ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 178-195.

УДК 517.958

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

М.Г. ЮМАГУЛОВ, Л.С. ИБРАГИМОВА, А.С. БЕЛОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Предлагаются основанные на методах теории возмущений линейных операторов новые формулы в задаче приближенного построения мультипликаторов линейных неавтономных периодических гамильтоновых систем. Основное внимание уделяется получению формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов. Предлагаемые формулы приводят к новым признакам устойчивости по Ляпунову линейных периодических гамильтоновых систем в критических случаях. Рассматриваются приложения в задаче о параметрическом резонансе в основных резонансах. Полученные результаты сформулированы в терминах исходных уравнений и доведены до эффективных формул и алгоритмов. Эффективность предлагаемых формул иллюстрируется при решении задачи о построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

Ключевые слова: гамильтонова система, устойчивость, мультипликатор, малый параметр, параметрический резонанс, теория возмущений, задача трех тел, точки либрации.

Mathematics Subject Classification: 37J25, 37J40, 37N05

1. Введение

1.1. Основные уравнения. Рассматривается зависящая от скалярного или векторного малого параметра ε линейная периодическая гамильтонова система (ЛПГС) вида:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t,\varepsilon)x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{1.1}$$

в которой $A(t,\varepsilon)$ – вещественная симметрическая и T-периодическая по t матрица (т.е. $A(t+T,\varepsilon) \equiv A(t,\varepsilon)$), а матрица J определена равенством:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}; \qquad \text{здесь } I \text{ – единичная } (N \times N) \text{ матрица.} \tag{1.2}$$

Предполагается, что:

– элементы матрицы $A(t,\varepsilon)$ непрерывны по t и $\mathbb{C}^k$-гладкие по ε, где $k \geqslant 1$;

– выполнено тождество:

$$A(t,0) \equiv A_0, \tag{1.3}$$

где A_0 – постоянная симметрическая матрица.

M.G. Yumagulov, L.S. Ibragimova, A.S. Belova, Perturbation theory methods in problem of parametric resonance for linear periodic Hamiltonian systems.

Исследование третьего автора выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Поступила 18 февраля 2021 г.

Условие (1.3) означает, что ЛПГС (1.1) при $\varepsilon = 0$ является линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС):

$$\frac{dx}{dt} = JA_0x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}. \tag{1.4}$$

Систему (1.4) будем называть «невозмущенной», а систему (1.1) – «возмущенной» системой.

В статье обсуждаются некоторые вопросы о построении формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов системы (1.4). Рассматриваются приложения к исследованию задачи о параметрическом резонансе для системы (1.1). Более развернутая постановка будет приведена ниже.

1.2. Вспомогательные сведения. Приведем сначала в краткой форме некоторые вспомогательные сведения из общей теории линейных гамильтоновых систем (см., например, [1]–[4]).

Рассмотрим линейную периодическую гамильтонову систему:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}; \tag{1.5}$$

здесь $A(t)$ – вещественная симметрическая матрица, элементы которой являются непрерывными и T-периодическими по t функциями. Ниже участвующую в системе (1.5) матрицу $JA(t)$ для простоты будем называть *гамильтоновой* (в литературе используются и другие термины, например, *инфинитезимально симплектическая* матрица).

Мультипликаторы системы (1.5) – это собственные значения ее матрицы монодромии V, т.е. матрицы $V = X(T)$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений (ФМР) системы (1.5). В качестве ФМР системы (1.5) будем рассматривать решение матричной задачи Коши: $X' = JA(t)X$, $X(0) = I$; здесь I – единичная матрица размерности $2N$.

Имеют место следующие факты:

- Пусть ЛПГС (1.5) имеет мультипликатор μ_0. Тогда $\mu_0 \neq 0$ и числа $\dfrac{1}{\mu_0}$, $\overline{\mu_0}$, $\dfrac{1}{\overline{\mu}_0}$ также являются мультипликаторами ЛПГС (1.5), причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса.
- Если ЛПГС (1.5) имеет мультипликатор 1 (или -1), то этот мультипликатор имеет четную алгебраическую кратность.
- ЛПГС (1.5) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы μ расположены на единичной окружности (т.е. $|\mu| = 1$) и являются полупростыми. При этом ЛПГС (1.5) не может быть асимптотически устойчивой.

Наряду с (1.5) будем рассматривать также возмущенную ЛПГС вида:

$$\frac{dx}{dt} = J\tilde{A}(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{1.6}$$

в которой $\tilde{A}(t)$ – малое возмущение матрицы $A(t)$ (в классе симметрических, непрерывных и T-периодических матриц).

Пусть все мультипликаторы μ системы (1.5) расположены на единичной окружности (т.е. $|\mu| = 1$) и являются простыми. Пусть μ_0 – это один из этих мультипликаторов. Тогда при малых возмущениях система (1.6) также будет иметь простой мультипликатор $\tilde{\mu}$ близкий к μ_0, при этом $|\tilde{\mu}| = 1$. Свойства устойчивости системы (1.5) в этом случае не изменятся: она остается устойчивой.

Пусть теперь система (1.5) имеет кратный мультипликатор μ_0 такой, что $|\mu_0| = 1$ (а остальные мультипликаторы по-прежнему являются простыми и расположены на единичной окружности). Пусть для простоты эта кратность равна 2. Тогда при переходе от (1.5) к возмущенной системе (1.6) мультипликатор μ_0 обычно расщепляется на два простых мультипликатора μ_1 и μ_2. При этом возможны два случая:

$$\text{а)}\quad \mu_2 = 1/\overline{\mu_1}: \quad |\mu_1| < 1 < |\mu_2|;$$
$$\text{б)}\quad |\mu_1| = |\mu_2| = 1.$$

В случае а) возмущенная система (1.6) становится неустойчивой, а в случае б) – устойчивой.

Строго говоря, вопрос о том, какой из вариантов а) или б) выберет система (1.5) при расщеплении кратного мультипликатора μ_0, зависит не только от свойств возмущенной системы (1.6), но и от невозмущенной системы (1.5). А именно, кратные мультипликаторы подразделяются на два типа: *дефинитные* и *индефинитиные* (см., например, [2]). Если кратный мультипликатор μ_0 является дефинитным, то при любом достаточно малом линейном периодическом гамильтоновом возмущении системы (1.5) мультипликатор μ_0 может расщепиться только по варианту б), т.е. мультипликаторы μ_1 и μ_2 останутся на единичной окружности. Если же кратный мультипликатор μ_0 является индефинитным, то существуют малые возмущения, при которых эти мультипликаторы сойдут с единичной окружности.

