(A + \sum_{m=1}^{l} \gamma_m - N(a^{l+1}, \Lambda_0, \rho)) \to 0, \quad l \to \infty. \tag{2.23}$$

Если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$, *то существует* $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ *такая, что* $n(\Lambda_0, \rho(r)) = 0$ *и*

$$\sum_{m=1}^{l} \gamma_m - N(a^{l+1}, \Lambda_0, \rho) \to 0, \quad l \to \infty. \tag{2.24}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.1 рассмотрим последовательность $\Lambda_1 = \{\xi_p\}$, построенную по Λ. Пусть φ_1, φ_2, φ_3 — числа, участвующие в определении последовательности общего вида, и $-\pi \leqslant \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 < \pi$ такие, что векторы $e^{i\rho\varphi_1}$, $e^{i\rho\varphi_2}$, $e^{i\rho\varphi_3}$ совпадают с векторами $e^{i\rho\psi_1}$, $e^{i\rho\psi_2}$, $e^{i\rho\psi_3}$ (возможно в другом порядке). Положим

$$\psi_0 = 4^{-1}\min\{\pi - (\psi_2 - \psi_1); \pi - (\psi_3 - \psi_2); \pi - (\psi_1 + 2\pi - \psi_3)\}.$$

Имеем: $\psi_0 \in (0, \pi/4)$. Отметим важное свойство чисел ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3. Для любой прямой, проходящей через начало координат и для любой из двух полуплоскостей, образованных этой прямой, существует $\mu = 1, 2, 3$ такое, что угол $\Gamma_\mu = \Gamma(\psi_\mu - 2\psi_0, \psi_\mu + 2\psi_0)$ лежит в этой полуплоскости.

Пусть $\Lambda_{1,m} = \{\xi_p\}_{p=p(m)}^{p(m+1)-1}$ — набор всех элементов Λ_1 из кольца

$$\mathcal{K}(m) = \{\xi : a^m < |\xi| \leqslant a^{m+1}\}, \quad m \geq 1.$$

Некоторые из этих наборов могут быть пустыми. Построим подпоследовательность $\Lambda_2 = \{\xi_{p(m,j)}\}_{j=1,m=1}^{j(m),\infty}$ последовательности Λ_1 такую, что $\xi_{p(m,j)} \in \Lambda_{1,m}$, $j = \overline{1, j(m)}$, $m \geq 1$. Возможно, что для некоторых номеров m набор $\{\xi_{p(m,j)}\}_{j=1}^{j(m)}$ окажется пустым (в этих случаях $j(m) = 0$).

Пусть $\beta_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$. Положим

$$\begin{gathered} j(0) = 0, \quad \gamma_0(0) = 0, \quad \gamma_m(0) = (a^m)^{\rho-\rho(a^m)}\left(\frac{\gamma_{m-1}(j(m-1))}{(a^{m-1})^{\rho-\rho(a^{m-1})}} + \beta_m\right), \quad m \geq 1, \\ \gamma_m(j) = \gamma_m(0) - \sum_{s=1}^{j} \frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{(\xi_{p(m,s)})^\rho}, \quad j = \overline{1, j(m)}. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Пусть $\Gamma_{\mu,0} = \Gamma(\psi_\mu - \psi_0, \psi_\mu + \psi_0)$, $\mu = 1, 2, 3$, $\Pi(\varphi) = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\xi e^{i\varphi})\} > 0$, $\varphi(m,j)$ — аргумент числа $\gamma_m(j)$ и $\mu(m,j)$ — номер, такой, что $\Gamma_{\mu(m,j)} \subset \Pi(\varphi(m,j))$.

Для каждого $m \geq 1$ выберем набор $\{\xi_{p(m,j)}\}_{j=1}^{j(m)}$ такой, что

1) Для каждого $j = \overline{1, j(m)}$ число $\xi_{p(m,j)}$ — произвольный элемент набора $\Lambda_{1,m} \setminus \{\xi_{p(m,s)}\}_{s=1}^{j-1}$ такой, что $(\xi_{p(m,j)})^\rho \in \Gamma_{\mu(m,j),0}$.

2) $j(m)$ — минимальное неотрицательное целое число, для которого либо

$$|\gamma_m(j(m))| \leqslant \frac{1}{(a^m)^{\rho(a^m)}\sin\psi_0}, \tag{2.26}$$

либо набор $\Lambda_{1,m} \setminus \{\xi_{p(m,j)}\}_{j=1}^{j(m)}$ не содержит элементов ξ_p таких, что $(\xi_p)^\rho \in \Gamma_{\mu(m,j(m)),0}$.

Таким образом, подпоследовательность Λ_2 определена. Найдем оценку сверху для номеров $j(m) > 0$. Прежде всего, докажем, что справедливо неравенство:

$$|\gamma_m(j)| \leqslant |\gamma_m(j-1)| - \frac{\sin\psi_0}{2(a^m)^{\rho(a^m)}a^\rho}, \quad j = \overline{1, j(m)}. \tag{2.27}$$

Согласно (2.25) имеем:

$$\gamma_m(j) = \gamma_m(j-1) - \frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{(\xi_{p(m,j)})^\rho}.$$

Тогда по теореме косинусов

$$|\gamma_m(j)|^2 = |\gamma_m(j-1)|^2 + \frac{(a^m)^{2\rho-2\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^{2\rho}} - 2|\gamma_m(j-1)|\frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^\rho}\cos\alpha,$$

где α — тот из двух углов между векторами $\gamma_m(j-1)$ и $(\xi_{p(m,j)})^{-\rho}$, который не превосходит $\pi/2-\psi_0$ (такой существует, т.к. $(\xi_{p(m,j)})^\rho \in \Gamma_{\mu(m,j),0}$). Поскольку

$$\cos\alpha \geq \cos(\pi/2-\psi_0) = \sin\psi_0,$$

$\xi_{p(m,j)} \in \mathcal{K}(m)$ и в силу 2) и (2.26)

$$|\gamma_m(j(m-1))| > \frac{1}{(a^m)^{\rho(a^m)}\sin\psi_0},$$

то имеем:

$$\begin{aligned}
|\gamma_m(j-1)|^2 - |\gamma_m(j)|^2 &\geq 2|\gamma_m(j-1)|\frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^\rho}\sin\psi_0 - \frac{(a^m)^{2\rho-2\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^{2\rho}} \\
&= |\gamma_m(j-1)|\frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^\rho}\left(2\sin\psi_0 - \frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^\rho|\gamma_m(j-1)|}\right) \\
&\geq |\gamma_m(j-1)|\frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{|\xi_{p(m,j)}|^\rho}(2\sin\psi_0 - \sin\psi_0) \geq |\gamma_m(j-1)|\frac{\sin\psi_0}{(a^m)^{\rho(a^m)}a^\rho}.
\end{aligned}$$

В частности, $|\gamma_m(j-1)| > |\gamma_m(j)|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
2|\gamma_m(j-1)|(|\gamma_m(j-1)| - |\gamma_m(j)|) \geq &(|\gamma_m(j-1)| + |\gamma_m(j)|)(|\gamma_m(j-1)| - |\gamma_m(j)|) \\
\geq &|\gamma_m(j-1)|\frac{\sin\psi_0}{(a^m)^{\rho(a^m)}a^\rho}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство (2.27). Применяя его $j(m)$ раз, имеем:

$$0 \leqslant |\gamma_m(j(m))| \leqslant |\gamma_m(0)| - \frac{j(m)\sin\psi_0}{2(a^m)^{\rho(a^m)}a^\rho}, \quad m \geq 1. \tag{2.28}$$

(Для $j(m)=0$ неравенство тривиально). Поэтому

$$j(m) \leqslant \frac{2(a^m)^{\rho(a^m)}a^\rho}{\sin\psi_0}|\gamma_m(0)|, \quad m \geq 1. \tag{2.29}$$

Пусть Λ_0 — подпоследовательность Λ, которая соответствует подпоследовательности $\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1$. Тогда

$$N(a,\Lambda_0,\rho) = 0, \qquad \sum_{s=1}^{j(m)} \frac{1}{(\xi_{p(m,s)})^\rho} = N(a^{m+1},\Lambda_0,\rho) - N(a^m,\Lambda_0,\rho), \quad m \geq 1.$$

