ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 3-16.

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ, СОДЕРЖАЩИЕ ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

Аннотация. В областях евклидова пространства доказаны несколько новых неравенств типа Харди, содержащих градиент функции расстояния от точки до границы области. Для пробных функций рассматриваются усиленные неравенства в форме, предложенной Балинским и Эвансом для случая выпуклых областей. А именно, в неравенствах типа Харди вместо градиента пробной функции берется скалярное произведение градиентов пробной функции и функции расстояния от точки до границы заданной области.

В этой статье интегральные неравенства типа Харди изучаются в невыпуклых n-мерных областях, имеющих конечный внутренний радиус. Нами доказаны три новых L_p-неравенства типа Харди в усиленной форме с явными оценками констант в зависимости от размерности евклидова пространства $n \geqslant 2$, внутреннего радиуса области и двух параметров $p \geqslant 1$, $s \geqslant n$.

Доказательства имеют три важных ингредиента. Первый из них связан с аппроксимацией и специальным разбиением области, в частности, мы пользуемся аппроксимацией области подмножествами, составленными из конечного числа кубиков, грани которых параллельны координатным плоскостям. Второй ингредиент состоит в представлении области в виде счетного объединения подобластей с кусочно-гладкими границами и применении одной новой теоремы автора о сходимости градиентов функций расстояния этих подобластей. Кроме того, доказаны три новых неравенства типа Харди на конечном интервале, они используются при обосновании неравенств в многомерных областях.

Ключевые слова: неравенство типа Харди, внутренний радиус, градиент функции расстояния.

Mathematics Subject Classification: 26D10, 33C20

1. Введение

Пусть $n \geqslant 2$ и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. В таких областях будем рассматривать весовые интегральные неравенства типа Харди для функций $u \in C_0^1(\Omega)$, где $C_0^1(\Omega)$ — семейство вещественнозначных гладких функций, компактные носители которых лежат в области Ω.

Отметим, что Харди исследовал одномерные интегральные неравенства для различных значений параметров $p \in [1, \infty)$ и $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Его результаты можно сформулировать в следующей, объединенной форме (ср. с [1]).

Теорема 1.1. *Предположим, что $p \in [1,\infty)$ и параметр $s \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Тогда для любой функции $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $f \in C_0^1((0,\infty))$ и $f \not\equiv 0$, справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}} dt > \frac{|s-1|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^s} dt,$$

F.G. Avkhadiev, Hardy type inequalities involving gradient of distance function.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00115.

Поступила 5 февраля 2021 г.

где константа $|s-1|^p/p^p$ является точной.

В обобщениях неравенства Харди на многомерный случай используется величина $\rho(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x\in\Omega$ до границы области Ω, т.е.

$$\rho(x,\partial\Omega):=\inf_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|x-y|.$$

Через $\nabla\rho(x,\Omega)$ обозначим градиент этой функции. Отметим также, что здесь и далее пользуемся евклидовой нормой $|x|=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ и евклидовым скалярным произведением

$$x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

для векторов $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Отметим попутно известный факт: $|\nabla\rho(x,\partial\Omega)|=1$ почти всюду на Ω. Следовательно, с учетом неравенства Коши для скалярного произведения получим: для любой функции $u\in C_0^1(\Omega)$

$$|\nabla u(x)|\geqslant|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|\quad\text{почти всюду на }\Omega.\tag{1.1}$$

Имеются различные многомерные аналоги неравенства Харди (см., например, книги [2] и [3]). Нас будут интересовать обобщения двух следующих неравенств, где параметры выбраны так, что $p\in[1,\infty)$ и $s\in[1,\infty)$.

Первое неравенство имеет вид

$$\int_\Omega\frac{|\nabla u(x)|^pdx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)}\geqslant c_p(s,\Omega)\int_\Omega\frac{|u(x)|^pdx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}\qquad\forall u\in C_0^1(\Omega),\tag{1.2}$$

а второе неравенство является усилением первого в силу (1.1) и имеет вид

$$\int_\Omega\frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|^pdx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)}\geqslant c_p^*(s,\Omega)\int_\Omega\frac{|u(x)|^pdx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}\qquad\forall u\in C_0^1(\Omega).\tag{1.3}$$

Постоянные $c_p(s,\Omega)\in[0,\infty)$ и $c_p^*(s,\Omega)\in[0,\infty)$ предполагаются максимальными из возможных, т.е. они определены формулами:

$$c_p(s,\Omega)=\inf_{u\in C_0^1(\Omega),\,u\not\equiv0}\frac{\displaystyle\int_\Omega\frac{|\nabla u(x)|^pdx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)}dx}{\displaystyle\int_\Omega\frac{|u(x)|^pdx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}},\tag{1.4}$$

в случае неравенства (1.2) и

$$c_p^*(s,\Omega)=\inf_{u\in C_0^1(\Omega),\,u\not\equiv0}\frac{\displaystyle\int_\Omega\frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|^pdx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)}dx}{\displaystyle\int_\Omega\frac{|u(x)|^pdx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}},\tag{1.5}$$

в случае неравенства (1.3).

