ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 27-36.

УДК 517.537+517.547

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р.А. БАШМАКОВ, К.П. ИСАЕВ, А.А. МАХОТА

Аннотация. Хорошо известна классическая теорема А.Ф. Леонтьева о представлении функций аналитических в выпуклой области D и непрерывных вплоть до границы рядами вида $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}$, сходящимися в топологии пространства $H(D)$, т.е. равномерно на компактных подмножествах из D.

В работе доказана возможность представления функций из

$$A_0(D) = \left\{ f \in H(D) \bigcap C(\overline{D}) : \ \|f\| := \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| \right\}$$

рядами экспонент, сходящимися в более сильной топологии: существует такое целое число $s > 0$, что:

1) для любой ограниченной выпуклой области D найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что каждая функция $f \in H(D) \bigcap C^{(s)}(\overline{D})$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме пространства $A_0(D)$;

2) для любой ограниченной выпуклой области D найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что каждая функция $f \in A_0(D)$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| (d(z))^s,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы области D. Число s связано с существованием целых функций с максимально точной асимптотической оценкой.

В частных случаях, когда D — многоугольник или область с гладкой границей и кривизной границы, отделенной от нуля, можно считать $s = 4$.

Ключевые слова: аналитические функции, целые функции, преобразование Фурье – Лапласа, интерполяция, ряды экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D20

1. Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости. В работе рассматривается задача о представлении функций в пространстве

$$A_0(D) = \left\{ f \in H(D) \bigcap C(\overline{D}) : \ \|f\| := \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| \right\}$$

рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \quad f \in A_0(D).$$

R.A. Bashmakov, K.P. Isaev, A.A. Makhota, Exponential series in normed spaces of analytic functions.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Поступила 8 июня 2021 г.

Обозначение $A_0(D)$ в контексте данной работы удобнее, чем традиционное $A(D)$, поскольку будет рассматриваться параметризованное семейство нормированных пространств $A_n(D)$, $n \in \mathbb{Z}$. Возможность такого представления следует из классической теоремы А.Ф. Леонтьева (см. [1, Теорема 5.3.2]), но ряды в этой теореме сходятся в топологии пространства $H(D)$, то есть равномерно на компактах из D. Мы намерены доказать возможность представления функций из $A_0(D)$ рядами экспонент, сходящимися к своей сумме в существенно более сильной топологии, чем топология равномерной сходимости на компактах, но несколько более слабой, чем нормированная топология $A_0(D)$ (см. теорема 3.2). Будут также получены формулы для коэффициентов ряда. Примеров нормированных пространств, в которых возможны разложения в ряды экспонент, сходящихся в норме пространства, то есть в которых существует базис из экспонент, известно немного. Это пространство L_2 на отрезке, пространство Соболева на отрезке ([2]) и пространства Смирнова и Бергмана на выпуклых многоугольниках ([3], [4]). В работах [5] и [6] доказано, что в пространствах Смирнова и Бергмана на выпуклых областях с гладкой границей экспоненциальных базисов не существует.

Основным в данной работе является следующее утверждение. Существует такое целое число $s > 0$, что:

1) для любой ограниченной выпуклой области D найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что каждая функция $f \in H(D) \bigcap C^{(s)}(\overline{D})$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме пространства $A_0(D)$;

2) для любой ограниченной выпуклой области D найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что каждая функция $f \in A_0(D)$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|(d(z))^s,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы области D. Число s связано с существованием целых функций с максимально точной асимптотической оценкой.

В частных случаях, когда D — многоугольник или область с гладкой границей и кривизной границы, отделенной от нуля, можно считать $s = 4$.

2. Преобразования Фурье – Лапласа

Введем семейство нормированных пространств

$$A_n(D) = \left\{ f \in H(D) \bigcap C^{(n)}(\overline{D}) : \ \|f\| := \max_{k=0,\dots,n} \sup_{z \in D} |f^{(k)}(z)| < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, имеют место непрерывные вложения $A_n \subset A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^n : f \to f^{(n)}$$

непрерывно действует из A_n на A_0.