Докажем (2.23). В силу (2.25) имеем:

$$\begin{aligned}
\gamma_l(j(l)) =&(a^l)^{\rho-\rho(a^l)}\left(\frac{\gamma_{l-1}(j(l-1))}{(a^{l-1})^{\rho-\rho(a^{l-1})}} + \beta_l + N(a^{l+1},\Lambda_0,\rho) - N(a^l,\Lambda_0,\rho)\right) \\
=&(a^l)^{\rho-\rho(a^l)}\left(\frac{\gamma_{l-2}(j(l-2))}{(a^{l-2})^{\rho-\rho(a^{l-2})}} + \beta_{l-1} + \beta_l + N(a^{l+1},\Lambda_0,\rho) - N(a^{l-1},\Lambda_0,\rho)\right) \\
=&\cdots = (a^l)^{\rho-\rho(a^l)}\left(\sum_{m=1}^{l}\beta_m - N(a^{l+1},\Lambda_0,\rho)\right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Пусть $\gamma \in (1, a)$ и $\varphi_0 = \psi_0/\rho$. Согласно (2.21) найдется $\beta > 0$ такое, что

$$\underline{n}_0(\Lambda(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) \geq 3\beta c, \quad c = a^\rho \left(\frac{a^\rho}{\gamma} - 1\right)^{-1}, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Тогда в силу (2.8)

$$\underline{n}_0(\Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0), 1) \geq 3\beta c, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

По лемме 2.1 из работы [8]

$$\underline{n}_0(\Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0), \tau, 1) \geq \underline{n}_0(\Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0), 1), \quad \tau \in (0, 1).$$

Следовательно,

$$\underline{n}_0(\Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0), \tau, 1) \geq 3\beta c, \quad \tau \in (0, 1), \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Согласно определению величины $\underline{n}_0(\Lambda, \tau, \rho(r))$, выберем $r(\tau)$ такое, что

$$n(r, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) - n(\tau r, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) \geq 2r(1-\tau)\beta c, \quad r \geq r(\tau).$$

Тогда с учетом (2.3) имеем:

$$\begin{aligned}
&n(a^{m+1}, \Lambda(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) - n(a^m, \Lambda(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) \\
&\quad = n((a^{m+1})^{\rho(a^{m+1})}, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) - n((a^m)^{\rho(a^m)}, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) \\
&\quad \geq n((a^{m+1})^{\rho(a^{m+1})}, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) - n(\gamma a^{-\rho}(a^{m+1})^{\rho(a^{m+1})}, \Lambda^\vartheta(\varphi_\mu - \varphi_0, \varphi_\mu + \varphi_0)) \\
&\quad \geq 2(a^{m+1})^{\rho(a^{m+1})}\left(1 - \frac{\gamma}{a^\rho}\right)\beta c \geq 2\frac{a^\rho}{\gamma}(a^m)^{\rho(a^m)}\left(1 - \frac{\gamma}{a^\rho}\right)\beta c = 2a^\rho \beta (a^m)^{\rho(a^m)}, \quad m \geq m_0.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.26), (2.28) и 1), 2) получаем

$$|\gamma_m(j(m))| \leqslant \max\left\{\frac{1}{(a^m)^{\rho(a^m)}\sin\psi_0}, |\gamma_m(0)| - \beta\sin\psi_0\right\}, \quad m \geq m_0. \tag{2.31}$$

В силу (2.22) можно считать, что

$$(a^m)^{\rho - \rho(a^m)}|\gamma_m| + \frac{2}{(a^{m-1})^{\rho(a^{m-1})}\sin\psi_0} \leqslant \frac{\beta\sin\psi_0}{2}, \quad m \geq m_0. \tag{2.32}$$

Кроме того, в силу (2.2) можно также считать, что

$$\frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{(a^{m-1})^{\rho-\rho(a^{m-1})}} \leqslant 2, \quad m \geq m_0. \tag{2.33}$$

Положим $\beta_m = 0$, $m < m_0$, $\beta_m = \gamma_m$, $m \geq m_0$ и

$$A = -\sum_{m=1}^{m_0-1}\gamma_m.$$

Тогда по построению наборы $\{\xi_{p(m,j)}\}_{j=1}^{j(m)}$, $m < m_0$, пусты. Поэтому $N(am_0, \Lambda_0, \rho) = 0$. Следовательно, согласно (2.30) имеем:

$$\gamma_l(j(l)) = (a^l)^{\rho-\rho(a^l)}\left(A + \sum_{m=1}^{l}\gamma_m - N(a^{l+1}, \Lambda_0, \rho)\right), \quad l \geq m_0. \tag{2.34}$$

В силу (2.25)

$$\gamma_{m_0}(0) = (a^{m_0})^{\rho-\rho(a^{m_0})}\gamma_{m_0}.$$

Тогда из (2.32) и (2.31) получаем:

$$|\gamma_{m_0}(j(m_0))| \leqslant \frac{1}{(a^{m_0})^{\rho(a^{m_0})}\sin\psi_0}.$$

Предположим, что

$$|\gamma_m(j(m))| \leqslant \frac{1}{(a^m)^{\rho(a^m)} \sin\psi_0}, \quad l-1 \geq m \geq m_0.$$

Отсюда с учетом (2.25), (2.32) и (2.33) имеем:

$$|\gamma_l(0)| \leqslant \frac{(a^l)^{\rho-\rho(a^l)}}{(a^{l-1})^{\rho-\rho(a^{l-1})}} |\gamma_{l-1}(j(l-1))| + (a^l)^{\rho-\rho(a^l)}|\gamma_l| \leqslant \frac{\beta \sin\psi_0}{2}.$$

Тогда в силу (2.31)

$$|\gamma_l(j(l))| \leqslant \frac{1}{(a^l)^{\rho(a^l)} \sin\psi_0}.$$

Это вместе с (2.34) дает нам (2.23).

Докажем теперь (2.24). Положим $\beta_m = \gamma_m$, $m \geq 1$. Если $\rho(r) \equiv \rho$, то в силу (2.30)

$$\gamma_l(j(l)) = \sum_{m=1}^{l} \gamma_m - N(a^{l+1}, \Lambda_0, \rho). \tag{2.35}$$

Предположим, что $|\gamma_m(p(m))| > ((a^m)^\rho \sin\psi_0)^{-1}$ для всех $m \geq m_0$. Тогда с учетом (2.31), (2.25) и (2.32) получаем:

$$\begin{aligned}|\gamma_l(j(l))| \leqslant & |\gamma_l(0)| - \beta\sin\psi_0 \leqslant |\gamma_{l-1}(j(l-1))| + |\gamma_l| - \beta\sin\psi_0 \\ \leqslant & |\gamma_{l-1}(j(l-1))| - 2^{-1}\beta\sin\psi_0 \leqslant \dots \leqslant |\gamma_{m_0}(j(m_0))| - 2^{-1}(l-m_0)\beta\sin\psi_0.\end{aligned}$$

Для достаточно больших l правая часть здесь становится отрицательной. Получили противоречие. Таким образом, существует $m \geq m_0$ такое, что $|\gamma_m(j(m))| \geq ((a^m)^\rho \sin\psi_0)^{-1}$. Тогда в силу (2.32) получаем

$$|\gamma_{m+1}(0)| - \beta\sin\psi_0 \leqslant |\gamma_m(j(m))| + |\gamma_{m+1}| - \beta\sin\psi_0 < 0.$$

Следовательно, с учетом (2.31) имеем: $|\gamma_{m+1}(j(m+1))| \leqslant ((a^{m+1})^\rho \sin\psi_0)^{-1}$. Отсюда следует, что $|\gamma_l(j(l))| \leqslant ((a^l)^\rho \sin\psi_0)^{-1}$, $l \geq m$. Тогда в силу (2.35) получаем (2.24).