Понятие дефинитности мультипликаторов связано с другим важным понятием теории ЛПГС. Говорят (см., например, [2], [5]), что система (1.5) является *сильно (параметрически) устойчивой*, если она и все достаточно малые линейные периодические гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Другими словами, система (1.5) является сильно (параметрически) устойчивой, если она и близкие к ней возмущенные системы (1.6) являются устойчивыми.

Важное значение имеет следующее утверждение (см., например, [2], стр. 172; [5], стр. 80).

Теорема 1.1. *(Крейн – Гельфанд – Лидский) Система (1.5) является сильно устойчивой тогда и только тогда, когда:*

1) *все ее мультипликаторы являются полупростыми и равны единице по модулю;*
2) *числа ± 1 не являются ее мультипликаторами;*
3) *все ее кратные мультипликаторы являются дефинитными.*

2. Постановка задачи

Вернемся к основным системам (1.1) и (1.4).

Для невозмущенной автономной системы (1.4) матрица монодромии V в T-периодической задаче имеет вид $V = e^{TJA_0}$. При этом мультипликаторы μ системы (1.4) связаны с собственными значениями λ матрицы JA_0 равенством $\mu = e^{T\lambda}$. В силу указанных выше свойств линейных гамильтоновых систем и в соответствии с теорией возмущений линейных операторов (см., например, [19]) верно следующее: если матрица JA_0 имеет хотя бы одно собственное значение с ненулевой вещественной частью, то возмущенная ЛПГС (1.1) будет неустойчивой при всех малых $|\varepsilon|$.

Пусть все собственные значения матрицы JA_0 являются чисто мнимыми, а именно, ими являются числа:

$$\pm\, i\omega_1,\ \pm i\omega_2,\ \ldots,\ \pm i\omega_N, \tag{2.1}$$

где $\omega_j \geqslant 0$. Если некоторое собственное значение $i\omega_m$ имеет алгебраическую кратность k, то в списке (2.1) число $i\omega_m$ встречается ровно k раз. В этом случае при $\varepsilon = 0$ все мультипликаторы ЛПГС (1.1) по модулю равны единице. Как было отмечено выше, особый интерес представляют ситуации, когда некоторые из этих мультипликаторов являются кратными.

Кратные мультипликаторы системы (1.4) возникают (см., например, [1]) при выполнении одного из условий:

S1) среди чисел (2.1) имеется хотя бы одно $i\omega_{m_0}$ такое, что:

$$\omega_{m_0} = \frac{\pi k_0}{T} \quad \text{при некотором целом неотрицательном} \quad k_0; \tag{2.2}$$

S2) среди чисел (2.1) имеется хотя бы одна пара $i\omega_{m_0}$ и $i\omega_{l_0}$ $(m_0 \neq l_0)$ такая, что:

$$\omega_{m_0} - \omega_{l_0} = \frac{2\pi k_0}{T} \quad \text{при некотором целом} \quad k_0. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *Равенство (2.2) означает, что соответствующий мультипликатор системы (1.4) равен 1 (если k_0 – четно) или -1 (если k_0 – нечетно) четной кратности. Отсюда и из теоремы Крейна – Гельфанда – Лидского следует, что при выполнении равенства (2.2) невозмущенная система (1.4) не обладает свойством сильной устойчивости.*

Замечание 2.2. *Равенство (2.3) означает, что соответствующий мультипликатор системы (1.4) является кратным, при этом он равен*

$$\mu_0 = e^{T\omega_{m_0}i} = e^{T\omega_{l_0}i}. \tag{2.4}$$

Если при этом числа ω_{m_0} и ω_{l_0} не удовлетворяют соотношению вида (2.2) (т.е. $\omega_{m_0}, \omega_{l_0} \neq \pi k/T$ при любых целых k), то для мультипликатора (2.4) выполнено: $\mu_0 \neq \pm 1$.

Условие **S2** *охватывает и случай, когда матрица JA_0 имеет кратное чисто мнимое собственное значение. А именно, этот случай имеет место, если равенство (2.3) выполнено при $k_0 = 0$: тогда $\omega_{m_0} i = \omega_{l_0} i$.*

Задачу исследования устойчивости системы (1.1) в условиях типа **S1** или **S2**, часто называют (см., например, [1], [7]) *задачей о параметрическом резонансе*, а сами эти соотношения называют *параметрическими резонансами*. При этом соотношение типа (2.2) называют *простым резонансом*, а соотношение типа (2.3) – *комбинационным резонансом*. В этой связи отметим, что соотношения (2.2) и (2.3) можно представить в единой форме

$$n_1\omega_{m_0} + n_2\omega_{l_0} = \frac{2\pi k_0}{T},$$

в которой n_1 и n_2 – целые числа такие, что $|n_1|+|n_2| = 2$. В этом случае говорят о *резонансе второго порядка*.

Задаче исследования устойчивости линейных гамильтоновых систем с периодическим возмущением и, в частности, задаче о параметрическом резонансе посвящено множество работ. Большинство исследований основаны на методах нормализации линейных гамильтоновых систем и на преобразовании гамильтониана системы (1.1) путем канонической замены переменных. В этом направлении получен ряд важных результатов (см., например, [1], [11]–[17]).

Другие подходы исследования задачи о параметрическом резонансе основаны на классической теории возмущений линейных операторов. Следует указать на то, что интерес представляют не непосредственное применение методов общей теории (этот путь, как правило, чрезвычайно громоздок и поэтому практически не применяется), а модификации методов, максимально учитывающих специфику задачи, связанную с гамильтоновостью системы. Указанный подход также получил свое развитие в работах многих авторов (см., например, [2], [5]–[8]).

Исследования продолжаются в различных направлениях. Здесь особо актуальными представляются разработки общих подходов исследования задачи о параметрическом резонансе в терминах исходных уравнений без необходимости предварительного (часто трудоемкого и громоздкого) их преобразования. Основную сложность здесь представляет задача построения формул первого приближения для мультипликаторов возмущенной неавтономной периодической гамильтоновой системы. В этой связи укажем на то, что известные в литературе формулы, как правило, направлены на исследование автономных систем (см., например, [5], [8], [10], [18]).

В настоящей статье проводится исследование задачи о параметрическом резонансе для ЛПГС (1.1) в условиях **S1** и **S2**. Приводятся новые формулы первого приближения в задаче приближенного построения мультипликаторов этой системы (1.1) с учетом их дефинитности или недифинитности. Полученные формулы используются для проведения анализа устойчивости (неустойчивости) по Ляпунову ЛПГС (1.1).