Максимальные постоянные $c_p(s,\Omega)$ и $c_p^*(s,\Omega)$ в неравенствах (1.2) и (1.3), определяемые формулами (1.4) и (1.5), соответственно, являются инвариантными по отношению к линейным конформным преобразованиям области. В частности, имеют место равенства

$$c_p(s,\Omega)=c_p(s,k\Omega+x_0),\qquad c_p^*(s,\Omega)=c_p^*(s,k\Omega+x_0),$$

где

$$k\Omega+x_0:=\{y\in\mathbb{R}^n: y=kx+x_0, x\in\Omega\}\quad(x_0\in\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{R}, k\neq0).$$

Обратим внимание читателя на простой, но важный факт. Инвариантность неравенств по отношению к масштабированию, т.е. к преобразованиям вида $y=kx$ $(k>0)$, приводит к тому, что константы $c_p(s,\Omega)$ и $c_p^*(s,\Omega)$ являются безразмерными величинами. Отметим также, что в силу (1.1), (1.4) и (1.5)

$$c_p^*(s,\Omega)\leqslant c_p(s,\Omega).$$

Настоящая статья посвящена доказательству новых неравенств вида (1.3) и их обобщений. В этом направлении имеется лишь несколько результатов, их мы опишем ниже.

2. О базовых свойствах функций $\rho(\,\cdot\,,\Omega)$ и их применениях

Функция расстояния $\rho(\,\cdot\,,\partial\Omega)$ имеет многочисленные применения в ряде областей теории функций и теории дифференциальных уравнений эллиптического типа. Эта функция достаточно хорошо изучена. Ее базовыми свойствами являются два факта (см., например, главу 2 книги [2]): функция $\rho(\,\cdot\,,\partial\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\rho(x,\partial\Omega)-\rho(y,\partial\Omega)|\leqslant|x-y|\qquad\forall x,y\in\Omega,$$

и, следовательно, является дифференцируемой почти всюду по теореме Радемахера [4]. Таким образом, функция расстояния $\rho(\,\cdot\,,\partial\Omega)$ является дифференцируемой на множестве $\Omega\setminus S(\Omega)$, где $S(\Omega)$ — множество всех сингулярных точек (т.е. тех точек, в которых $\rho(\,\cdot\,,\Omega)$ не является дифференцируемой), причем лебегова мера $\mathrm{mes}_n\,S(\Omega)=0$.

Известно также, что точка $x\in\Omega\setminus S(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существует единственная точка $x'\in\partial\Omega$, такая, что $\rho(x,\partial\Omega)=|x-x'|$, причем

$$\nabla\rho(x,\partial\Omega)=\frac{x-x'}{|x-x'|}.\tag{2.1}$$

Как указано в [2], с. 52, это утверждение восходит к К.С. Моцкину [5], оно было также получено позже независимо от Моцкина другими математиками. Как следствие (2.1) получаем, что

$$|\nabla\rho(x,\partial\Omega)|=1\qquad\forall x\in\Omega\setminus S(\Omega).$$

Существуют области, для которых $\mathrm{mes}_n\,\overline{S}(\Omega)=0$, где $\overline{S}(\Omega)$ обозначает замыкание в Ω множества $S(\Omega)$ сингулярных точек. Примерами таких областей служат шар, полупространство и выпуклый многогранник. Но оказывается, что $\mathrm{mes}_n\,\overline{S}(\Omega)>0$ для ряда плоских и пространственных областей. Мантегазза и Менуччи (C. Mantegazza A.C. Mennucci) [6] опубликовали пример ограниченной выпуклой области $\Omega^*\subset\mathbb{R}^2$, для которой множество $\overline{S}(\Omega^*)$ имеет положительную двумерную меру Лебега.

Фактически в статье [6] представлено семейство таких областей $\Omega^*\subset\mathbb{R}^2$. Геометрическое построение Ω^* основано на множествах типа Смита-Вольтерра-Кантора на единичной окружности $\{x\in\mathbb{R}^2:|x|=1\}$.

Пример Мантегаззы и Менуччи легко обобщается на случай $n\geqslant 3$. В частности, пусть область $\Omega^{**}:=\Omega^*\times(0,a)^{n-2}$, где a – достаточно большое положительное число. Тогда $\mathrm{mes}_n\,\overline{S}(\Omega^{**})>0$.

Для доказательства неравенств типа Харди вида (1.2) в областях евклидова пространства разработаны несколько методов. Наиболее простыми и эффективными являются методы, основанные на применениях формул интегрирования по частям типа формул Грина.