Остается показать, что $n(\Lambda_0, \rho(r)) = 0$. Поскольку $|\gamma_l(j(l))| \to 0$, $l \to \infty$, то согласно (2.29), (2.25), (2.33) и (2.22) имеем:

$$\frac{j(m)}{2(a^m)^{\rho(a^m)}} \leqslant \frac{2a^\rho|\gamma_m(0)|}{\sin\psi_0} \leqslant \frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}}{(a^{m-1})^{\rho-\rho(a^{m-1})}} \frac{|\gamma_{m-1}(j(m-1))|}{\sin\psi_0} + \frac{(a^m)^{\rho-\rho(a^m)}|\gamma_m|)}{\sin\psi_0} \to 0,$$

когда $m \to \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер $m(\varepsilon)$ такой, что $j(m) \leqslant \varepsilon(a^m)^{\rho(a^m)}$, $m \geq m(\varepsilon)$. Можно считать, что $r^{\rho(r)}$ возрастает при $r > (a^{m(\varepsilon)})^{\rho(a^{m(\varepsilon)})}$ и в силу (2.3) выполнено неравенство

$$\frac{(a^m)^{\rho(a^m)}}{(a^{m+1})^{\rho(a^{m+1})}} \leqslant q, \quad m \geq m(\varepsilon), \tag{2.36}$$

где $q \in (0,1)$. Пусть $r > (a^{m(\varepsilon)})^{\rho(a^{m(\varepsilon)})}$ и номер $m(r)$ выбран так, что

$$(a^{m(r)})^{\rho(a^{m(r)})} \leqslant r < (a^{m(r)+1})^{\rho(a^{m(r)+1})}.$$

Тогда с учетом (2.36) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{n(r,\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}} =&\frac{n(a^{m(\varepsilon)},\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}}+\frac{n(a^{m(r)+1},\Lambda_0)-n(a^{m(\varepsilon)},\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}}\\ \leqslant&\frac{n(a^{m(\varepsilon)},\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}}+\frac{(j(m(\varepsilon))+\dots+j(m(r)))}{(a^{m(r)})^{\rho(a^{m(r)})}}\\ \leqslant&\frac{n(a^{m(\varepsilon)},\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}}+\varepsilon\frac{(a^{m(\varepsilon)})^{\rho(a^{m(\varepsilon)})}+\dots+(a^{m(r)})^{\rho(a^{m(r)})})}{(a^{m(r)})^{\rho(a^{m(r)})}}\\ \leqslant&\frac{n(a^{m(\varepsilon)},\Lambda_0)}{r^{\rho(r)}}+\varepsilon(q^{m(r)-m(\varepsilon)}+q^{m(r)-m(\varepsilon)-1}+\dots+1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\bar{n}(\Lambda_0,\rho(r))\leqslant\varepsilon/(1-q)$. Так как $\varepsilon>0$ любое, то лемма доказана. □

Пусть $\Lambda_1\subseteq\Lambda_2$. Тогда $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ — последовательность такая, что $\Lambda_2=\Lambda_1\cup(\Lambda_2\setminus\Lambda_1)$.

Символом Σ_ρ обозначим подкласс всех функций $\omega\in\Sigma$ таких, что

$$\int_0^{2\pi}e^{i\rho\varphi}d\omega(\varphi)=0.$$

Теорема 2.2. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r)\to\rho$ — целое число, $\omega\in\Sigma_\rho$ и $\Lambda_1\subseteq\Lambda_2$ такие, что для любых допустимых φ, $\psi\notin\Phi(\omega)$ выполнены неравенства*

$$\underline{n}_0(\Lambda_2(\varphi,\psi),\rho(r))\geq\omega(\psi)-\omega(\varphi),\quad \bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi,\psi),\rho(r))\leqslant\omega(\psi)-\omega(\varphi).$$

Предположим, что для некоторых $-\pi\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\pi$ таких, что углы между векторами $e^{i\rho\varphi_1}$ и $e^{i\rho\varphi_2}$, $e^{i\rho\varphi_2}$ и $e^{i\rho\varphi_3}$, $e^{i\rho\varphi_3}$ и $e^{i\rho\varphi_1}$ строго меньше π, выполнено хотя бы одно из двух условий

$$\underline{n}_0(\Lambda_2(\varphi_\mu-\varphi,\varphi_\mu+\varphi),\rho(r))>\omega(\varphi_\mu+\varphi)-\omega(\varphi_\mu-\varphi), \tag{2.37}$$

$$\bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi_\mu-\varphi,\varphi_\mu+\varphi),\rho(r))<\omega(\varphi_\mu+\varphi)-\omega(\varphi_\mu-\varphi), \tag{2.38}$$

где $\varphi\in(0,\pi/2)\setminus\Phi(\omega)$, $\mu=1,2,3$. Тогда существует правильно распределенная последовательность Λ с угловой плотностью ω такая, что $\Lambda_1\subseteq\Lambda\subseteq\Lambda_2$. Если дополнительно $\rho(r)\equiv\rho$, то $N(r,\Lambda,\rho)\to0$, $r\to+\infty$.

Доказательство. По теореме 2.1 существует последовательность Λ_3 с угловой плотностью ω такая, что $\Lambda_1\subseteq\Lambda_3\subseteq\Lambda_2$. Пусть вначале верно (2.37) и $\Lambda_4=\Lambda_2\setminus\Lambda_3$. Тогда в силу (2.9) и (2.10)

$$\begin{aligned}\underline{n}_0(\Lambda_4(\varphi_\mu-\varphi,\varphi_\mu+\varphi),\rho(r))\geq&\underline{n}_0(\Lambda_2(\varphi_\mu-\varphi,\varphi_\mu+\varphi),\rho(r))-n(\Lambda_3(\varphi_\mu-\varphi,\varphi_\mu+\varphi),\rho(r))\\ >&\omega(\varphi_\mu+\varphi)-\omega(\varphi_\mu-\varphi)-(\omega(\varphi_\mu+\varphi)-\omega(\varphi_\mu-\varphi))=0,\end{aligned}$$

$\varphi\in(0,\pi/22)\setminus\Phi(\omega)$, $\mu=1,2,3$. Отсюда следует, что Λ_4 — последовательность общего вида по отношению к ρ. Положим

$$\gamma_1=-N(2^2,\Lambda_3,\rho),\qquad \gamma_m=-(N(2^{m+1},\Lambda_3,\rho)-N(2^m,\Lambda_3,\rho)),\quad m\geq2.$$

Так как $\omega\in\Sigma_\rho$, то по лемме 2.2 имеем: $(2^m)^{\rho-\rho(2^m)}\gamma_m\to0$, $m\to\infty$. Тогда по лемме 2.3 существует последовательность нулевой плотности $\Lambda_0\subseteq\Lambda_4$ такая, что верно (2.23), а при дополнительном условии $\rho(r)\equiv\rho$ верно (2.24). В силу (2.23) и определения γ_m имеем:

$$\begin{aligned}(a^l)^{\rho-\rho(a^l)}(A-N(2^2,\Lambda_3,\rho)-&\sum_{m=2}^{l}(N(2^{m+1},\Lambda_3,\rho)-N(2^m,\Lambda_3,\rho))-N(a^{l+1},\Lambda_0,\rho))\\ &=(a^l)^{\rho-\rho(a^l)})(A-N(a^{l+1},\Lambda,\rho))\to0,\quad l\to\infty,\end{aligned}$$

где $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_3$. Последовательность Λ (как и Λ_3) имеет угловую плотность $\omega \in \Sigma_\rho$. При этом имеют место вложения $\Lambda_1 \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_2$. Пусть $r > 0$ и номер $l(r)$ выбран из условия $2^l(r) \leqslant r < 2^{l(r)+1}$. Тогда с учетом предыдущего и (2.2) по лемме 2.3 получаем:

$$\begin{aligned} r^{\rho-\rho(r)}(A - N(r,\Lambda,\rho)) =& r^{\rho-\rho(r)}(A - N(a^{l+1},\Lambda,\rho)) \\ &+ r^{\rho-\rho(r)}(N(a^{l+1},\Lambda,\rho) - N(r,\Lambda,\rho)) \to 0, \quad r \to +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность Λ является правильно распределенным множеством. При условии $\rho(r) \equiv \rho$ в силу (2.24) также получаем: $N(r,\Lambda,\rho) \to 0$, $r \to +\infty$. Пусть теперь выполнено (2.38) и $\Lambda_5 = \Lambda_3 \setminus \Lambda_1$. Тогда в силу (2.9) и (2.10)

$$\begin{aligned} \underline{n}_0(\Lambda_5(\varphi_\mu - \varphi, \varphi_\mu + \varphi), \rho(r)) \geq& n(\Lambda_3(\varphi_\mu - \varphi, \varphi_\mu + \varphi), \rho(r)) \\ &- \bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi_\mu - \varphi, \varphi_\mu + \varphi), \rho(r)) \geq \omega(\varphi_\mu + \varphi) - \omega(\varphi_\mu - \varphi) \\ &- \bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi_\mu - \varphi, \varphi_\mu + \varphi), \rho(r)) > 0, \end{aligned}$$