Еще два вспомогательных семейства нормированных пространств целых функций с непрерывным параметром $\alpha \in \mathbb{R}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{P}_\alpha(D) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \ \|F\| := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda) - \alpha \ln(|\lambda|+1)} < \infty \right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha(D) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \ \|F\| := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda) - \alpha \ln(|\lambda|+1) + 2\ln^+ \ln(|\lambda|+1)} < \infty \right\},$$

где

$$H_D(\lambda) = \sup_{z \in D} \mathrm{Re}\ \lambda z$$

— опорная функция области D и $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$. Очевидно, имеют место непрерывные вложения $\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha \subset \mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}_\beta$ при $\beta \geq \alpha$.

Наконец, для $a > 0$ положим

$$B_a(D) = \left\{ f \in H(D): \ \|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|(d(z))^a < \infty \right\},$$

где через $d(z)$ обозначено расстояние от точки z до границы D:

$$d(z) = \inf_{w \notin D} |z - w|, \quad z \in D.$$

Лемма 2.1. 1. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на $A_n(D)$ и $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$ — его преобразование Фурье – Лапласа. Тогда $\widehat{S}(\lambda)$ — целая функция, удовлетворяющая оценке*

$$|\widehat{S}(\lambda)| \le \|S\|_{A_n^*} e^{H_D(\lambda) + n \ln(|\lambda|+1)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

то есть $\widehat{S}(\lambda) \in \mathcal{P}_n$ и

$$\|\widehat{S}\|_{\mathcal{P}_n} \le \|S\|_{A_n^*}.$$

2. *Если $F(\lambda) \in \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$, то $F(\lambda) \equiv \widehat{S}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, для некоторого непрерывного линейного функционала $S = S_F$ на пространстве $A_n(D)$. При этом*

$$\|S\|_{A_n^*} \le C \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}}.$$

Постоянная $C = C(D, n)$ не зависит от функции F.

Доказательство. 1. То, что преобразование Фурье – Лапласа — целая функция и имеет место формула

$$\frac{d}{d\lambda} \widehat{S}(\lambda) = S(z e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

– факт, хорошо известный и в данном случае легко доказуемый. Оценка тоже просто следует из определения нормы функционала:

$$|\widehat{S}(\lambda)| \le \|S\| \cdot \|e^{\lambda z}\|_{A_n(D)} = \|S\| \sup_{k=0,\dots,n} |\lambda|^k \sup_{z \in D} e^{\operatorname{Re} \lambda z}$$
$$\le \|S\| e^{H_D(\lambda) + n \ln(|\lambda|+1)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

2a. Сначала рассмотрим случай $n = 0$. Пусть $F \in \mathcal{P}_{-1}$ и

$$\gamma(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{\zeta^{k+1}}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D},$$

– ее преобразование Бореля. Как известно, в полуплоскости $\Pi(\varphi) = \{\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} > h_D(\varphi)\}$, где $h_D(\varphi) = r^{-1} H_D(r e^{i\varphi})$, выполняется равенство

$$\gamma(\zeta) = \int_0^{\infty} F(\lambda) e^{-\zeta \lambda} d\lambda,$$

где интеграл берется по лучу $\{\lambda = r e^{i\varphi}, \ r > 0\}$. Следовательно, для $\zeta \in \Pi(\varphi)$ выполняется неравенство

$$|\gamma(\zeta)| \le \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda) + \ln(|\lambda|+1) + 2 \ln^+ \ln(|\lambda|+1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(r+1) \ln^2(r+1)} dr,$$

значит,

$$|\gamma(\zeta)| \le \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}}, \quad \zeta \in \Pi(\varphi).$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbb{C} \setminus \overline{D} = \bigcup_{\varphi \in [0; 2\pi)} \Pi(\varphi)$, получим ограниченность функции γ:

$$|\gamma(\zeta)| \le \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}. \tag{1}$$

Возьмем произвольную функцию $f \in A_0(D)$. Не уменьшая общности будем считать, что $0 \in D$. Возьмем произвольное число $t \in (1; 2]$ и замкнутый жорданов контур C_t, охватывающий область D и лежащий в области $tD = \{tz : z \in D\}$. Функция $f(z)$ равномерно непрерывна на компакте $\overline{D}$, значит функция

$$B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_t} \gamma(\zeta) f\left(\frac{\zeta}{t}\right) d\zeta,$$