Задача о параметрическом резонансе для ЛПГС (1.1) будет изучаться в следующих основных случаях, соответствующих условиям **S1** и **S2**:

P_1. Матрица JA_0 имеет кратное (кратности 2) собственное значение $\lambda = i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

P_2. Матрица JA_0 имеет два простых собственных значения $\lambda_1 = i\omega_1$ и $\lambda_2 = i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, при этом $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0.

P_3. Матрица JA_0 имеет простое собственное значение $\lambda = i\omega_0$, где $\omega_0 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0.

Будем предполагать, что остальные (отличные от $\pm i\omega_0$ в случаях P_1 и P_3 и от $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ в случае P_2) собственные значения λ матрицы JA_0 являются простыми и чисто мнимыми, а именно, числами вида $\lambda = i\omega$, где $\omega \neq \pi k/T$ при целых k. При этом ни для одной пары из них не выполняется резонансное соотношение типа того, что указано в случае P_2.

Случаи P_1 и P_2 соответствуют условию (2.3), а случай P_3 – условию (2.2); впрочем, если в случае P_1 имеем $\omega_0 = 0$, то он соответствует обоим условиям (2.2) и (2.3).

Нам удобно систему (1.1) представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0 + \varepsilon S_1(t) + S_2(t,\varepsilon)]x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{2.5}$$

в котором J – это матрица (1.2), A_0 – матрица (1.3), $S_1(t)$ и $S_2(t,\varepsilon)$ – вещественные, симметрические и T-периодические по t матрицы, при этом матрица $S_2(t,\varepsilon)$ является гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|S_2(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

3. Случай P_1

Изучение задачи начнем со случая P_1. Этот случай разбивается на подслучаи, когда собственное значение $\lambda = i\omega_0$ является полупростым (подслучай P_1^1) или неполупростым (подслучай P_1^2). Рассмотрим эти подслучаи.

3.1. Подслучай P_1^1. Пусть матрица JA_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k. Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии «возмущенной» системы (2.5). Тогда $V_0 = e^{JA_0T}$ – матрица монодромии «невозмущенной» системы (1.4). В рассматриваемом подслучае матрица V_0 имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0T}$ кратности 2. Отметим, что так как $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k, то при $\omega_0 > 0$ имеем: $\mu_0 \neq \pm 1$. Отметим также, что при $\omega_0 > 0$ мультипликатор μ_0 системы (1.4) может быть как дефинитным, так и индефинитным, а при $\omega_0 = 0$ он является индефинитным.

А именно, при $\omega_0 > 0$ возможны два взаимоисключающих случая (см., например, [2], [5]):

1^0 для любого собственного вектора e, отвечающего собственному значению $i\omega_0$ матрицы JA_0, выполняется соотношение: $(Je, e) \neq 0$;

2^0 существует собственный вектор e, отвечающий собственному значению $i\omega_0$ матрицы JA_0, для которого $(Je, e) = 0$.

В первом случае мультипликатор $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ системы (1.4) является дефинитным, а во втором случае – индефинитным.

Так как матрица JA_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, то существуют ненулевые линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \qquad JA_0 g = i\omega_0 g. \tag{3.1}$$

Векторы e, g будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0 T}$, отвечающими полупростому собственному значению $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2.

Из указанных выше свойств мультипликатора μ_0, связанных с дефинитностью или индефинитностью, вытекает следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Пусть μ_0 является дефинитным мультипликатором системы (1.4). Тогда собственные векторы e, g матрицы JA_0 можно нормировать в соответствии с одной и только одной парой равенств:*

$$(iJe, e) = (iJg, g) = 1 \tag{3.2}$$

или

$$(iJe, e) = (iJg, g) = -1\,. \tag{3.3}$$

Если же μ_0 является индефинитным мультипликатором, то векторы e, g можно нормировать равенствами:

$$(iJe, e) = -1, \qquad (iJg, g) = 1. \tag{3.4}$$

При этом векторы e, g можно выбрать, удовлетворяющими равенству:

$$(e, Jg) = 0\,. \tag{3.5}$$

Согласно теории возмущений линейных операторов (см., например, [19]) при малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми, причем $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$. Более того, они представимы в виде

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \mu_2(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(2)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{3.6}$$

Приведем схему построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.6).

Пусть векторы e, g нормированы в соответствии с леммой 3.1. Определим постоянную матрицу

$$S_0 = \int_0^T S_1(t)\, dt, \tag{3.7}$$

где $S_1(t)$ – матрица, участвующая в системе (2.5). Далее положим

$$a = (S_0 e, e), \qquad b = (S_0 g, g), \qquad c = (S_0 g, e). \tag{3.8}$$

Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное.

3.1.1. Возмущение дефинитного мультипликатора. Рассмотрим сначала вопрос о коэффициентах $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.6) в предположении, что $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ является дефинитным мультипликатором системы (1.4). Отметим, что тогда $\mu_0 \neq \pm 1$ и, следовательно, в формуле $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ необходимо должно выполняться соотношение: $\omega_0 \neq \pi k/T$ при целых k. В частности, здесь мы должны предполагать, что $\omega_0 \neq 0$.

Теорема 3.1. *Пусть имеет место одна из нормировок (3.2) или (3.3) и выполнено равенство (3.5). Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) – это собственные значения матрицы $D = -i\mu_0 D_0$ или $D = i\mu_0 D_0$ соответственно, где*

$$D_0 = \begin{bmatrix} a & c \\ \overline{c} & b \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Доказательства этого и других основных утверждений статьи вынесены в п. 7.

Отметим, что собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (3.9) являются вещественными числами, а именно, корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c\overline{c} = 0. \tag{3.10}$$

Приведем следствия теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть μ_0 является дефинитным мультипликатором системы (1.4). Пусть имеет место нормировка (3.2) (нормировка (3.3)). Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = -i\mu_0\lambda_1, \qquad \mu_1^{(2)} = -i\mu_0\lambda_2 \qquad (\,\mu_1^{(1)} = i\mu_0\lambda_1, \qquad \mu_1^{(2)} = i\mu_0\lambda_2\,), \tag{3.11}$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения (3.10).

Следствие 3.2. *Пусть μ_0 является дефинитным мультипликатором системы (1.4). Пусть имеет место нормировка (3.2) или (3.3). Тогда при $\omega_0 > 0$ невозмущенная система (1.4) является сильно устойчивой. При переходе к возмущенной системе (1.1) дефинитный мультипликатор μ_0 расщепляется в соответствии с формулами (3.6) и (3.11), оставаясь на единичной окружности: $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$. При малых $|\varepsilon|$ система (1.1) остается устойчивой.*

3.1.2. Возмущение индефинитного мультипликатора. Пусть теперь $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ является индефинитным мультипликатором системы (1.4).