Но в тех областях, в которых $\mathrm{mes}_n\,\overline{S}(\Omega)>0$, невозможно использовать эти простые методы для доказательства неравенств вида (1.3) и их обобщений. Поэтому мы разработали новый подход, основанный на применении представлений вида

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j,$$

где Ω_j подбираются такими, что $\mathrm{mes}_n\,\overline{S}(\Omega_j)=0$. Кроме того, нам потребуются утверждения, доказанные нами в недавних статьях [7] и [8], о сходимости функций расстояния и их градиентов при исчерпании области.

Приведем основной результат статьи [8].

Теорема 2.1. *Пусть $n\geqslant 2$, и пусть*

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j,$$

где Ω и Ω_j — открытые множества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, K — некоторое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, причем выполняются условия

$$K \subset \Omega_j \subset \Omega_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $\rho(x, \partial\Omega_j) \to \rho(x, \partial\Omega)$ при $j \to \infty$ равномерно на компакте K, т.е.

$$\lim_{j\to\infty} \max_{x\in K} |\rho(x, \partial\Omega) - \rho(x, \partial\Omega_j)| = 0;$$

(ii) существует такое множество $S \subset K$, что его n-мерная лебегова мера $\operatorname{mes}_n S = 0$ и в каждой точке $x \in K \setminus S$

$$\lim_{j\to\infty} \nabla\rho(x, \partial\Omega_j) = \nabla\rho(x, \partial\Omega).$$

В статьях [7] и [8] нами получены также аналогичные результаты о сходимости при внешних аппроксимациях области и их применения к обоснованию строгих форм неравенств типа Харди.

В частности, в статье [8] нами доказана

Теорема 2.2. *Предположим, что $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$. Тогда*

$$c_p^*(s, \Omega) = \frac{(s-1)^p}{p^p}.$$

А.А. Балинским и У.Д. Эвансом эта теорема была доказана ранее в статье [9] для случая $p = s \in (1, \infty)$ и при некоторых дополнительных требованиях на область. В статье [9] указано, что некоторые неравенства вида (1.3) имеют применения в задачах распознавания и восстановления изображений.

Следующая теорема принадлежит автору (см. [8] и [10]).

Теорема 2.3. *Пусть $n \geqslant 2$ и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая условию $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Если $p \in [1, \infty)$ и $s \in [n, \infty)$, то*

$$c_p(s, \Omega) \geqslant c_p^*(s, \Omega) \geqslant \frac{(s-n)^p}{p^p}.$$

Оценки точны в том смысле, что существуют как ограниченные, так и неограниченные области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, для которых

$$c_p(s, \Omega) = c_p^*(s, \Omega) = \frac{(s-n)^p}{p^p}.$$

Другие оценки для константы $c_p(s, \Omega)$ можно найти в статьях [11]–[16].

3. Неравенства в областях с конечным внутренним радиусом

Внутренний радиус $\rho(\Omega)$ области Ω определяется равенством

$$\rho(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \rho(x, \partial\Omega).$$

Очевидно, внутренний радиус ограниченной области является конечной величиной. Отметим, что обратное утверждение неверно: существуют неограниченные области с конечным внутренним радиусом.

При $p = 1$ и $s \in (n, \infty)$ в силу (1.3), (1.5) и теоремы 2.3 в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla\rho(x, \partial\Omega)| dx}{\rho^{s-1}(x, \partial\Omega)} \geqslant (s-n) \int\limits_\Omega \frac{|u(x)| dx}{\rho^s(x, \partial\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.1}$$

причем существуют как ограниченные, так и неограниченные области Ω, для которых константа $c_1^*(s, \Omega) = s - n$ в этом неравенстве является точной, т.е. максимальной из возможных. Напомним одну особенность неравенств типа Харди: точность константы не означает существование экстремальной функции $u \not\equiv 0$, для которой достигается равенство в неравенстве.

Докажем, что неравенство (3.1) допускает существенное усиление для любой области Ω с конечным внутренним радиусом $\rho(\Omega)$. А именно, докажем два следующих утверждения.

Теорема 3.1. *Предположим, что $n \geqslant 2$, $s \in (n,\infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая лишь условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|dx}{\rho^{s-1}(x,\partial\Omega)} - (s-n)\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|dx}{\rho^{s}(x,\partial\Omega)} \geqslant S_1(u,\Omega) \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.2}$$

где

$$S_1(u,\Omega) = \frac{s-n}{(s-1)\,\rho^s(\Omega)}\int\limits_{\Omega} |u(x)|\,dx + \frac{1}{\rho^s(\Omega)}\int\limits_{\Omega} \rho(x,\partial\Omega)|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|\,dx.$$

Следующее утверждение является одновременно и обобщением, и следствием теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Предположим, что $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая лишь условию $\rho(\Omega) < \infty$. Если $p \in [1,\infty)$ и $s \in (n,\infty)$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|^p dx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)} - \frac{(s-n)^p}{p^p}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^{s}(x,\partial\Omega)} \geqslant S_p(u,\Omega) \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.3}$$