$\varphi \in (0,\pi/2) \setminus \Phi(\omega)$, $\mu = 1,2,3$. Таким образом, Λ_5 — последовательность общего вида. Положим

$$\gamma_1 = N(2^2,\Lambda_3), \quad \gamma_m = N(2^{m+1},\Lambda_3) - N(2^m,\Lambda_3), \quad m \geq 2.$$

Тогда, как и выше, найдем последовательность нулевой плотности $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_5$ такую, что $\Lambda = \Lambda_3 \setminus \Lambda_0$ является правильно распределенным множеством. При этом имеют место вложения $\Lambda^1 \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda^2$. Если $\rho(r) \equiv \rho$, то $N(r,\Lambda,\rho) \to 0$, $r \to +\infty$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 2.2. Пусть

$$\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)} = \{\lambda_{n,m}, 1\}, \quad \lambda_{n,m} = |\lambda_{n,m}|e^{i\varphi_{n,m}}, \quad |\lambda_{n,m}|^{\rho(|\lambda_{n,m}|)}e^{i\varphi_{n,m}} = n + im, \quad n,m \in \mathbb{Z}.$$

В случае $\rho(r) \equiv 1$ имеем:

$$\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)} = \Lambda_{\mathbb{Z},1} = \{n + im, 1\}, \quad n,m \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место следующее утверждение (см. [1], гл. II, §1, теорема 3, [2], гл. I, §3, п. 1).

Следствие 2.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок и $\omega \in \Sigma_\rho$. Существует правильно распределенное множество $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$ с угловой плотностью ω. Если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$ — целое число, то $N(r,\Lambda,\rho) \to 0$, $r \to +\infty$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что для любых допустимых φ, ψ верно равенство $\underline{n}_0(\Lambda_{\mathbb{Z}}(\varphi,\psi),1) = +\infty$. В силу определения $\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$ имеем: $(\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)})^\vartheta = \Lambda_{\mathbb{Z},1}$. Поэтому, согласно (2.8), получаем: $\underline{n}_0(\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)})(\varphi,\psi),\rho(r)) = +\infty$. Если ρ — не целое число, то требуемая последовательность $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$ существует, благодаря теореме 2.1 (где полагаем $\Lambda_1 = \emptyset$ и $\Lambda_2 = \Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$). В случае, когда ρ — натуральное число, такая последовательность существует в силу теоремы 2.2. Следствие доказано. $\square$

Будем говорить, что $\omega \in \Sigma$ — функция общего вида по отношению к ρ, если существуют $-\pi \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \pi$ такие, что углы между векторами $e^{i\rho\varphi_1}$ и $e^{i\rho\varphi_2}$, $e^{i\rho\varphi_2}$ и $e^{i\rho\varphi_3}$, $e^{i\rho\varphi_3}$ и $e^{i\rho\varphi_1}$ строго меньше π, при этом

$$\omega(\varphi_\mu + \varphi) - \omega(\varphi_\mu - \varphi) > 0, \quad \mu = 1,2,3, \quad \varphi \in (0,\pi/2).$$

Если Λ имеет угловую плотность $\omega \in \Sigma$, то нетрудно заметить, что Λ — последовательность общего вида по отношению к ρ тогда и только тогда, когда $\omega = \omega_{\Lambda,\rho(r)}$ — функция общего вида по отношению к ρ.

Из теорем 2.1 и 2.2 получаем также следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, $\omega \in \Sigma_\rho$ — функция общего вида по отношению к ρ и Λ_2 такая, что для любых допустимых φ, $\psi \notin \Phi(\omega)$ верно неравенство*

$$\underline{n}_0(\Lambda_2(\varphi, \psi), \rho(r)) \geq \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

Тогда существует правильно распределенное множество $\Lambda \subseteq \Lambda_2$ с угловой плотностью ω. Если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$ — целое число, то $N(r, \Lambda, \rho) \to 0$, $r \to +\infty$.

Следующее утверждение содержит в себе как частный случай основной результат работы [5].

Следствие 2.3. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, $\omega \in \Sigma_\rho$ и Λ_1 такая, что для любых допустимых φ, $\psi \notin \Phi(\omega)$ выполнено неравенство*

$$\bar{n}_0(\Lambda_1(\varphi, \psi), \rho(r)) \leqslant \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

Тогда существует правильно распределенное множество Λ с угловой плотностью ω такое, что $\Lambda_1 \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_1 \cup \Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$. Если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$ — целое число, то $N(r, \Lambda, \rho) \to 0$, $r \to +\infty$.

Приведем пример, показывающий, что условия (2.37), (2.38) в теореме 2.2 являются существенными. Пусть $\Lambda_2 = \Lambda^- \cup \Lambda^+$, где

$$\Lambda^- = \{-\sqrt[3]{p}\}_{p=3}^{+\infty}, \quad \Lambda^+ = \{\lambda_{k,\mu}\}_{k=1,\mu=1}^{+\infty,3}, \quad \lambda_{k,\mu} = \varsigma_{k,\mu} e^{i((2\pi(\mu-1))/3)}, \quad \mathrm{Re}\varsigma_{k,\mu} > 0,$$

$$(\varsigma_{k,\mu})^3 = s(k,\mu) \ln s(k,\mu) \frac{\ln s(k,\mu) + i(-1)^{\sigma(k,\mu)}}{1 + \ln^2 s(k,\mu)}, \quad s(k,\mu) = 3k + \mu - 1,$$

где $\sigma(k,\mu)$ принимает значение 0 или 1, которое будет определено ниже. Покажем, что Λ_2 имеет угловую плотность при порядке $\rho(r) \equiv 3$. Имеем:

$$\frac{1}{(\lambda_{k,\mu})^3} = \frac{1}{(\varsigma_{k,\mu})^3} = \frac{\ln s(k,\mu) - i(-1)^{\sigma(k,\mu)}}{s(k,\mu) \ln s(k,\mu)} = \frac{1}{s(k,\mu)} - i \frac{(-1)^{\sigma(k,\mu)}}{s(k,\mu) \ln s(k,\mu)}. \tag{2.39}$$

Непосредственным подсчетом получаем: для всех $\varphi \in (0, \pi/3)$

$$n(\Lambda^-(\pi - \varphi, \pi - \varphi), 3) = \lim_{p \to \infty} \frac{p}{(\sqrt[3]{p})^3} = 1,$$

$$n\left(\Lambda^+\left(\frac{2\pi(\mu-1)}{3} - \varphi, \frac{2\pi(\mu-1)}{3} - \varphi\right), 3\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{|\lambda_{k,\mu}|^3} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{s(k,\mu)} = \frac{1}{3}, \quad \mu = 1, 2, 3,$$

$$n\left(\Lambda^+\left(\pm\frac{\pi}{3} - \varphi, \pm\frac{\pi}{3} - \varphi\right), 3\right) = 0.$$

Таким образом, последовательность Λ_2 имеет угловую плотность. Функция $\omega_{\Lambda_2,3}$ является кусочно-постоянной. Она непрерывна слева и имеет разрывы в точках $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_\mu = (2\pi(\mu-1))/3$, $\mu = 1, 2, 3$. В первой точке ее скачок равен 2, в остальных трех точках он равен 1/3. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} e^{i3\varphi} d\omega_{\Lambda_2,3}(\varphi) = e^{i3\pi} + \frac{1}{3}(e^{i0\pi} + e^{i2\pi} + e^{i4\pi}) = 0,$$

т.е. $\omega_{\Lambda_2,3} \in \Sigma_3$. Если бы $\omega_{\Lambda_2,3}$ была функцией общего вида по отношению к $\rho = 3$, то согласно следствию 2.1 последовательность Λ_2 содержала бы правильное распределенное множество с угловой плотностью $\omega = \omega_{\Lambda_2,3}$. Однако, $e^{i3\varphi_0} = -1$ и $e^{i3\varphi_\mu} = 1$, $\mu = 1, 2, 3$. Следовательно, $\omega_{\Lambda_2,3}$ не является функцией общего вида по отношению к $\rho = 3$.