Теорема 3.2. *Пусть имеет место нормировка (3.4) и выполнено равенство (3.5). Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) – это собственные значения матрицы $D = i\mu_0 D_1$, где*

$$D_1 = \begin{bmatrix} a & c \\ -\overline{c} & -b \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (3.12) – это корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (a-b)\lambda - ab + c\overline{c} = 0 \tag{3.13}$$

и, следовательно, могут быть как вещественными, так и комплексными. Обозначим через $\Delta = (a+b)^2 - 4c\overline{c}$ дискриминант уравнения (3.13).

Приведем следствия теоремы 3.2.

Следствие 3.3. *Пусть μ_0 является индефинитным мультипликатором системы (1.4). Пусть имеет место нормировка (3.4). Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = -i\mu_0\lambda_1, \qquad \mu_1^{(2)} = -i\mu_0\lambda_2, \tag{3.14}$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения (3.13). Для малых $|\varepsilon|$ индефинитный мультипликатор μ_0 системы (1.4) расщепляется в соответствии с формулами (3.6) и (3.14).

Следствие 3.4. *Пусть $\Delta > 0$. Тогда для данного возмущения $S_1(t)$ системы (2.5) и всех малых $|\varepsilon|$ индефинитный мультипликатор μ_0 системы (1.4) расщепляется, оставаясь на единичной окружности: $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$. При малых $|\varepsilon|$ система (2.5) остается устойчивой.*

Следствие 3.5. *Пусть $\Delta < 0$. Тогда для данного возмущения $S_1(t)$ системы (2.5) и всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ индефинитный мультипликатор μ_0 системы (1.4) расщепляется, покидая единичную окружность: $|\mu_1(\varepsilon)| < 1$ и $|\mu_2(\varepsilon)| > 1$. При малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (2.5) неустойчива.*

3.2. Подслучай P_1^2. Пусть теперь матрица JA_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k. Тогда матрица монодромии V_0 «невозмущенной» системы (1.4) имеет неполупростое собственное значение $\mu_0 = e^{\omega_0 T i}$ кратности 2. Согласно теории возмущений линейных операторов при малых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ «возмущенной» системы (2.5) имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются непрерывными, причем $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$. Более того, они представимы в виде разложения Пюизье:

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon), \qquad \mu_2(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_2^{(1)}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon). \tag{3.15}$$

Перейдем к решению задачи вычисления коэффициентов $\mu_1^{(j)}$ в формулах (3.15). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае найдется пара ненулевых линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \qquad JA_0 g = i\omega_0 g + e. \tag{3.16}$$

Отметим, что выполнены также равенства: $V_0 e = \mu_0 e$ и $V_0 g = \mu_0(g + Te)$.

Несложно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.2. *Имеют место соотношения $(e, Je) = 0$, $(e, Jg) \neq 0$, при этом число (e, Jg) является вещественным. Вектор g можно выбрать из условия выполнения равенства*

$$(g, Jg) = 0. \tag{3.17}$$

Ниже равенство (3.17) будем считать выполненным. В силу леммы 3.2 определено число $\nu = \dfrac{1}{(e, Jg)}$.

Теорема 3.3. *Коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_2^{(1)}$ в разложениях (3.15) – это числа:*

$$\mu_1^{(1)} = \mu_0\sqrt{-T\nu(S_0 e, e)}, \qquad \mu_2^{(1)} = -\mu_1^{(1)}, \tag{3.18}$$

где S_0 – матрица (3.7).

Отметим, что подкоренное выражение в формуле (3.18) является вещественным.

Приведем некоторые следствия из теоремы 3.3.

Следствие 3.6. *В подслучае P_1^2 невозмущенная система (1.4) не является сильно устойчивой и, соответственно, ее мультипликатор $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ является индефинитным. Для малых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 расщепляется в соответствии с формулами (3.15) и (3.18).*

Следствие 3.7. *Пусть $\varepsilon\nu(S_0 e, e) > 0$. Тогда для данного возмущения $S_1(t)$ системы (2.5) при соответствующих малых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 системы (1.4) остается на единичной окружности: $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$. В этом случае система (2.5) остается устойчивой.*

Следствие 3.8. *Пусть $\varepsilon\nu(S_0e, e) < 0$. Тогда для данного возмущения $S_1(t)$ системы (2.5) при соответствующих малых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 системы (1.4) покидает единичную окружность: $|\mu_1(\varepsilon)| < 1$ и $|\mu_2(\varepsilon)| > 1$. В этом случае система (2.5) неустойчива.*

3.3. Случай нулевого собственного значения. Важным частным вариантом случая P_1 является ситуация, когда матрица JA_0 имеет нулевое собственное значение $\lambda = 0$ кратности 2. Здесь имеются некоторые особенности.

Во-первых отметим, что в этой ситуации в формулах (3.6) и (3.15) имеем: $\mu_0 = 1$. Отсюда и из теоремы Крейна – Гельфанда – Лидского следует, что тогда система (1.4) не обладает свойством сильной устойчивости.

Во-вторых, собственное значение $\lambda = 0$ может быть полупростым или неполупростым. Поэтому указанная ситуация может изучаться в соответствии с формулами и выводами пп. 3.1.2 и 3.2.

4. Случай P_2

Рассмотрим теперь задачу о параметрическом резонансе для системы (2.5) в случае P_2, т.е. пусть матрица JA_0 имеет два простых собственных значения $\lambda_1 = i\omega_1$ и $\lambda_2 = i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, при этом $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T$ для некоторого натурального k_0. Пусть, как и выше, $V(\varepsilon)$ – матрица монодромии «возмущенной» системы (2.5). Тогда матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ «невозмущенной» системы (1.4) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, а именно, $\mu_0 = e^{T\omega_1 i} = e^{T\omega_2 i}$. При этом в силу того, что $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, имеем $\mu_0 \neq \pm 1$.

При малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми и представимыми в виде (3.6).

Так как в рассматриваемом случае P_2 мультипликатор μ_0 системы (1.4) является полупростым, то задачу построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.6) здесь можно проводить по той же схеме, что была приведена для подслучая P_1^1 (см. п. 3.1). Укажем здесь лишь особенности, присущие случаю P_2.