равномерно непрерывна на интервале $(1; 2)$, в частности, существует

$$< f, \gamma > := \lim_{t \to 1} B(t), \tag{2}$$

причем из (1) следует, что

$$| < f, \gamma > | \leq \frac{|\partial D|}{2\pi} \|f\|_{A_0} \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}}. \tag{3}$$

Таким образом, формула

$$S(f) = < f, \gamma >, \quad f \in A_0,$$

определяет линейный непрерывный функционал на A_0, причем,

$$\|S\|_{A_0^*} \leq \frac{|\partial D|}{2\pi} \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}}.$$

Кроме того, по формуле Бореля

$$S(e^{\lambda z}) = \lim_{t \to 1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_t} \gamma(z) e^{\lambda \frac{z}{t}} dz = \lim_{t \to 1} F\left(\frac{\lambda}{t}\right) = F(\lambda).$$

Замечание 2.1. *Несколько более объемными выкладками можно доказать, что $\gamma(z)$ непрерывна на $\mathbb{C} \setminus D$ и функционал $S = S_F$ определяется формулой*

$$S_F(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad f \in A_0.$$

2b. Перейдем к случаю произвольного натурального n. Несложно проверить, что линейный оператор

$$L_n(F)(\lambda) := \lambda^{-n} \left(F(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k \right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

непрерывно действует из $\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$ в $\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}$. Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$. Из доказанного в п. 2a следует, что

$$F_n = L_n(F) = \widehat{S}_n$$

для некоторого $S_n \in A_0^*$. Тогда формула

$$S(f) = S_n(\mathcal{D}^n f) + \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(0) f^{(k)}(0), \quad f \in A_n,$$

определяет линейный непрерывный функционал на A_n, причем

$$\begin{aligned}\|S\|_{A_n^*} &= \|S_n\|_{A_0^*}\|\mathcal{D}^n f\|_{A_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \|\delta^{(k)}\| \cdot \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}} \\ &\le \frac{|\partial D|}{2\pi}\|F_n\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}}\|\mathcal{D}^n f\|_{A_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \|\delta^{(k)}\| \cdot \|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}} \\ &\le \left(\frac{|\partial D|}{2\pi}\|L_n\|\|\mathcal{D}^n f\|_{A_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \|\delta^{(k)}\|\right)\|F\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}},\end{aligned}$$

где через $\|\delta^{(k)}\|$ обозначена норма функционала $F \to F^{(k)}(0)$ в пространстве $\mathcal{P}_{n-1}$.

Равенство $\widehat{S} = F$ проверяется непосредственной подстановкой. □

Следствие 2.1. *Любая функция $f \in A_n(D)$ является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого функционала S на пространстве $\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$.*

Доказательство. Для $n = 0$ форма $< f, \gamma >$, определенная в (2), билинейна на $A_0 \times \mathcal{P}_{-1}$ и при фиксированной f является линейным функционалом S_f на $\mathcal{P}_{-1}$. Из оценки (3) следует непрерывность этого функционала. Равенство $\widehat{S}_f = f$ следует из формулы Коши.

В случае произвольного n доказательство также вытекает из п. 2b. □

3. Интерполяция в пространствах $\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$

Свойства систем экспонент $e^{\lambda_k z},\ k \in \mathbb{N}$, традиционно описываются характеристической целой функцией $L(\lambda)$ с множеством нулей $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$. В данной статье мы будем пользоваться результатами работы [7]. В частности, из теоремы 1 в этой работе легко вытекает следующая теорема.

Теорема A. *Существует универсальная постоянная A такая, что для любой ограниченной выпуклой области D найдется целая функция $f(\lambda)$, обладающая свойствами:*
1) *множество нулей $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, разделено в том смысле, что для некоторого $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_k) = B(\lambda_k, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются;*
2) *выполняются соотношения*

$$|\ln|f(\lambda)| - H_D(\lambda)| \le A\ln(|\lambda|+1) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_\delta(\lambda_k),$$
$$|\ln|f'(\lambda_k)| - H_D(\lambda_k)| \le A\ln(|\lambda_k|+1) + C', \quad k \in \mathbb{N},$$

где C и C' — константы, зависящие от области D.

Из этой теоремы выведем факт существования двух целых функций $L_\pm$, которые мы используем как инструмент построения систем экспонент.