где

$$S_p(u,\Omega) = \frac{(s-n)^p}{p^{p-1}\,(s-1)\,\rho^s(\Omega)}\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx + \frac{1}{\rho^{ps}(\Omega)}\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|^p}{\rho^{s-p-ps}(x,\partial\Omega)}\,dx.$$

Как мы уже отметили выше, поскольку $|\nabla\rho(x,\partial\Omega)| = 1$ почти всюду на Ω, то в силу неравенства Коши для скалярного произведения справедливо неравенство (1.1). Поэтому теорема 3.2 влечет

Следствие 3.1. *Предположим, что $n \geqslant 2$, $p \in [1,\infty)$, $s \in (n,\infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)} - \frac{(s-n)^p}{p^p}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^{s}(x,\partial\Omega)} \geqslant S_p^*(u,\Omega) \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где

$$S_p^*(u,\Omega) = \frac{(s-n)^p}{p^{p-1}\,(s-1)\,\rho^s(\Omega)}\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \frac{1}{\rho^{ps}(\Omega)}\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p-ps}(x,\partial\Omega)}\,dx.$$

При $s = n$ нетривиальные аналоги неравенства (3.1) возможны за счет изменения весовых функций с применением логарифмических множителей так, как это сделано в статье автора [10] в менее общей ситуации, когда неравенства содержат $|\nabla u(x)|$ вместо модуля скалярного произведения $|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|$. А именно, с применением логарифмических множителей докажем две следующих теоремы.

Теорема 3.3. *Предположим, что $p \in [1,\infty)$, $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|^p}{\rho^{n-p}(x,\partial\Omega)} \ln^p \frac{\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)} dx \geqslant \frac{1}{p^p}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^{n}(x,\partial\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Отметим, что в общем случае логарифмический множитель в этом неравенстве является существенным фактором. Так, например, для области

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\},$$

т.е. для единичного шара с выколотым центром, не существует положительной постоянной $c(p,n)$, такой, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega_1)|^p}{\rho^{n-p}(x,\partial\Omega_1)} dx \geqslant c(p,n)\int\limits_{\Omega_1} \frac{|u(x)|^p dx}{\rho^{n}(x,\partial\Omega_1)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega_1).$$

Укажем также, что теорема 3.3 влечет следующее утверждение, доказанное нами в статье [10].

Следствие 3.2. *Предположим, что $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда имеют место неравенства*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|}{\rho^{n-1}(x,\partial\Omega)} \ln \frac{\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)} dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|dx}{\rho^n(x,\partial\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^n \ln^n \frac{\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)} dx \geqslant \frac{1}{n^n} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^n dx}{\rho^n(x,\partial\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

В теореме 3.3 усилено ядро интеграла в левой части за счет множителя

$$\ln^p \frac{\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)} \to \infty, \quad \text{когда} \quad \rho(x,\partial\Omega) \to 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда ослаблено ядро интеграла в правой части неравенства за счет логарифмического множителя.

Теорема 3.4. *Предположим, что $p \in [1,\infty)$, $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|}{\rho^{n-1}(x,\partial\Omega)} dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|}{\rho^n(x,\partial\Omega)} \ln^{-2} \frac{e\,\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)} dx \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Как обычно, через $e \approx 2,718$ обозначено основание натурального логарифма.

Если $p > 1$, то условие $u \in C_0^1(\Omega)$ влечет, что функция $v := |u|^p \in C_0^1(\Omega)$. Поэтому справедливо

Следствие 3.3. *Предположим, что $p \in [1,\infty)$, $n \geqslant 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, удовлетворяющая условию $\rho(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^{p-1}|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|}{\rho^{n-1}(x,\partial\Omega)} dx \geqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p A(x,\Omega)}{\rho^n(x,\partial\Omega)} dx \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где

$$A(x,\Omega) = \ln^{-2} \frac{e\,\rho(\Omega)}{\rho(x,\partial\Omega)}.$$

Для доказательства теорем потребуются следующие 4 леммы, обобщающие и усиливающие соответствующие утверждения, доказанные нами в [10].

Лемма 3.1. *Предположим, что $c = const > 0$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заданы две непрерывные функции $w_1 = w_1(x) > 0$, $w_2 = w_2(x) > 0$ и задан некоторый функционал $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.*

Если для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$J(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|\, w_1(x) dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|\, w_2(x) dx,$$

то для любого $p \in (1,\infty)$ и для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$pJ(|u|^p) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, w_1(x) dx \leqslant (cp)^p \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|^p\, w_1^{1-p}(x) w_2^p(x) dx.$$