Во-первых, вместо равенств (3.1), выполненных в подслучае P_1^1, в случае P_2 следует говорить о том, что найдется пара ненулевых линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства:

$$JA_0e = i\omega_1 e, \qquad JA_0 g = i\omega_2 g.$$

Эти векторы будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению μ_0 кратности 2.

Во-вторых, хотя здесь и имеет место полный аналог леммы 3.1, но доказательство этого аналога будет иметь свои особенности. В частности, необходимости обеспечить выполнения равенства (3.5) здесь нет, так как оно будет выполнено всегда.

Наконец, в-третьих, вместо чисел (3.8) в матрицах (3.9) и (3.12) в случае P_2 следует использовать числа

$$a = (S_0e, e), \qquad b = (S_0g, g), \qquad c = \int_0^T e^{-2\pi i k_0 t/T}(S_1(t)g, e)dt; \tag{4.1}$$

здесь S_0 – матрица (3.7).

С учетом указанных особенностей в рассматриваемом случае P_2 верны полные аналоги теорем 3.1 и 3.2, а также их следствий.

Отметим, что при $k_0 = 0$ формулы для случая P_2 совпадают с соответствующими формулами рассмотренного выше подслучая P_1^1. Это естественно, так как равенство $k_0 = 0$ означает, что $\omega_1 = \omega_2$, т.е. матрица JA_0 имеет кратное полупростое собственное значение $\lambda = i\omega_0$; здесь $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$.

5. Случай P_3

Рассмотрим, наконец, случай P_3, т.е. пусть матрица JA_0 имеет простое собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0. Тогда матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ «невозмущенной» системы (1.4) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$ (если k_0 четно) или $\mu_0 = -1$ (если k_0 нечетно). Из теоремы Крейна – Гельфанда – Лидского следует, что в рассматриваемом случае система (1.4) не обладает свойством сильной устойчивости.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ «возмущенной» системы (2.5) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$. Функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемы и представимы в виде (3.6).

Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\mu_1^{(j)}$ в формулах (3.6). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае имеется ненулевой вектор $e + ig \in \mathbb{C}^{2N}$ (где $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$) такой, что:

$$JA_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig). \tag{5.1}$$

При этом векторы $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$ будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению μ_0 кратности 2.

Лемма 5.1. *Имеет место соотношение:* $(e, Jg) \neq 0$.

Положим

$$\nu = \frac{1}{(e, Jg)}. \tag{5.2}$$

Число (e, Jg), а следовательно, и число ν, является вещественным. Определим матрицу:

$$B = \nu\mu_0 \begin{bmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -a \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

в которой числа a, b_1 и b_2 определяются равенствами:

$$a = \int_0^T \{\cos(2\omega_0 t)\,(S_1(t)e, g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)g, g) - (S_1(t)e, e)]\}dt, \tag{5.4}$$

$$b_1 = \int_0^T [\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, g) + \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, e) + \sin(2\omega_0 t)\,(S_1(t)e, g)]dt, \tag{5.5}$$

$$b_2 = b_1 - [(S_0 e, e) + (S_0 g, g)]; \tag{5.6}$$

здесь S_0 – матрица (3.7).

Теорема 5.1. *Коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.6) – это собственные значения матрицы (5.3).*

Положим

$$\Delta = a^2 + b_1 b_2. \tag{5.7}$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (5.3) – это числа $\lambda_{1,2} = \pm\nu\mu_0\sqrt{\Delta}$, которые могут быть как вещественными, так и чисто мнимыми. Следовательно, коэффициенты $\mu_1^{(1)}$и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.6) – это числа

$$\mu_1^{(1)} = \nu\mu_0\sqrt{\Delta}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}. \tag{5.8}$$

Приведем некоторые следствия теоремы 5.1.

Следствие 5.1. *В случае P_3 мультипликатор μ_0 системы (1.4) равен $\mu_0 = 1$ или $\mu_0 = -1$ и является полупростым кратности 2. Этот мультипликатор является индефинитным и, соответственно, невозмущенная система (1.4) не является сильно устойчивой. Для малых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 расщепляется в соответствии с формулами (3.6) и (5.8).*

Следствие 5.2. *Пусть* $\Delta < 0$. *Тогда для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (2.5) при малых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* μ_0 *системы (1.4) остается на единичной окружности:* $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$. *В этом случае система (2.5) остается устойчивой.*

Следствие 5.3. *Пусть* $\Delta > 0$. *Тогда для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (2.5) при малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* μ_0 *системы (1.4) покидает единичную окружность:* $|\mu_1(\varepsilon)| < 1$ *и* $|\mu_2(\varepsilon)| > 1$. *В этом случае при малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *система (2.5) неустойчива.*

6. Приложение: устойчивость точек либрации задачи трех тел

6.1. Постановка задачи. В качестве приложения рассмотрим вопрос об устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел (ПОЭЗТТ) (см., например, [5], [11]). Этот вопрос в линейной постановке приводит к необходимости исследования системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t,\varepsilon,\mu)x, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \tag{6.1}$$

в которой J – матрица (1.2) порядка 4×4, $A(t,\varepsilon,\mu)$ – симметрическая матрица:

$$A(t,\varepsilon,\mu) = \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{4}\rho(t,\varepsilon) & \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu-1)\rho(t,\varepsilon) & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu-1)\rho(t,\varepsilon) & 1-\frac{9}{4}\rho(t,\varepsilon) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\rho(t,\varepsilon) = (1+\varepsilon\cos t)^{-1}$, ε – эксцентриситет кеплеровской орбиты ($0 \leqslant \varepsilon < 1$), μ – параметр масс ($0 < \mu < 1$). Система (6.1) является линейной периодической (с периодом $T = 2\pi$) гамильтоновой системой.

Исследованию устойчивости треугольных точек либрации ПОЭЗТТ посвящены многочисленные исследования. Одним из наиболее интересных здесь является вопрос о построении областей устойчивости системы (6.1) в плоскости параметров (μ,ε). Основные известные результаты относительно этого вопроса изложены в монографии [11]. Исследования в указанном направлении активно продолжаются (см., например, [22]–[25]).

На рис. 1. изображены области устойчивости и неустойчивости системы (6.1) для малых значений μ.

Заштрихованная область соответствует устойчивости. Граница области устойчивости образована тремя непрерывными линиями Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Эти линии выходят на ось μ в точках:

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,028595..., \qquad \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0,038520\dots. \tag{6.2}$$

В этом пункте в качестве иллюстрации полученных выше результатов обсуждаются вопросы построения касательных к кривым Γ_1, Γ_2 и Γ_3 в точках $(\mu_0, 0)$ и $(\mu^*, 0)$ соответственно.