Покажем, что последовательность Λ_2 не содержит правильное распределенное множество с угловой плотностью $\omega = \omega_{\Lambda_2,3}$. Согласно (2.39), имеем:

$$N(r,\Lambda^-,3) + N(r,\Lambda^+,3) = -\sum_{p<r^3} \frac{1}{p} + \sum_{1/|\xi_k|<r^3} \xi_k, \quad \xi_k = \frac{1}{k} - i\frac{(-1)^{\sigma(k)}}{k\ln k}, \quad p,k \geq 3.$$

Отсюда в силу (2.13) получаем:

$$|\mathrm{Re} N(r,\Lambda_2,3)| = \sum_{r^3 \leqslant k \leqslant a(r) r^3} \frac{1}{k} \leqslant \ln a(r) + \beta(r) \to 0, \quad r \to +\infty,$$

где $a(r) \to 1$, $r \to +\infty$. Подберем числа $\sigma(k)$ таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} \varlimsup_{r\to+\infty} |N(r,\Lambda_2,3)| &\leqslant \varlimsup_{r\to+\infty} |\mathrm{Re} N(r,\Lambda_2,3)| + \varlimsup_{r\to+\infty} |\mathrm{Im} N(r,\Lambda_2,3)| \\ &= \varlimsup_{r\to+\infty} |\mathrm{Im} N(r,\Lambda_2,3)| < +\infty. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Прежде всего, отметим, что в силу (2.13) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\ln 2 + \beta_0(m)}{(m+1)} &= \sum_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \frac{1}{k(m+1)} \leqslant \sum_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \frac{1}{k(m+1)} \frac{1}{k \ln k} \\ &\leqslant \sum_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \frac{1}{k(m+1)} \frac{1}{km} = \frac{\ln 2 + \beta_0(m)}{m}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где $\beta_0(m) \to 0$, $m \to \infty$. Поэтому существуют $m(l)$, $l \geq 1$, такие, что для $\sigma(k) = 0$, $1 < k < 2^{m(1)}$, $2^{m(2l-1)} \leqslant k < 2^{m(2l)}$ и $\sigma(k) = 1$, $2^{m(2l)} \leqslant k < 2^{m(2l+1)}$, $l \geq 1$, верны неравенства

$$3 \leqslant \sum_{2^{m(1)} \leqslant k < 2^{m(2l)})} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{k \ln k} \leqslant 4, \qquad 0 \leqslant \sum_{2^{m(1)} \leqslant k < 2^{m(2l)})} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{k \ln k} \leqslant 1, \quad l \geq 1.$$

Отсюда получаем (2.40) и

$$\sum_{2^{m(1)} \leqslant k < 2^{m(2l)})} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{k \ln k} = \sum_{2^{m(1)} \leqslant k < 2^{m(2l)})} \frac{1}{k \ln k} \geq 2. \tag{2.42}$$

Пусть $\Lambda \subseteq \Lambda_2$ — последовательность с угловой плотностью $\omega = \omega_{\Lambda_2,3}$. Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_2 \setminus \Lambda$ имеет нулевую плотность $n(\Lambda_1, 3)$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $m_0(\varepsilon)$ такой, что

$$n(r_{m+1},\Lambda_1) - n(r_m,\Lambda_1) \leqslant \varepsilon 2^m, \quad m \geq m_0(\varepsilon), \quad r_m = \sqrt[3]{|\lambda_{k,\mu}|}, \quad s(k,\mu) = 2^m, \quad m \geq 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}(N(r_{m+1},\Lambda_1,3) - N(r_m,\Lambda_1,3))| &\leqslant \sum_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \frac{1}{k \ln k} \\ &\leqslant \frac{1}{(m 2^m} (n(r_{m+1},\Lambda_1) - n(r_m,\Lambda_1)) \leqslant \frac{\varepsilon}{m}, \quad m \geq m_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Поскольку $\Lambda = \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$, то отсюда с учетом (2.41) для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\mathrm{Im}(N(r_{m+1},\Lambda,3) - N(r_m,\Lambda,3)) \geq \frac{\ln 2 + \beta_0(m)}{(m+1)} - \frac{\varepsilon}{m} \geq \frac{\ln 2 + \beta_0(m)}{2m}, \quad m \geq m_1(\varepsilon).$$

Тогда в силу (2.41) и (2.42)

$$\mathrm{Im}(N(r_{m(2l+1)},\Lambda,3) - N(r_{m(2l)},\Lambda,3)) \geq 1, \quad m(2l) \geq m_1(\varepsilon).$$

Это означает, что предела $\lim\limits_{r\to\infty} N(r,\Lambda,3)$ не существует. Таким образом, не существует правильно распределенного множества $\Lambda\subseteq\Lambda^2$ с угловой плотностью $\omega=\omega_{\Lambda_2,3}$.

3. Расщепление целых функций

Правильно распределенные множества тесно связаны с функциями регулярного роста. Пусть $\rho(r)\to\rho$ — уточненный порядок и f — целая функция порядка (не выше) $\rho(r)$, т.е. существуют $A>0$ и $B>0$ такие, что

$$\ln|f(z)|\leqslant A+B|z|^{\rho(|z|)},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Символом $\Lambda_f=\{\lambda_k,n_k\}$ обозначим последовательность всех нулей и их кратностей функции f (нулевое множество f). Верно представление ([1], гл. I, теорема 13)

$$f(z)=z^{n_1}e^{P(z)}\prod_{k=2}^{\infty}\left[G\left(\frac{z}{\lambda_k},\right))\right]^{n_k},\lambda_1=0,\quad f(z)=e^{P(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left[G\left(\frac{z}{\lambda_k},p\right)\right]^{n_k},\lambda_1\neq 0,\quad (3.1)$$

$$G(w,p)=(1-w)\exp\left(w+\frac{w^2}{2}+\dots+\frac{w^p}{p}\right),\quad G(w,0)=(1-w),$$

где $0\leqslant p\leqslant\rho$ и P — многочлен степени не выше ρ. В случае целого ρ имеем: $p=\rho$ и

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_\rho z^\rho.$$

Верхним индикатором f (или просто индикатором) называется функция

$$H_f(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}},\quad \varphi\in[0,2\pi].$$

Индикатор H_f является тригонометрически выпуклой функцией по отношению к ρ ([1], гл. I, §16, §18). В частности, H_f — непрерывная функция.

Говорят ([1], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$H_f(\varphi)=\lim_{t\to\infty,t\notin E}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}},\quad \varphi\in[0,2\pi],$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0,+\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0,r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r\to+\infty$.

Функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда Λ_f — правильно распределенное множество ([1], гл. III, теорема 4), т.е. в случае нецелого ρ последовательность Λ_f имеет угловую плотность, а в случае целого ρ дополнительно существует предел

$$\nu(\Lambda_f)=\lim_{r\to\infty}r^{\rho-\rho(r)}\left(a_\rho+\frac{1}{\rho}N(r,\Lambda_f,\rho)\right).$$

Отметим, что постоянная в скобках совпадает с коэффициентом при старшей степени в многочлене P. Напомним ([1], гл. II, §1), что $\mathcal{R}\in\mathbb{C}$ называется C^0 — множеством, если его можно покрыть кругами $B(z_j,r_j)$, $j\geq 1$, такими, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum_{|z_j|<r}r_j=0.$$

Регулярность роста f равносильна также представлению ([1], гл. II, теоремы 1 и 2, [2], гл. I, теорема 1.2.5)

$$\ln|f(z)|=r^{\rho(r)}H_f(\varphi)+\alpha(z),\quad z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C},\quad \lim_{r\to\infty,z\notin I_f}\frac{\alpha(z)}{r^{\rho(r)}}=0,\qquad (3.2)$$

где I_f — некоторое C^0 — множество. При этом угловая плотность $\omega_{\Lambda_f,\rho(r)} \in \Sigma_\rho$ и имеет место равенство

$$H_f(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \cos \rho(\varphi - \theta - \pi) d\omega_{\Lambda_f,\rho(r)}(\theta), \tag{3.3}$$

если ρ — не целое число, и

$$H_f(\varphi) = r_f \cos \rho(\varphi - \varphi_f) - \int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi} (\varphi - \theta) \sin \rho(\varphi - \theta) d\omega_{\Lambda_f,\rho(r)}(\theta), \tag{3.4}$$

где $r_f e^{-i\varphi_f} = \nu(\Lambda_f)$, если ρ — целое число.