Доказательство. Предположим, что число $p > 1$ и вещественнозначная функция $u \in C_0^1(\Omega)$. Тогда функция $v := |u|^p \in C_0^1(\Omega)$, так как

$$\nabla v = \nabla |u|^p = p|u|^{p-1}(\nabla u) sign(u)$$

и функция $|u|^{p-1}\mathrm{sign}\,(u)$ является непрерывной в силу того, что $u \in C_0^1(\Omega)$ и параметр $p > 1$. По условию леммы для функции $v = |u|^p \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$J(|u|^p) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, w_1(x) dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla |u(x)|^p \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|\, w_2(x) dx.$$

Оценим сверху интеграл в правой части, привлекая простое неравенство

$$|\nabla |u(x)|^p \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega)| \leqslant p|u(x)|^{p-1}|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega)|$$

и неравенство Юнга

$$a^{p-1}b \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) a^p + \frac{b^p}{p}$$

для величин

$$a = |u(x)|\, w_1^{\frac{1}{p}}(x), \quad b = cp|\nabla u(x)|\, w_1^{\frac{1}{p}-1}(x) w_2(x).$$

Получим

$$J(|u|^p) + \int\limits_\Omega |u(x)|^p\, w_1(x)dx \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int\limits_\Omega |u(x)|^p\, w_1(x)dx$$
$$+ \frac{1}{p} \int\limits_\Omega (cp)^p\, |\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega)|^p\, w_1^{1-p}(x)\, w_2^p(x)dx,$$

что влечет утверждение леммы. □

Лемма 3.2. *Предположим, что* $0 < a \leqslant b$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *где* n — *натуральное число,* $n \geqslant 2$, $s \in (n, \infty)$. *Если* $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ — *абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $f(0) = 0$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt \leqslant \frac{1}{s-n} \int\limits_0^a \frac{|f'(t)|}{t^{s-k}} \left(1 - \frac{t^s}{b^s}\right) dt.$$

Доказательство. Поскольку

$$|f(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f'(\tau)| d\tau,$$

то будем иметь

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt \leqslant \int\limits_0^a \frac{1}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt \int\limits_0^t |f'(\tau)| d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле и вычисляя внутренний интеграл, получим

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt \leqslant \int\limits_0^a \frac{|f'(\tau)|}{\tau^{s-k}} T(\tau) d\tau,$$

где

$$T(\tau) = \tau^{s-k} \int\limits_\tau^a \frac{1}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt.$$

Полагая $t = x\tau$ и применяя оценки

$$a \leqslant b, \qquad s > n, \qquad x^{k-1} \leqslant x^{n-1} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{b}{\tau},$$
$$1 - y^{s-n} + \frac{s-n}{n(s-1)}(y^{s-n} - y^s) \leqslant 1 - y^s \quad \text{при} \quad 0 \leqslant y = \tau/b \leqslant 1,$$

будем иметь

$$T(\tau) \leqslant \int\limits_1^{\frac{b}{\tau}} \frac{1}{x^{s-n+1}} \left(1 + \frac{x^s \tau^s}{(s-1)b^s}\right) dx$$
$$= \frac{1 - y^{s-n}}{s-n} + \frac{y^{s-n} - y^s}{n(s-1)} \leqslant \frac{1 - y^s}{s-n}, \qquad y = \frac{\tau}{b}.$$

Таким образом, получили неравенство

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{s-k+1}} \left(1 + \frac{t^s}{(s-1)b^s}\right) dt \leqslant \frac{1}{s-n} \int\limits_0^a \frac{|f'(\tau)|}{\tau^{s-k}} \left(1 - \frac{\tau^s}{b^s}\right) dt,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3.3. *Предположим, что* $0 < a \leqslant b$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, *где* n — *натуральное число,* $n \geqslant 2$. *Если* $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ — *абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $f(0) = 0$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{n-k+1}} dt \leqslant \int\limits_0^a \frac{|f'(t)|}{t^{n-k}} \ln \frac{b}{t} dt.$$

Доказательство. Применяя схему предыдущего доказательства, имеем

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{n-k+1}} dt \leqslant \int\limits_0^a \frac{1}{t^{n-k+1}} dt \int\limits_0^t |f'(\tau)| d\tau = \int\limits_0^a \frac{|f'(\tau)}{\tau^{n-k}} T^*(\tau) d\tau,$$

где

$$T^*(\tau) = \tau^{n-k} \int\limits_\tau^a \frac{dt}{t^{n-k+1}} \leqslant \tau^{n-k} \int\limits_\tau^b \frac{dt}{t^{n-k+1}} = \int\limits_1^{b/\tau} \frac{dx}{x^{n-k+1}} \leqslant \int\limits_1^{b/\tau} \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{\tau}.$$

Этим и завершается доказательство. □

Лемма 3.4. *Предположим, что* $0 < a \leqslant b$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, *где* n — *натуральное число,* $n \geqslant 2$. *Если* $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ — *абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $f(0) = 0$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)|}{t^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{t}} dt \leqslant \int\limits_0^a \frac{|f'(t)|}{t^{n-k}} dt.$$