6.2. Вспомогательные построения. При $\varepsilon = 0$ система (6.1) является автономной:

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(\mu)x, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \tag{6.3}$$

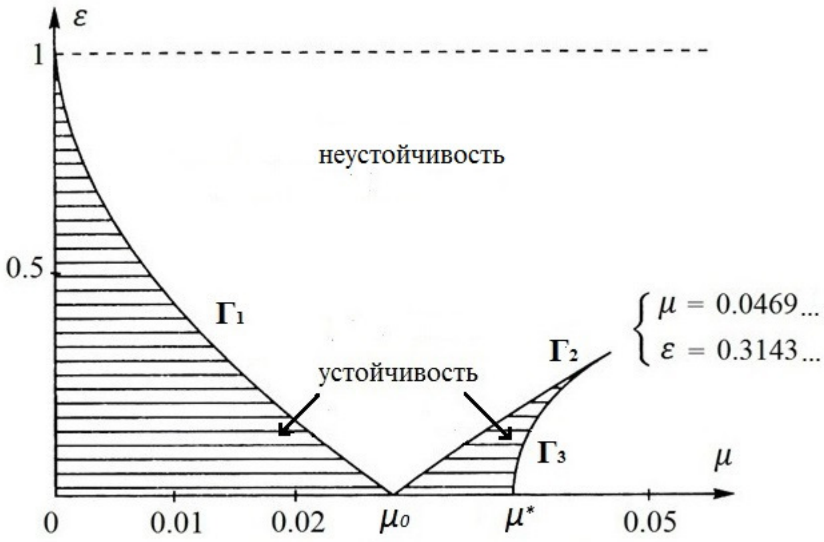

Рис. 1. Область устойчивости треугольных точек либрации

где $JA_0(\mu)$ – гамильтонова матрица:

$$JA_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 1 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \dfrac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Анализ характеристического уравнения матрицы (6.4) показывает, что:

1^o матрица $JA_0(\mu_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений вида $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = 1/2$. При этом два других ее собственных значения – это числа $\pm i\omega_1$, где $\omega_1 = \sqrt{3}/2$. Таким образом, при $\mu = \mu_0$ выполняется условие типа (2.2) или (что то же самое) условия случая P_3 (см. п. 5). При $\mu = \mu_0$ система (6.3) имеет мультипликатор $\eta_0 = e^{i\omega_0 2\pi} = -1$, являющийся полупростым кратности два и индефинитным.

2^o матрица $JA_0(\mu^*)$ имеет пару неполупростых кратности два чисто мнимых собственных значений вида $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$. Таким образом, при $\mu = \mu^*$ выполняется условие типа (2.3) или (что то же самое) условия случая P_1, а именно, подслучая P_2^1 (см. п. 3.2). При $\mu = \mu^*$ система (6.3) имеет мультипликатор $\eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}$, являющийся неполупростым кратности два и индефинитным.

Таким образом, задача исследования устойчивости системы (6.1) при $\mu = \mu_0$ и при $\mu = \mu^*$ и малых значениях ε является задачей о параметрическом резонансе. При этом для $\mu = \mu_0$ имеет место простой резонанс, а для $\mu = \mu^*$ – комбинационный резонанс.

Перейдем к исследованию устойчивости системы (6.1) в условиях случаев 1^o и 2^o.

6.3. Случай 1^o**.** Рассмотрим задачу исследования устойчивости системы (6.1) при близких к μ_0 значениях μ и малых значениях ε. А именно, эту задачу будем изучать для значений (μ, ε), лежащих на прямой

$$\mu = \mu_0 + m\varepsilon, \tag{6.5}$$

где m – некоторый фиксированный коэффициент.

Подставляя (6.5) в (6.1) и проведя соответствующие преобразования (с учетом (6.2)), получим систему

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0 + \varepsilon S_1(t) + S_2(t,\varepsilon)]x, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \tag{6.6}$$

где

$$JA_0 = JA(\mu_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$JS_1(t) = -mA_1 - \cos tA_2,$$

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица $S_2(t,\varepsilon)$ является симметрической, непрерывной и 2π-периодической по t, гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|S_2(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

Система (6.6) – это система вида (2.5). Для исследования устойчивости системы (6.6) воспользуемся теоремой 5.1. Для этого следует построить матрицу (5.3). В свою очередь, это требует построения собственного вектора $e + ig$, отвечающего собственному значению $i/2$ матрицы JA_0. В качестве e и g можно взять, например, векторы

$$e = \begin{bmatrix} 8 \\ -2\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6}/2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, фигурирующие в формулах (5.3)-(5.6) числа T, ω_0, μ_0 (которое здесь переобозначено через η_0) и ν равны:

$$T = 2\pi, \qquad \omega_0 = \frac{1}{2}, \qquad \eta_0 = -1, \qquad \nu = -1/7.$$

Все готово для вычисления элементов матрицы (5.3). После несложных вычислений получим:

$$B = \frac{\pi}{28}\begin{bmatrix} -4\sqrt{6} & 39 - 504\sqrt{2}m \\ 39 + 504\sqrt{2}m & 4\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

В частности, число (5.7) здесь равно: $\Delta = 49\pi^2\,(33/16 - 648m^2)$.

Отсюда и из следствия 5.1 получим, что кратный мультипликатор $\eta_0 = -1$ системы (6.3) при $\mu = \mu_0$ при переходе к системе (6.6) расщепляется в соответствии с формулами (3.6) и (5.8), которые в нашем случае принимают вид:

$$\eta_1(\varepsilon) = -1 + \eta_1^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \eta_2(\varepsilon) = -1 + \eta_1^{(2)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})\,;$$

здесь

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{7}\sqrt{\Delta}, \qquad \eta_1^{(2)} = -\eta_1^{(1)}.$$

Тогда из следствий 5.2 и 5.3 получим, что изменение характера устойчивости системы (6.6) происходит при $\Delta = 0$, т.е. при значениях m, определенных равенствами: $m = \pm k_0$, где

$$k_0 = \sqrt{\frac{11}{3456}}.$$

При этом система (6.6) неустойчива, если $-k_0 < m < k_0$; она устойчива, если $m < -k_0$ или $m > k_0$. Отсюда следует, что прямые

$$\mu = \mu_0 + k_0\varepsilon\,, \qquad \mu = \mu_0 - k_0\varepsilon$$

являются искомыми касательными к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке $(\mu_0, 0)$.