Теорема 3.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — не целое число, g — целая функция порядка $\rho(r)$ и $\omega \in \Sigma$. Предположим, что для любых допустимых φ, $\psi \notin \Phi(\omega)$ выполнено неравенство*

$$\underline{n}_0(\Lambda_g(\varphi, \psi), \rho(r)) \geq \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

Тогда $g = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции порядка $\rho(r)$ и выполнено следующее:

1) Λ_{f_1} имеет угловую плотность ω;

2) f_1 имеет регулярный рост;

3) $H_g = H_{f_1} + H_{f_2}$, и H_{f_1} определяется по формуле (3.3), где полагаем $f = f_1$.

Доказательство. По теореме 2.1 существует правильно распределенное множество $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_g$ с угловой плотностью $\omega_{\Lambda_1,\rho(r)} = \omega$. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k, n_k\}$ и f_1 — каноническая функция множества Λ_1. Она определяется по формуле (3.1), где $P(z) \equiv 0$ и $p = [\rho]$.

По теореме Линделефа ([1], гл. I, теорема 18) f_1 — целая функция порядка $\rho(r)$. Так как ρ — не целое число, то функция f_1 имеет регулярный рост при порядке $\rho(r)$, а ее индикатор H_{f_1} определяется по формуле (3.3), где $f = f_1$. Положим $f_2 = g/f_1$. Тогда f_2 — целая функция порядка $\rho(r)$ ([1], гл. I, §13). Поскольку f_1 — функция регулярного роста, то ([1], гл. III, теорема 5) верно равенство $H_g = H_{f_1} + H_{f_2}$. Теорема доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, g — целая функция порядка $\rho(r)$ и $\omega \in \Sigma_\rho$ — функция общего вида по отношению к ρ. Предположим, что для любых допустимых φ, $\psi \notin \Phi(\omega)$ выполнено неравенство*

$$\underline{n}_0(\Lambda_g(\varphi, \psi), \rho(r)) \geq \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

Тогда $g = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции порядка $\rho(r)$ и выполнено следующее:

1) Λ_{f_1} — правильно распределенное множество с угловой плотностью ω при порядке $\rho(r)$; если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$, то $N(r, \Lambda, \rho) \to 0$, $r \to +\infty$;

2) f_1 имеет регулярный рост;

3) $H_g = H_{f_1} + H_{f_2}$, и H_{f_1} определяется по формуле (3.4), где полагаем $f = f_1$.

Доказательство. По теореме 2.2 существует правильно распределенное множество $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_g$ с угловой плотностью $\omega_{\Lambda_1,\rho(r)} = \omega$. Если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$, то $N(r, \Lambda, \rho) \to 0$, $r \to +\infty$. В частности, для некоторого числа $c \in \mathbb{C}$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{\rho-\rho(r)} \left(c + \frac{1}{\rho} N(r, \Lambda_1, \rho) \right).$$

Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k, n_k\}$ и f_1 — каноническая функция множества Λ_1. Она определяется по формуле (3.1), где полагаем $P(z) = e^{cz^\rho}$ и $p = \rho$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 3.1. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *Теорема 3.2 содержит в себе усиление основного результата работы* [6], *который относится к случаю $\rho(r) \equiv \rho$.*

Лемма 3.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число и f — целая функция порядка $\rho(r)$. Предположим, что Λ_f имеет угловую плотность ω. Тогда $\omega \in \Sigma_\rho$.*

Доказательство. Предположим, что

$$\mu = |\mu| e^{i\vartheta} = \int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} d\omega(\varphi) \neq 0.$$

По условию f — целая функция порядка $\rho(r)$. Она представляется по формуле (3.1). По теореме Линделефа ([1], гл. I, теорема 18) имеем:

$$\lim_{m\to\infty} |\nu_m| < \infty, \quad \nu_m = (2^m)^{\rho-\rho(2^m)} \left(a_\rho + \frac{1}{\rho} N(2^m, \Lambda_f, \rho) \right). \tag{3.5}$$

Положим

$$\frac{1}{1+\gamma_m} = \frac{(2^{m+1})^{\rho-\rho(2^{m+1})}}{(2^m)^{\rho-\rho(2^m)}} = 1 + \delta_m, \quad m \geq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nu_{m+1} - \nu_m =& (2^m)^{\rho-\rho(2^m)} \frac{1}{\rho} (N(2^{m+1}, \Lambda_f, \rho) - N(2^m, \Lambda_f, \rho)) + \delta_m (1+\gamma_m) \nu_{m+1} \\ =& (2^m)^{\rho-\rho(2^m)} \frac{1}{\rho} (N(2^{m+1}, \Lambda_f, \rho) - N(2^m, \Lambda_f, \rho)) - \gamma_m \nu_{m+1}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\nu_m| \varepsilon \leqslant \frac{|\mu|}{4\rho}, \quad m \geq 1. \tag{3.6}$$

Так как Λ_f имеет угловую плотность, то по лемме 2.2

$$(2^m)^{\rho-\rho(2^m)} (N(2^{m+1}, \Lambda_f, \rho) - N(2^m, \Lambda_f, \rho)) = \bar{\mu} \ln \frac{(2^{m+1})^{\rho(2^{m+1})}}{(2^m)^{\rho(2^m)}} + \varepsilon_m, \quad \epsilon_m \to 0, \quad m \to \infty.$$

Тогда с учетом (2.3) получаем:

$$\begin{aligned} &(2^m)^{\rho-\rho(2^m)} \mathrm{Re}(e^{i\vartheta} \left(N(2^{m+1}, \Lambda_f, \rho) - N(2^m, \Lambda_f, \rho)) \right) \\ &\qquad = |\mu| \ln \frac{(2^{m+1})^{\rho(2^{m+1})}}{(2^m)^{\rho(2^m)}} + \mathrm{Re}(e^{i\vartheta} \varepsilon_m) \geq \frac{|\mu|}{2}, \quad m \geq m_0. \end{aligned}$$

В силу (2.2) можно считать, что $|\gamma_m| \leqslant \varepsilon$, $m \geq m_0$. Тогда с учетом (3.6) имеем:

$$\mathrm{Re}(e^{i\vartheta}(\nu_p - \nu_m)) \geq \frac{|\mu|}{2\rho}(p-m) - \frac{|\mu|}{4\rho}(p-m) = \frac{|\mu|}{4\rho}(p-m), \quad p > m \geq m_0.$$

Это противоречит (3.5). Таким образом, $\mu = 0$, т.е. $\omega \in \Sigma_\rho$. Лемма доказана. □

Теорема 3.3. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, g — целая функция порядка $\rho(r)$. Предположим, что Λ_g имеет угловую плотность ω общего вида по отношению к ρ. Тогда $\omega \in \Sigma_\rho$, $g = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции порядка $\rho(r)$ и выполнено следующее:*

1) Λ_{f_1} — правильно распределенное множество с угловой плотностью ω при порядке $\rho(r)$; если дополнительно $\rho(r) \equiv \rho$, то $N(r, \Lambda, \rho) \to 0$, $r \to +\infty$;

2) f_1 имеет регулярный рост;

3) $H_g = H_{f_1} + H_{f_2}$, и H_{f_1} определяется по формуле (3.4), где полагаем $f = f_1$;

4) Λ_{f_2} имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем: $\omega \in \Sigma_\rho$. Поскольку Λ_g имеет угловую плотность ω, то в силу (2.9) для любых допустимых φ, $\psi \notin \Phi(\omega)$ имеют место равенства

$$\underline{n}_0(\Lambda_g(\varphi,\psi),\rho(r)) = n(\Lambda_g(\varphi,\psi),\rho(r)) = \omega(\psi) - \omega(\varphi).$$

Тогда по теореме 3.2 $g = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции порядка $\rho(r)$ и выполнены пункты 1)–3). Остается заметить, что Λ_g и Λ_{f_1} имеют одинаковую угловую плотность. Поэтому $\Lambda_{f_2} = \Lambda_g \setminus \Lambda_{f_1}$ имеет нулевую плотность. Теорема доказана. □

Замечание 3.2. *В теореме 3.3 присутствует условие: ω — функция общего вида. Приведем пример, показывающий, что без этого условия теорема неверна. Пусть $\Lambda_2 = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность из примера, который рассмотрен в конце предыдущего параграфа. Она имеет угловую плотность $\omega = \omega_{\Lambda_2,3} \in \Sigma_3$, которая не является функцией общего вида по отношению к $\rho = 3$. Пусть f — функция, определяемая формулой (3.1), где полагаем $P(z) \equiv 0$ и $p = 3$. В силу (2.40) и теоремы Линделефа f — целая функция порядка $\rho(r) \equiv 3$. Как показано в указанном примере, не существует правильно распределенного множества $\Lambda \subseteq \Lambda_2$ с угловой плотностью ω. Таким образом, утверждение теоремы 3.3 неверно в этом случае, т.е. f нельзя представить в виде произведения двух функций, одна из которых имеет регулярный рост, а другая обращается в нуль на множестве нулевой плотности.*