Доказательство. Применяя схему доказательства леммы 3.2, имеем

$$\int\limits_0^a \frac{|f(t)| dt}{t^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{t}} \leqslant \int\limits_0^a \frac{dt}{t^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{t}} \int\limits_0^t |f'(\tau)| d\tau = \int\limits_0^a \frac{|f'(\tau)}{\tau^{n-k}} T^{**}(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} T^{**}(\tau) &= \tau^{n-k} \int\limits_\tau^a \frac{dt}{t^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{t}} \leqslant \tau^{n-k} \int\limits_\tau^b \frac{dt}{t^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{t}} \\ &= \int\limits_1^{b/\tau} \frac{dx}{x^{n-k+1} \ln^2 \frac{be}{\tau x}} \leqslant \int\limits_1^{b/\tau} \frac{dx}{x \ln^2 \frac{be}{\tau x}} = 1 - \frac{1}{\ln \frac{be}{\tau}} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 3.4 доказана. □

Доказательство. Доказательство теоремы 3.1. Нам потребуется исчерпание области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ открытыми подмножествами Ω_j, составленными из конечного числа кубиков, грани которых параллельны координатным плоскостям. Такой подход для доказательства некоторых неравенств типа Харди вида (1.2) был предложен нами ранее (см., например, [3], [10]).

Пусть вещественнозначная функция $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. Через $K \subset \Omega$ обозначим компактный носитель этой функции. В дальнейшем будем считать, что функция $u \in C_0^1(\Omega)$ фиксирована. Далее строим аппроксимацию области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Пусть число $h \in (0, 1)$. Рассмотрим покрытие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ следующими кубами

$$K(z, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = hz + y, y \in [0, h]^n\}, \quad z \in \mathbb{Z}^n.$$

Далее, определим множество $\Omega(h)$ как подмножество Ω, состоящее из внутренних точек объединения всех тех кубов, лежащих $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/h\}$. Тогда множество

$$\Omega(h) \subset \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/h\}$$

состоит из конечного числа кубов. Считаем, что число $h \in (0,1)$ выбрано достаточно малым, таким, что компакт K содержится в одной из компонент $\Omega(h)$.

Определим теперь последовательность Ω_j ($j \in \mathbb{N}$), полагая $\Omega_j := \Omega(h_j)$, где $h_j = h/2^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad K \subset \Omega_j \subset \Omega_{j+1} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Граница $\partial\Omega_j$ открытого множества Ω_j является объединением конечного числа $(n-1)$-мерных граней кубов $K(z, h_j)$. Далее, определим специальное разбиение Ω_j для любого фиксированного номера j, следуя статье [10].

Очевидно, граница $\partial\Omega_j$ содержит кубические грани размерности k для $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Пусть $\overline{G}_{jm} \subset \partial\Omega_j$ является k-мерной гранью одного из кубов, составляющих Ω_j. Попутно отметим, что сингулярное множество $S(\Omega_j)$ состоит из точек $x \in \Omega_j$, для которых существуют кубические грани где $\overline{G}_{jm} \neq \overline{G}_{jm'}$, такие, что

$$P(x, \Omega_j) \cap \overline{G}_{jm} \neq \emptyset, \quad P(x, \Omega_j) \cap \overline{G}_{jm'} \neq \emptyset.$$

Как указано в [10], множество точек $x \in \Omega_j$, расположенных на одинаковом расстоянии от двух граней $\overline{G}_{jm} \neq \overline{G}_{jm'}$ размерности $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, является ограниченным подмножеством $(n-1)$-мерной плоскости или некоторой $(n-1)$-мерной поверхности второго порядка.

Поскольку граничное множество $\partial\Omega_j$ состоит из конечного числа кубических граней, то $\mathrm{mes}_n\, S(\Omega_j) = \mathrm{mes}_n\, \overline{S}(\Omega_j) = 0$, где $\overline{S}(\Omega_j)$ означает замыкание в области Ω_j множества $S(\Omega_j)$. Далее, определим множества G_{jm} следующим образом.

Если $\dim G_{jm} = 0$, т.е. эта грань является точкой, одной из вершин некоторого куба $K(z, h_j)$, то полагаем $G_{jm} := \overline{G}_{jm}$; если $\dim G_{jm} = k \in \{1, \ldots, n-1\}$, то с точностью до вращения и переноса множество G_{jm} совпадает с множеством $(0, h)^k$ и $G_{jm} \subset \overline{G}_{jm}$, причем замыкание G_{jm} является гранью $\overline{G}_{jm} \subset \partial\Omega_j$.

По построению, имеем конечное число множеств G_{jm}, $m \in \{1, 2, \ldots, m_j\}$, таких, что $G_{jm} \neq G_{jm'}$ для $m \neq m'$, и $\partial\Omega_j = \cup_{m=1}^{m_j} G_{jm}$.