Теорема 3.1. *Существуют универсальные постоянные $b > 0$ и $q \in (1;2]$ такие, что для любой ограниченной выпуклой области D найдутся целые функции $L_+(\lambda)$ и $L_-(\lambda)$, обладающие свойствами:*
1) *множества нулей Λ_+ и Λ_-, каждой из этих функций разделены в том смысле, что для некоторого $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1|)^{-1}),\ \lambda \in \Lambda_+\ (\lambda \in \Lambda_-)$, попарно не пересекаются;*
2) *для функции L_+ выполняются соотношения*

$$H_D(\lambda) + q\ln(|\lambda|+1) \le \ln|L_+(\lambda)| \le H_D(\lambda) + b\ln(|\lambda|+1) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_{w\in\Lambda_+} B_\delta(w),$$

$$\ln|L'_+(\lambda)| \ge H_D(\lambda) + q\ln(|\lambda|+1), \quad \lambda \in \Lambda_+;$$

3) *для функции L_- выполняются соотношения*

$$H_D(\lambda) - b\ln(|\lambda|+1) + C \le \ln|L_-(\lambda)| \le H_D(\lambda) - q\ln(|\lambda|+1), \quad \lambda \notin \bigcup_{w\in\Lambda_-} B_\delta(w),$$

$$\ln|L'_-(\lambda)| \ge H_D(\lambda) - b\ln(|\lambda|+1), \quad \lambda \in \Lambda_-.$$

Доказательство. Пусть f — функция, существование которой утверждается в теореме A. Возьмем многочлен $P(\lambda)$ степени $[A]+2$ так, чтобы множество нулей функции $L_+ = fP$ было разделенным. Требуемые оценки для L_+ следуют из оценок в теореме A тривиальным образом для $b = [A]+2+A$, $q = [A]+2-A$.

Пусть $N = [A]+2$ и

$$Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{N}(\lambda - \lambda_k),$$

где $\{\lambda_k,\ k = 1,2,...,N\}$, — первые N нулей функции f из теоремы A, упорядоченных по возрастанию модулей. Тогда функция $L_- = \frac{f}{Q}$ удовлетворяет требуемым оценкам. □

Лемма 3.1. *Для любой функции $F \in \widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$, $\alpha \le q$, ее ряд Лагранжа по функции L_+ равномерно на компактах сходится к самой функции F, более того, при $\alpha \le q-1$ этот ряд сходится в норме пространства $\mathcal{P}_b$.*

Доказательство. Из разделенности множества нулей функции L_+ следует существование системы кривых Γ_m, не пересекающихся с множеством $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_\delta(\lambda_k)$ и удовлетворяющих оценке

$$\min_{z\in\Gamma_m}|z| \to \infty, \qquad |\Gamma_m| = O\left(\min_{z\in\Gamma_m}|z|\right), \quad m\to\infty.$$

Из нижних оценок L_+ в теореме 3.1 для любой функции $F \in \widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$, $\alpha \le q$, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_m}\frac{F(z)dz}{(z-\lambda)L_+(z)}\right| = O\left(\ln^{-2}\left(\min_{z\in\Gamma_m}|z|+1\right)\right) = o(1), \quad m\to\infty.$$

Значит ряд Лагранжа

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

равномерно на компактах сходится.

Из верхних оценок на $|L_+|$ в теореме 3.1 и из липшицевости функции $H_D(\lambda)+b\ln(|\lambda|+1)$ получим равномерную по k оценку

$$\left\|\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_b} \le \mathrm{Const}\cdot\frac{1}{|L'_+(\lambda_k)|}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

тем самым,

$$\left\|\sum_{k\ge N} F(\lambda_k)\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_b} \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{|F(\lambda_k)|}{|L'_+(\lambda_k)|}.$$

Поскольку λ_k — нули целой функции экспоненциального типа, то для $F\in\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$, $\alpha\le q-1$

$$\left\|\sum_{k\ge N} F(\lambda_k)\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_b} \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{(|\lambda_k|+1)^{\alpha-q}}{\ln^2(|\lambda_k|+1)} \to 0, \quad N\to\infty.$$

□

Лемма 3.2. *Для любой функции $F \in \widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$, $\alpha \le -b$, ее ряд Лагранжа по функции L_- равномерно на компактах сходится к самой функции F, более того, при $\alpha \le -b-1$ этот ряд сходится в норме пространства $\mathcal{P}_{-q}$.*

Доказательство. Из разделенности множества нулей функции L_- и нижних оценок на $|L_-|$, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_m}\frac{F(z)dz}{(z-\lambda)L_-(z)}\right| = O\left(\ln^{-2}\left(\min_{z\in\Gamma_m}|z|+1\right)\right) = o(1), \quad m\to\infty.$$

Значит ряд Лагранжа

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_-'(\lambda_k)}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

равномерно на компактах сходится.