6.4. Случай 2^o**.** Рассмотрим задачу исследования устойчивости системы (6.1) при близких к μ^* значениях μ и малых значениях ε. А именно, эту задачу будем изучать для значений (μ, ε), лежащих на прямой

$$\mu = \mu^* + m\varepsilon, \tag{6.7}$$

где m – некоторый фиксированный коэффициент.

Подставляя (6.7) в (6.1) и проведя соответствующие преобразования, получим систему вида (6.6), в которой:

$$JA_0 = JA(\mu^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$JS_1(t) = -mA_1 - \cos t A_2,$$

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для исследования устойчивости полученной системы воспользуемся теоремой 3.3. Для этого следует определить числа (3.18). В свою очередь, это требует построения пары ненулевых линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства (3.16) при $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$. Эти векторы будут собственным и присоединенным, соответственно, для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими неполупростому собственному значению $e^{i\sqrt{2}\pi}$ кратности 2; а именно, будут выполнены равенства:

$$V_0 e = e^{i\sqrt{2}\pi} e, \qquad V_0 g = e^{i\sqrt{2}\pi}(g + Te).$$

В качестве e и g можно взять, например, векторы

$$e = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} - 2i\sqrt{23} \\ 10i \\ \sqrt{46} - 2i \\ 3\sqrt{2} - 2i\sqrt{23} \end{bmatrix}, \qquad g = \frac{1}{3\sqrt{2} - 2i\sqrt{23}} \begin{bmatrix} -4\left(9\sqrt{23} + 16i\sqrt{2}\right) \\ 68 - 16i\sqrt{46} \\ -\left(48 + 24i\sqrt{46}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, фигурирующие в формулах (3.16) и (3.18) числа T, ω_0, μ_0 (которое здесь переобозначено через η_0) и ν равны:

$$T = 2\pi, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}, \qquad \nu = \frac{1}{160}.$$

Отсюда и из следствия 3.6 получим, что кратный мультипликатор $\eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}$ системы (6.3) при $\mu = \mu^*$ при переходе к системе (6.6) расщепляется в соответствии с формулами (3.15) и (3.18), которые в нашем случае принимают вид:

$$\eta_1(\varepsilon) = \eta_0 + \eta_1^{(1)}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon), \qquad \eta_2(\varepsilon) = \eta_0 + \eta_1^{(2)}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)\,;$$

здесь

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi\sqrt{2}}\sqrt[4]{621}\sqrt{m\pi}, \qquad \eta_2^{(1)} = -\eta_1^{(1)}.$$

Тогда из следствий 3.7 и 3.8 получим, что изменение характера устойчивости системы (6.6) происходит при $m = 0$. При этом система (6.6) неустойчива (устойчива), если $m > 0$ ($m < 0$). Отсюда следует, что вертикальная прямая $\mu = \mu^*$ является искомой касательной к кривой Γ_3 в точке $(\mu^*, 0)$.

7. Доказательства основных утверждений

7.1. Вспомогательные построения. Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения, полученные ранее авторами настоящей статьи (см. [20], [21]).

Пусть $A(\varepsilon)$ – вещественная квадратная матрица, гладко зависящая от параметра ε. Пусть сначала матрица $A_0 = A(0)$ имеет полупростое собственное значение λ_0 (вещественное или комплексное) кратности 2. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = \lambda_0$. Указанные функции непрерывно дифференцируемы и представимы в виде

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{7.1}$$

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что:

$$A_0e = \lambda_0 e, \qquad A_0 g = \lambda_0 g, \qquad A_0^* e^* = \overline{\lambda_0}e^*, \qquad A_0^* g^* = \overline{\lambda_0}g^*.$$

Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \qquad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. *Коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в формулах (7.1) являются собственными значениями матрицы:*

$$D = \begin{bmatrix} (A_1e, e^*) & (A_1g, e^*) \\ (A_1e, g^*) & (A_1g, g^*) \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$

где $A_1 = A'(0)$.

Пусть теперь матрица $A_0 = A(0)$ имеет неполупростое собственное значение λ_0 (вещественное или комплексное) кратности 2. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = \lambda_0$. Указанные функции непрерывны и представимы в виде разложения Пюизье:

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(1)} + O(\varepsilon), \qquad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(2)} + O(\varepsilon). \tag{7.4}$$

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что:

$$A_0e = \lambda_0 e, \qquad A_0 g = \lambda_0 g + e, \qquad A_0^* e^* = \overline{\lambda_0}e^*, \qquad A_0^* g^* = \overline{\lambda_0}g^* + e^*.$$

Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами:

$$(e, g^*) = (g, e^*) = 1, \quad (e, e^*) = (g, g^*) = 0. \tag{7.5}$$

Теорема 7.2. *Коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложениях (7.4) – это числа*

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt{(A_1 e, e^*)}, \qquad \lambda_1^{(2)} = -\lambda_1^{(1)}\,;$$

здесь $A_1 = A'(0)$.

Ниже без специальных ссылок используются свойства матрицы (1.2):

$$\det J = \det J^{-1} = 1, \qquad J^{-1} = J^* = -J, \qquad Re(Jx, x) = 0 \qquad \text{для} \qquad \forall x \in \mathbb{C}^{2N}.$$

7.2. Доказательство теорем 3.1 и 3.2. Ограничимся приведением доказательства теоремы 3.1; теорема 3.2 доказывается аналогично.

В силу теоремы 7.1 коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) – это собственные значения матрицы

$$D = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \tag{7.6}$$

здесь $V_1 = V'(0)$.

Пусть в условиях нашей теоремы 3.1 для определенности имеет место нормировка (3.2). Тогда в качестве векторов e^* и g^* в матрице (7.6) будем использовать векторы

$$e^* = -iJe, \qquad g^* = -iJg, \tag{7.7}$$

где e и g – векторы из (3.1). Векторы (7.7) являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $(JA_0)^*$, отвечающими собственному значению $\lambda = -\omega_0 i$, т.е. для них выполнены равенства:

$$(JA_0)^* e^* = -\omega_0 i e^*, \qquad (JA_0)^* g^* = -\omega_0 i g^*. \tag{7.8}$$

В силу равенств (3.2) и (3.5) векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют условиям нормировки (7.2).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (2.5) представима (см., например, [21]) в виде:

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + V_2(\varepsilon); \tag{7.9}$$

здесь $V_0 = e^{JA_0 T}$,

$$V_1 = V'(0) = e^{JA_0 T} \int\limits_0^T e^{-JA_0 \tau} J S_1(\tau) e^{JA_0 \tau} d\tau, \tag{7.10}$$

а $V_2(\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая матрица, удовлетворяющая условию: $\|V_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя матрицу (7.10) в (7.6) и учитывая равенства (7.7), установим справедливость теоремы 3.1.