Определим теперь следующее подмножество Ω_j:

$$W(G_{jm}) = \{x \in \Omega_j \setminus S(\Omega_j) : P(x, \Omega_j) = \{y\}, y \in G_{jm}\}.$$

Для любой непрерывной функции $F \in C(\overline{\Omega}_j)$ можем пользоваться формулой:

$$\int_{\Omega_j} F(x)dx = \sum_{m=1}^{m_j} \int_{W(G_{jm})} F(x)dx.$$

Введем несколько новых обозначений. Пусть $S_+^{n-k} := \{t \in \mathbb{R}_+^{n-k} : |t| = 1\}$, где

$$\mathbb{R}_+^{n-k} := \{(t_1, \ldots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k} : t_1 > 0, \ldots, t_{n-k} > 0\}.$$

Пусть G_{jm} — кубическая грань размерности $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Предположим, что $\mathrm{mes}_n\, W(G_{jm}) > 0$. С точностью до евклидова движения множество $W(G_{jm})$ может быть представлено следующим образом:

$$W(G_{jm}) = \big\{y + r\omega : \ y \in G_{jm}, \ \omega \in S_+^{n-k}, \ 0 < r < \varphi_k(y, \omega; G_{jm}, \Omega_j)\big\},$$

где φ_k — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$0 \leqslant \varphi_k(y, \omega; G_{jm}, \Omega_j) \leqslant \rho(\Omega_j).$$

При интегрировании по множеству $W(G_{jm})$ величина $r = \rho(x, \partial\Omega_j)$ будет играть роль одной из переменных интегрирования, поэтому нам понадобятся три типа координат (сферические координаты, несколько цилиндрических координат и декартова система координат). Переходя от кратных к повторным интегралам, мы получаем n различных формул в зависимости от выбора систем координат.

Потребуются обозначения $\varphi_k(y,\omega) = \varphi_k(y,\omega; G_{jm}, \Omega_j) \in [0, \rho(\Omega_j)]$ и следующие формулы из статьи [10]:

– если $\dim(G_{jm}) = n-1$, то

$$\int_{W(G_{jm})} F(x)dx = \int_{G_{jm}} dy \int_0^{\varphi_{n-1}(y,\,\omega_0)} F(y + r\omega_0)dr;$$

– если $\dim(G_{jm}) = n-k$, $\mathrm{mes}_n W(G_{jm}) > 0$ и $2 \leqslant k \leqslant n-1$, то

$$\int_{W(G_{jm})} F(x)dx = \int_{G_{jm}} dy \int_{S_+^k} d\omega \int_0^{\varphi_{n-k}(y,\,\omega)} F(y + r\omega)r^{k-1}dr;$$

– если $\dim(\mathrm{G_{jm}}) = 0$, i. e. $G_{jm} = \{x_0\}$, и $\mathrm{mes}_n W(G_{jm}) > 0$, то

$$\int_{W(G_{jm})} F(x)dx = \int_{S_+^n} d\omega \int_0^{\varphi_0(x_0,\,\omega)} F(x_0 + r\omega)r^{n-1}dr.$$

Полагая $F(x) = |u(x)|r^{-s}\,(1 + r^s/((s-1)b^s))$ и применяя неравенство леммы 3.2 с выбором параметров

$$a = \varphi_{n-k}(y,\,\omega), \quad b = \rho(\Omega) \geqslant \rho(\Omega_j) \geqslant a$$

для внутренних интегралов, получаем неравенства

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\,\omega_0)} \frac{|u(x)|}{r^s}\left(1 + \frac{r^s}{(s-1)b^s}\right)dr \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\,\omega_0)} \frac{|u'_r(x)|}{r^{s-1}}\left(1 - \frac{r^s}{b^s}\right)dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\,\omega)} \frac{|u(x)|}{r^{s-k+1}}\left(1 + \frac{r^s}{(s-1)b^s}\right)dr \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\,\omega)} \frac{|u'_r(x)|}{r^{s-k}}\left(1 - \frac{r^s}{b^s}\right)dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\,\omega)} \frac{|u(x)|}{r^{s-n+1}}\left(1 + \frac{r^s}{(s-1)b^s}\right)dr \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\,\omega)} \frac{|u'_r(x)|}{r^{s-n}}\left(1 - \frac{r^s}{b^s}\right)dr$$

для случая $k=1$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$ и $k=n$ соответственно. Интегрируя эти неравенства по внешним переменным и учитывая равенства $r = \rho(x, \partial\Omega_j)$ и

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial r}\right| = \left|\nabla u(x) \cdot \nabla\rho(x, \partial\Omega_j)\right|, \tag{3.6}$$

будем иметь

$$\int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|u(x)|}{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}\left(1 + \frac{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}{(s-1)\rho^s(\Omega_j)}\right)dx \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega_j)|}{\rho^{s-1}(x,\partial\Omega_j)}\left(1 - \frac{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}{\rho^s(\Omega)}\right)dx.$$