4. Функции с нулевым множеством нулевой плотности

Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\lambda_1 \neq 0$, имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$. Символом f_Λ обозначим функцию, определяемую по формуле (3.1), где полагаем $P(z) \equiv 0$ и $p = \rho$. Положим еще

$$F_\Lambda(z) = \prod_{|\lambda_k|<|z|} \exp\frac{n_k z^\rho}{\rho(\lambda_k)^\rho} = \exp\left(\frac{1}{\rho}N(|z|,\Lambda,\rho)z^\rho\right).$$

Лемма 4.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\lambda_1 \neq 0$, имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$. Тогда существует C^0 — множество $\mathcal{I}(\Lambda)$ такое, что*

$$\ln|f_\Lambda(z)| = \ln|F_\Lambda(z)| + \alpha(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lim_{|z|\to\infty, z\notin\mathcal{I}(\Lambda)} \frac{\alpha(z)}{|z|^{\rho(r)}} = 0, \quad \lim_{|z|\to\infty} \frac{\alpha(z)}{|z|^{\rho(r)}} = 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть

$$f_0(z) = \prod_{|\lambda_k|<|z|}\left[G\left(\frac{z}{\lambda_k},\rho-1\right)\right]^{n_k} \prod_{|\lambda_k|\ge|z|}\left[G\left(\frac{z}{\lambda_k},\rho\right)\right]^{n_k}.$$

Имеем:

$$\ln|f_\Lambda(z)| = \ln|F_\Lambda(z)| + \ln|f_0(z)|.$$

Положим $\alpha(z) = \ln|f_0(z)|$. Так как Λ имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$, то по лемме 5 из книги [1], гл. II, существует C^0 — множество $\mathcal{I}(\Lambda)$ такое, что верно второе равенство из (4.1).

Поскольку $\mathcal{I}(\Lambda)$ является C^0 — множеством, то для каждого $m \ge m_0$ найдется r_m такое, что $2^m \leqslant r_m < 2^{m+1}$ и окружность $|z| = r_m$ не пересекает $\mathcal{I}(\Lambda)$. Пусть

$$b_m = \sup_{|z|=r_m} \alpha(z), \quad m \ge m_0.$$

Имеем:

$$\frac{b_m}{(r_m)^{\rho(r_m)}} \to 0, \quad m \to \infty, \tag{4.2}$$

$$\ln|f_\Lambda(z)| - \ln|F_\Lambda(z)| = \alpha(z) \leqslant b_m, \quad |z| = r_m, \quad m \geq m_0. \tag{4.3}$$

Положим

$$F_m(z) = \exp\left(\frac{1}{\rho}N(r_m, \Lambda, \rho)z^\rho\right), \quad m \geq m_0.$$

Пусть $|z| = r_{m+1}$. В силу леммы 2.2 и (4.3)

$$\begin{aligned}\ln|f_\Lambda(z)| - \ln|F_m(z)| \leqslant& \ln|f_\Lambda(z)| - \ln|F_{m+1}(z)| + \frac{1}{\rho}(r_{m+1})^\rho|N(r_{m+1}, \Lambda, \rho) - N(r_m, \Lambda, \rho)| \\ \leqslant& b_{m+1} + \frac{(r_{m+1})^\rho}{\rho}\sum_{r_m \leqslant |\lambda_k| < r_2}\frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho} \\ =& b_{m+1} + \frac{(r_{m+1})^\rho}{\rho}\varepsilon_m(r_m)^{\rho(r_m)-\rho} \leqslant b_{m+1} + \frac{4^\rho}{\rho}\varepsilon_m(r_m)^{\rho(r_m)},\end{aligned}$$

где $\varepsilon_m \to 0$, $m \to \infty$. Пусть $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus B(0, 2^{m_0})) \cap \mathcal{I}(\Lambda)$. Выберем номер $m \geq m_0$ такой, что $r_m < |z| < r_{m+1}$. Функция $\ln|F_m(z)|$ является гармонической. Следовательно, с учетом (4.3) по принципу максимума верно неравенство

$$\ln|f_\Lambda(z_0)| - \ln|F_m(z_0)| \leqslant b_{m+1} + \frac{4^\rho}{\rho}\varepsilon_m(r_m)^{\rho(r_m)}.$$

Отсюда, применяя снова лемму 2.1, получаем:

$$\begin{aligned}\ln|f_\Lambda(z_0)| - \ln|F_\Lambda(z_0)| \leqslant& \ln|f_\Lambda(z_0)| - \ln|F_m(z_0)| + \frac{|z_0|^\rho}{\rho}|N(|z_0|, \Lambda, \rho) - N(r_m, \Lambda, \rho)| \\ \leqslant& b_{m+1} + \frac{4^\rho}{\rho}\varepsilon_m(r_m)^{\rho(r_m)} + \frac{|z_0|^\rho}{\rho}\sum_{r_m \leqslant |\lambda_k| < r_2}\frac{n_k}{|\lambda_k|^\rho} \\ \leqslant& b_{m+1} + \frac{4^\rho}{\rho}\varepsilon_m(r_m)^{\rho(r_m)} + \frac{4^\rho}{\rho}\delta_m(r_m)^{\rho(r_m)},\end{aligned}$$

где $\delta_m \to 0$, $m \to \infty$. Это с учетом (4.2) дает нам третье равенство из (4.1) . Лемма доказана. □

Следствие 4.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, f — целая функция порядка $\rho(r)$ и $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}$, $\lambda_1 \neq 0$, имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$. Тогда индикатор функции f совпадает с индикатором функции $F(z) = e^{a_\rho z^\rho}F_\Lambda(z)$ (где a_ρ — коэффициент при z^ρ в многочлене $P(z)$ из разложения (3.1) функции f), т.е.*

$$H_f(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{\rho-\rho(r)}Re\left(\left(a_\rho + \frac{1}{\rho}N(r, \Lambda_f, \rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right).$$

Доказательство. Согласно (3.1)

$$f(z) = e^{P(z)}f_\Lambda(z), \quad P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_\rho z^\rho.$$

В силу (4.1) имеем:

$$\begin{aligned}H_f(\varphi) =& \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{|P(re^{i\varphi})| + \ln|F_\Lambda(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} + \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\alpha(r^{\rho(r)})}{r^{\rho(r)}} \\ =& H_F(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{\rho-\rho(r)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho + \frac{1}{\rho}N(r, \Lambda_f, \rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right), \quad \varphi \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in [0, 2\pi]$. Выберем числа $0 < r_l \to +\infty$ такие, что

$$\lim_{l\to\infty}(r_l)^{\rho-\rho(r_l)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho + \frac{1}{\rho}N(r_l, \Lambda_f, \rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right) = H_F(\varphi).$$

Так как Λ_f имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$, то по лемме 2.1 с учетом (2.2)

$$(r_l)^{\rho-\rho(r_l)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho+\frac{1}{\rho}N(r_l,\Lambda_f,\rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right)\leqslant(r_l)^{\rho-\rho(r_l)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho+\frac{1}{\rho}N(r,\Lambda_f,\rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right)+\varepsilon_l$$
$$\leqslant(r)^{\rho-\rho(r)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho+\frac{1}{\rho}N(r,\Lambda_f,\rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right)+\delta_l,$$

$r\in(r_l,2r_l)$, $\delta_l\to 0$, $l\to\infty$. Поскольку $\mathcal{I}(\Lambda)$ является C^0 — множеством, то для всех $l\geq l_0$ существует $t_l\in(r_l,2r_l)$ такое, что $t_le^{i\varphi}\in\mathcal{I}(\Lambda)$. Таким образом, из предыдущего с учетом первого равенства в (4.1) имеем:

$$H_F(\varphi)\leqslant\varlimsup_{l\to\infty}(t_l)^{\rho-\rho(t_l)}\mathrm{Re}\left(\left(a_\rho+\frac{1}{\rho}N(t_l,\Lambda_f,\rho)\right)e^{i\rho\varphi}\right)\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}=H_f(\varphi).$$