7.3. Доказательство теоремы 3.3. По векторам e и g из равенств (3.16) определим новые векторы:

$$e_1 = e, \qquad g_1 = \frac{1}{T\mu_0} g, \qquad e_1^* = -\alpha J e, \qquad g_1^* = \frac{1}{T\overline{\mu_0}} \alpha J g,$$

где α – ненулевой коэффициент (вообще говоря, комплексный). Эти векторы удовлетворяют равенствам:

$$V_0 e_1 = \mu_0 e_1, \qquad V_0 g_1 = \mu_0 g_1 + e_1, \qquad V_0^* e_1^* = \overline{\mu_0} e_1^*, \qquad V_0^* g_1^* = \overline{\mu_0} g_1^* + e_1^*.$$

При этом векторы e_1, g_1, e_1^*, g_1^* можно нормировать в соответствии с аналогами равенств (7.5), положив $\alpha = T\overline{\mu_0}/(e, Jg)$.

Для завершения доказательства теоремы 3.3 остается применить утверждение теоремы 7.2 к матрице (7.9).

7.4. Доказательство леммы 5.1. По векторам $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$, участвующим в равенстве (5.1), определим вещественные векторы $e^* = Jg$ и $g^* = Je$. Тогда

$$(JA_0)^*(g^* + ie^*) = -\omega_0 i(g^* + ie^*),$$

т.е. вектор g^*+ie^* будет собственным вектором матрицы $(JA_0)^*$, отвечающим собственному значению $\lambda = -\omega_0 i$.

В соответствии со спектральной теорией линейных операторов (см., например, [19]) пространство $\mathbb{R}^{2N}$ представимо в виде прямой суммы $\mathbb{R}^{2N} = E_0 \oplus E^0$ инвариантных для оператора JA_0 подпространств. Здесь E_0 – это корневое подпространство, отвечающее собственным значениям $\lambda_0 = \pm\omega_0 i$ оператора JA_0, а E^0 – это корневое подпространство, отвечающее остальной части спектра этого оператора. Пространство E_0 является двумерным с базисом e и g. Пространство E^0 может быть определено равенством: $E^0 = \{v : (v, e^*) = (v, g^*) = 0\}$.

Покажем, что $|(e, e^*)| + |(e, g^*)| > 0$. Действительно, в предположении противного получим $(e, e^*) = (e, g^*) = 0$, т.е. $e \in E^0$. С другой стороны, по построению $e \in E_0$. Это возможно лишь, если $e = 0$, что противоречит тому, что e – это собственный вектор.

В завершении доказательства леммы остается отметить, что $(e, e^*) = (e, Jg)$ и $(e, g^*) = (e, Je) = 0$.

7.5. Доказательство теоремы 5.1. В силу теоремы 7.1 коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.6) – это собственные значения матрицы (7.6), в которой $V_1 = V'(0)$, векторы e и g берутся из равенства (5.1). В качестве векторов e^* и g^* будем использовать векторы

$$e^* = \nu Jg, \qquad g^* = \nu Je, \tag{7.11}$$

где ν – число (5.2).

Элементы матрицы (7.6) могут быть вычислены с использованием формул (7.10) и (7.11). Проведя необходимые преобразования, получим, что матрица (7.6) совпадает с матрицей (5.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.П. Маркеев. *Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс.* М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2009.
2. В.А. Якубович, В.М. Старжинский. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* М.: Наука. 1972.
3. В.Ф. Журавлев, Ф.Г. Петров, М.М. Шундерюк. *Избранные задачи гамильтоновой механики.* М.: ЛЕНАНД. 2015.
4. V. Lanchares. *On the stability of Hamiltonian dinamical systems* // Monografias Matematicas Garca de Galdeano. **39**, 155–166 (2014).
5. K. Meyer, G. Hall, D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* 2nd ed. vol. 60 of Applied Mathematical Sciences. New York: Springer. 2009.
6. Ю. Мозер. *Лекции о гамильтоновых системах.* М.: Наука. 1973.
7. В.А. Якубович, В.М. Старжинский. *Параметрический резонанс в линейных системах.* М.: Наука. 1987.
8. Б.П. Демидович. *Лекции по математический теории устойчивости.* М.: Наука. 1967.
9. Д. Трещев. *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем.* М.: Фазис. 1998.
10. A.P. Seyranian, A.A. Mailybaev. *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications.* NJ: World Scientific. 2003.
11. А.П. Маркеев. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука. 1978.
12. А.П. Маркеев. *О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона* // Докл. РАН. **402**:3, 539–543 (2005).

13. А.Д. Брюно. *О типах устойчивости в системах Гамильтона* //Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. **021**, 24 с. (2020).
14. А.Д. Брюно. *Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. **057**, 27 с. (2019).
15. О.В. Холостова. *О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса* // Нелинейная динамика. **13**:4, 477–504 (2017).
16. Б.С. Бардин, Е.А. Чекина. *О конструктивном алгоритме исследования устойчивости положения равновесия периодической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса первого порядка* // Прикладная математика и механика. **82**:4, 414–426 (2018).
17. A. Elipe, V. Lanchares, A. Pascual. *On the stability of equilibria in two-degrees of freedom hamiltonian systems under resonances* // J. Nonlinear Sci. **19**, 305–319 (2005).
18. Л. Чезари. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир. 1964.
19. Т. Като. *Теория возмущений линейных матриц.* М.: Мир. 1975.
20. Л.С. Ибрагимова, И.Ж. Мустафина, М.Г. Юмагулов. *Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем* // Уфимс. матем. журн. **8**:3, 59–81 (2016).
21. М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, А.С. Белова. *Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **163**, 113–126 (2019).
22. А.Б. Батхин, А.Д. Брюно, В.П. Варин. *Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. **42**, 32 с. (2011).
23. G.E. Roberts. *Linear Stability of the Elliptic Lagrangian Triangle Solutions in the Three-Body Problem* // Journal of Differential Equations. **182**, 191–218 (2002).
24. T. Kovacs. *Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies* // Mon. Not. R. Astron. Soc. **430**:4, 2755–2760 (2013).
25. М.Г. Юмагулов, О.Н. Беликова, Н.Р. Исанбаева. *Бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел* // Астрономический журнал. **95**:2, 158–168 (2018).

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru

Лилия Сунагатовна Ибрагимова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: lilibr@mail.ru

Анна Сергеевна Белова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: 89177662488@mail.ru