Из верхних оценок на $|L_-|$ в теореме 3.1 и из липшицевости функции $H_D(\lambda)+b\ln(|\lambda|+1)$ получим равномерную по k оценку

$$\left\|\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_-'(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_{-q}} \le \mathrm{Const}\cdot\frac{1}{|L_+'(\lambda_k)|}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

тем самым,

$$\left\|\sum_{k\ge N} F(\lambda_k)\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_-'(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_{-q}} \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{|F(\lambda_k)|}{|L_-'(\lambda_k)|}.$$

Поскольку λ_k — нули целой функции экспоненциального типа, то для $F\in\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$, $\alpha\le -b-1$

$$\left\|\sum_{k\ge N} F(\lambda_k)\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_+'(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_{b_+}} \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{(|\lambda_k|+1)^{\alpha+b}}{\ln^2(|\lambda_k|+1)} \to 0, \quad N\to\infty.$$

□

Положим $s=[b]+2$=2([A]+2). По следствию к лемме 2.1 любая функция из пространства $A_s(D)$ является преобразованием Фурье –Лапласа некоторого функционала на пространстве $\widetilde{\mathcal{P}}_{s-1}$. По непрерывной вложенности семейства пространств $\mathcal{P}_\alpha$ каждая функция $f\in A_s(D)$ является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого функционала на пространстве $\mathcal{P}_b$.

Теорема 3.2. *Любая функция $f\in A_s$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z\in D,$$

сходящегося в равномерной норме по $\overline{D}$. Коэффициенты могут быть вычислены по формулам

$$f_k = S\left(\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_+'(\lambda_k)}\right), \quad k\in\mathbb{N},$$

где $S=S_f$ — функционал на пространстве $\mathcal{P}_b$, порожденный функцией f.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z\in\overline{D}$. Функция $e^{\lambda z}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, принадлежит всем пространствам $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha\ge 0$, и по лемме 3.1 ряд Лагранжа

$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k z}\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L_+'(\lambda_k)}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

сходится в пространстве $\mathcal{P}_b$. Следовательно, имеет место поточечное равенство

$$f(z) = S(e^{\lambda z}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k z} S\left(\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}.$$

Докажем равномерную на $\overline{D}$ сходимость этого ряда. Из оценки (4) имеем

$$|f_k| \le \|S_f\| \left\|\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_b} \le \mathrm{Const}\cdot\frac{1}{|L'_+(\lambda_k)|}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Значит,

$$\left\|\sum_{k\ge N} e^{\lambda_k z}\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\| \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{e^{H_D(\lambda_k)}}{L'_+(\lambda_k)}.$$

Отсюда, в силу нижних оценок на производные и того, что $q>1$

$$\left\|\sum_{k\ge N} e^{\lambda_k z}\frac{L_+(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_+(\lambda_k)}\right\| \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{1}{(|\lambda_k|+1)^q}\to 0, \quad N\to\infty.$$

□

По следствию леммы 2.1 любая функция из A_0 является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого функционала $S=S_f$ на $\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}$. По непрерывной вложенности пространств $\mathcal{P}_\alpha$ функционал S_f действует и в пространствах $\mathcal{P}_{-q}$ для $q<-1$.

Теорема 3.3. *Любая функция $f\in A_0$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z\in D,$$

сходящегося в пространства $B_s(D)$, где $s=[b]+2$. Коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$f_k = S\left(\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_-(\lambda_k)}\right), \quad k\in\mathbb{N},$$

где $S=S_f$ — функционал на пространстве $\mathcal{P}_{-q}$, порожденный функцией f.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z\in D$. Функция $e^{\lambda z}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, при $z\in D$ принадлежит всем пространствам $\mathcal{P}_\alpha$, и по лемме 3.1 ряд Лагранжа

$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k z}\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_-(\lambda_k)}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