Следствие доказано. □

Пусть f — целая функция порядка $\rho(r)$. Согласно теореме 29 из книги [1], гл. I, тип σ_f функции f можно определить по формуле:

$$\sigma_f=\max_{\varphi\in[0,2\pi]}H_f(\varphi).$$

Поэтому из следствия 4.1 получаем утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть $\rho(r)\to\rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, f — целая функция порядка $\rho(r)$ и $\Lambda_f=\{\lambda_k,n_k\}$, $\lambda_1\neq 0$, имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$. Тогда тип σ_f функции f можно определить по формуле*

$$\sigma_f=\varlimsup_{r\to\infty}r^{\rho-\rho(r)}\left|a_\rho+\frac{1}{\rho}N(r,\Lambda_f,\rho)\right|.$$

Замечание 4.1. *Частным случаем следствия 4.2 является теорема М. Картрайт (см.* [10], [2]*, гл. I, §1, теорема 1.1.8), в которой получен аналогичный результат в случае $\rho(r)\equiv 1$.*

Следствие 4.1 позволяет строить целые функции f порядка $\rho(r)$ с заданным индикатором H_f. При этом $\Lambda_f\subseteq\Lambda_{\mathbb{Z},\rho(r)}$ является правильно распределенным множеством с максимально возможной (для заданного индикатора) угловой плотностью. Следствие 4.1 также позволяет строить целые функции f порядка $\rho(r)\equiv\rho$ (ρ — целое число) с заданным индикатором H_f. При этом Λ_f будет уже множеством с минимально возможной (нулевой) угловой плотностью. Отметим, что характеристическим свойством индикатора H_f является его тригонометрическая выпуклость по отношению к ρ ([1], гл. I, §16).

Следствие 4.3. *Пусть ρ — натуральное число, ν_k, $k\geq 1$, — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\nu_k\to\infty$, $k\to\infty$, и*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(\nu_k)^\rho}=0,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu_k)^\rho}=+\infty.$$

Тогда для любой тригонометрически выпуклой по отношению к ρ функции H_ρ существует последовательность φ_k, $k\geq 1$, такая, что $H_{f_\Lambda}=H_\rho$, где $\Lambda=\{\nu_ke^{i\varphi_k},1\}$.

Доказательство. Положим $\mu_k=(\nu_k)^\rho$, $k\geq 1$, и $H_1(\varphi)=\rho H_\rho(\varphi/\rho)$. Функция H_1 является тригонометрически выпуклой по отношению к единице. Поэтому она является опорной функцией некоторого выпуклого компакта K. Таким образом, выполнены все условия следствия 2.3 из леммы 3.2 в работе [8]. Согласно этому следствию с учетом следствия 2.1 этой же леммы существует последовательность ψ_k, $k\geq 1$, такая, что

$$H_1(\psi)=\varlimsup_{r\to\infty}\mathrm{Re}(N(r,\Lambda_1,1)e^{i\psi}),$$

где $\Lambda_1 = \{\mu_k e^{i\psi_k}, 1\}$. Положим $\varphi_k = \psi_k/\rho$, $k \geq 1$. Тогда в силу следствия 4.1

$$H_\rho(\varphi) = \frac{1}{\rho} H_1(\rho\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\rho} \mathrm{Re}(N(r,\Lambda,\rho)e^{i\rho\varphi}) = H_{f_\Lambda}(\varphi).$$

Следствие доказано. □

В заключение приведем результат, уточняющий теорему 3.3.

Теорема 4.1. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ — уточненный порядок, ρ — целое число, g — целая функция порядка $\rho(r)$. Предположим, что $\Lambda_g = \{\lambda_k, n_k\}$, имеет угловую плотность ω общего вида по отношению к ρ. Тогда имеет место равенство*

$$\ln|g(z)| = r^{\rho(r)} H(\varphi) + r^\rho Re\left(\left(a_\rho + \frac{1}{\rho} N(r,\Lambda_g,\rho)\right) e^{i\rho\varphi}\right) + \beta(z), \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \qquad (4.4)$$

$$H(\varphi) = -\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi} (\varphi-\theta)\sin\rho(\varphi-\theta)d\omega(\theta), \qquad \lim_{|z|\to\infty, z\notin\mathcal{I}_g} \frac{\beta(z)}{r^{\rho(r)}} = 0,$$

где a_ρ — коэффициент при z^ρ в многочлене $P(z)$ из разложения (3.1) функции $f = g$, и $\mathcal{I}_g$ является C^0 — множеством.

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_k \neq 0$ (в противном случае рассмотрим функцию $g(z)/z^{n_1}$). По теореме 3.3 $g = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции порядка $\rho(r)$ и выполнены пункты 1)–4) этой теоремы. Пусть

$$f_j = e^{P_j(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left[G\left(\frac{z}{\lambda_{k,j}}, p\right)\right]^{n_{k,j}}, \quad P_j(z) = a_{0,j} + a_{1,j}z + \cdots + a_{\rho,j}z^\rho, \quad j = 1,2.$$

Имеем: $a_\rho = a_{\rho,1} + a_{\rho,2}$. Поскольку f_1 имеет регулярный рост, то

$$\ln|f_1(z)| = r^{\rho(r)}(H(\varphi) + r_f \cos\rho(\varphi - \varphi_f)) + \alpha_1(z), \qquad (4.5)$$

$$r_f e^{-i\varphi_f} = \nu(\Lambda_{f_1}) = \lim_{t\to\infty} r^{\rho-\rho(t)} \left(a_{\rho,1} + \frac{1}{\rho} N(t,\Lambda_{f_1},\rho)\right), \lim_{r\to\infty, z\notin\mathcal{I}_1} \frac{\alpha_1(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} = 0,$$

где $\mathcal{I}_1$ — некоторое C^0 — множество. Из предпоследнего равенства следует, что

$$r^{\rho(r)} r_f \cos\rho(\varphi-\varphi_f) = r^\rho \mathrm{Re}\left(\left(a_{\rho,1} + \frac{1}{\rho} N(t,\Lambda_{f_1},\rho)\right) e^{i\rho\varphi}\right) + \alpha_0(z),$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\alpha_0(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} = 0. \qquad (4.6)$$

Так как Λ_{f_2} имеет нулевую плотность при порядке $\rho(r)$, то согласно лемме 4.1

$$\ln|f_2(z)| = r^\rho \mathrm{Re}\left(\left(a_{\rho,2} + \frac{1}{\rho} N(t,\Lambda_{f_2},\rho)\right) e^{i\rho\varphi}\right) + \alpha_2(z), \qquad \lim_{r\to\infty, z\notin\mathcal{I}_2} \frac{\alpha_2(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} = 0, \qquad (4.7)$$

где $\mathcal{I}_2$ — некоторое C^0 — множество. Положим $\mathcal{I}_g = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ и $\beta = \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_2$. Тогда из (4.5)-(4.7) получаем (4.4). Теорема доказана. □

Замечание 4.2. *Теорема 4.1 обобщает результат Б.Я. Левина для функций с правильно распределенным нулевым множеством ([1], гл. II, §1, теорема 2) на функции с нулевым множеством, имеющим угловую плотность.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
2. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
3. G. Pólya. *Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von potenzreihen* // Math. Zeits. **291**, 549–640 (1929).
4. А.А. Кондратюк. *Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность* // Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Харьков. **7**, 37–52 (1968).
5. Г.Л. Лунц. *Об одной теореме, связанной с ростом целых функций целого порядка* // Изв. АН Арм. ССР. 1970. **5**:4, 358–370 (1970).
6. Г.Н. Шилова. *Теорема о делителях целых функций конечного порядка* // Матем. заметки. **48**:2, 128–136 (1990).
7. А.И. Абдулнагимов, А.С. Кривошеев. *Правильно распределенные подпоследовательности на прямой* // Уфимский математический журнал. **7**:1, 3–12 (2015).
8. А.И. Абдулнагимов, А.С. Кривошеев. *Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости* // Алгебра и анализ. **28**:4, 1–46 (2016).
9. А.И. Абдулнагимов, А.С. Кривошеев. *Представление аналитических функций* // Уфимский математический журнал. **8**:4, 3–23 (2016).
10. M.L. Cartwright. *On integral functions of integral order* // Proc. London Math. Soc. **33**, 209–224 (1932).

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Азат Ильгизович Рафиков,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: azat@rafikov.me