сходится в пространстве $\mathcal{P}_{-q}$. Следовательно, имеет место поточечное равенство

$$f(z) = S(e^{\lambda z}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k z} S\left(\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_-(\lambda_k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}.$$

Докажем сходимость этого ряда в норме пространства $B_s(D)$. Из оценки (5) имеем

$$|f_k| \le \|S_f\| \left\|\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_-(\lambda_k)}\right\|_{\mathcal{P}_{-q}} \le \mathrm{Const}\cdot\frac{1}{|L'_-(\lambda_k)|}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\left\|\sum_{k\ge N} e^{\lambda_k z}\frac{L_-(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)L'_-(\lambda_k)}\right\|_{B_s} \le \mathrm{Const}\cdot\sum_{k\ge N}\frac{\|e^{\lambda_k z}\|_{B_s}}{L'_-(\lambda_k)}.$$

Для оценки норм экспонент в пространстве $B_s(D)$ воспользуемся неравенством

$$H_D(\lambda) - \operatorname{Re} \lambda z = \sup_{\zeta\in D} \operatorname{Re} \lambda(\zeta - z) \geq \sup_{|\zeta - z|<d(z)} \operatorname{Re} \lambda(\zeta - z) = d(z)|\lambda|,$$

где $z \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $d(z)$ — расстояние от точки $z \in D$ до границы D. Отсюда для достаточно больших $|\lambda|$ выполняется неравенство

$$\|e^{\lambda z}\|_{B_s} = e^{H_D(\lambda)} e^{\sup_{z\in D}(-d(z)|\lambda|+s\ln d(z))} \leq \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{H_D(\lambda)-s\ln|\lambda|}.$$

Отсюда, в силу нижних оценок на производные и того, что $b - s = b - ([b] + 2) = -q < -1$

$$\left\| \sum_{k\geq N} e^{\lambda_k z} \frac{L_-(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'_-(\lambda_k)} \right\| \leq \mathrm{Const} \cdot \sum_{k\geq N} \frac{1}{(|\lambda_k| + 1)^q} \to 0, \quad N \to \infty.$$

□

В заключении заметим, что из теорем 3.2 и 3.3 следует следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Если для опорной функции $H_D(\lambda)$ ограниченной выпуклой области D существует целая функция L, удовлетворяющая условиям*
1) *множество нулей λ_k, $k \in \mathbb{N}$, разделено в том смысле, что для некоторого $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_k) = B(\lambda_k, \delta(|\lambda| + 1)^{-1})$ попарно не пересекаются;*
2) *выполняются соотношения*

$$|\ln|L(\lambda)| - H_D(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda| + 1) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} B_\delta(\lambda_k),$$
$$|\ln|L'(\lambda_k)| - H_D(\lambda_k)| \leq A\ln(|\lambda_k| + 1) + C', \quad k \in \mathbb{N},$$

и $s = 2([A] + 2)$, то

1. Существует система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что любая функция $f \in A_s$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

сходящегося в равномерной норме по $\overline{D}$.

2. Существует система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что любая функция $f \in A_0$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

сходящегося по норме

$$\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|(d(z))^s.$$

В работе [3] показано, что для ограниченных выпуклых многоугольников существуют целые функции L с константой $A = 0$. В работе [8] для областей D, граница которых имеет непрерывную кривизну отличную от нуля, построены целые функции L с константой $A = \frac{1}{2}$. Таким образом, для этих классов областей в теоремах 3.2–3.4 можно считать $s = 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
2. D.L. Russell. *On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval* // J. Math.Anal. Appl. **87**:2, 528–550 (1982).
3. Б.Я. Левин, Ю.И. Любарский. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат. **39**:3, 657–702 (1975).
4. К.П. Исаев. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимск. матем. журн. **2**:1, 71–86 (2010).
5. В.И. Луценко. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
6. К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. **71**:6, 69–90 (2007).
7. K.P. Isaev. *On entire functions with given asymptotic behavior* // Пробл. анал. Issues Anal., **7(25)**:2, 12–30 (2018).
8. Yu.I. Lyubarskii. *Exponential series in Smirnov spaces and interpolation by entire functions of special classes* // Math. USSR-Izv., **32**:3, 563–586 (1989).

Рустэм Абдрауфович Башмаков,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Алла Александровна Махота,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: allarum@mail.ru