Суммируя эти неравенства по $m \in \{1, 2, \ldots, m_j\}$, получим

$$\int\limits_{\Omega_j} \frac{|u(x)|}{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}\left(1 + \frac{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}{(s-1)\rho^s(\Omega)}\right)dx \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_{\Omega_j} \frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega_j)|}{\rho^{s-1}(x,\partial\Omega_j)}\left(1 - \frac{\rho^s(x,\partial\Omega_j)}{\rho^s(\Omega)}\right)dx.$$

Наконец, переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ с использованием теоремы 2.1 и теоремы Лебега о мажорированной сходимости, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|}{\rho^s(x,\partial\Omega)}\left(1 + \frac{\rho^s(x,\partial\Omega)}{(s-1)\rho^s(\Omega)}\right)dx \leqslant \frac{1}{s-n}\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)\cdot\nabla\rho(x,\partial\Omega)|}{\rho^{s-1}(x,\partial\Omega)}\left(1 - \frac{\rho^s(x,\partial\Omega)}{\rho^s(\Omega)}\right)dx,$$

равносильному (3.2). Тем самым, теорема 3.1 доказана. □

Доказательство. Доказательство теоремы 3.2. Положим

$$J(u) = \frac{\rho^{-s}(\Omega)}{s-1} \int\limits_{\Omega} |u(x)| dx, \qquad c = \frac{1}{s-n},$$

$$w_1(x) = \frac{1}{\rho^s(x, \partial\Omega)}, \qquad w_2(x) = \frac{1}{\rho^{s-1}(x, \partial\Omega)} \left(1 - \frac{\rho^s(x, \partial\Omega)}{\rho^s(\Omega)}\right).$$

Применяя последнее неравенство из доказательства теоремы 3.1 и лемму 3.1, получаем следующее утверждение: для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} \left(1 + \frac{p\rho^s(x, \partial\Omega)}{(s-1)\rho^s(\Omega)}\right) dx \leqslant \frac{p^p}{(s-n)^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} \left(1 - \frac{\rho^s(x, \partial\Omega)}{\rho^s(\Omega)}\right)^p dx.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство (3.3) теоремы 3.2 в силу того, что $p \geqslant 1$, $s > n$ и

$$\left(1 - \frac{\rho^s(x, \partial\Omega)}{\rho^s(\Omega)}\right)^p \leqslant 1 - \frac{\rho^{sp}(x, \partial\Omega)}{\rho^{sp}(\Omega)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Последнее неравенство сводится к элементарному неравенству $(1-t)^p \leqslant 1 - t^p$ для $t \in [0,1]$, так как

$$0 < t := \frac{\rho^s(x, \partial\Omega)}{\rho^s(\Omega)} \leqslant 1$$

для любой точки $x \in \Omega$. □

Доказательство. Доказательство теоремы 3.3. Нам потребуются геометрические построения, приведенные в доказательстве теоремы 3.1.

А именно, возьмем вещественнозначную функцию $u \in C_0^1(\Omega)$ с компактным носителем $K \subset \Omega$, строим последовательность открытых множеств Ω_j, составленных из кубиков, таких, что

$$\Omega_j := \Omega(h_j),$$

где $h_j = h/2^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad K \subset \Omega_j \subset \Omega_{j+1} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Далее, для фиксированного j рассматривается разбиение множеств $\partial\Omega_j$ и Ω_j на подмножества G_{jm} и $W(G_{jm})$. В доказательстве теоремы 3.1 мы получили n различных формул для интегралов по множествам $W(G_{jm})$ в зависимости от выбора систем координат. Пользуясь этими формулами для интегралов по множествам $W(G_{jm})$ для случая $F(x) = |u(x)|r^{-n}$, и применяя неравенство леммы 3.3 с выбором параметров $a = \varphi_{n-k}(y, \omega)$, $b = \rho(\Omega) \geqslant \rho(\Omega_j) \geqslant a$, для внутренних интегралов, получаем неравенства

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|u(x)|}{r^n} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|u_r'(x)|}{r^{s-1}} \ln\left(\frac{\rho(\Omega)}{r}\right) dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} \frac{|u(x)|}{r^{n-k+1}} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} \frac{|u_r'(x)|}{r^{n-k}} \ln\left(\frac{\rho(\Omega)}{r}\right) dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} \frac{|u(x)|}{r} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} |u_r'(x)| \ln\left(\frac{\rho(\Omega)}{r}\right) dr$$

для случаев $k = 1$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $k = n$, соответственно. Интегрируя по внешним переменным с учетом равенств $r = \rho(x, \partial\Omega_j)$ и (3.6), получим

$$\int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|u(x)|}{\rho^n(x, \partial\Omega_j)} dx \leqslant \int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega_j)|}{\rho^{n-1}(x, \partial\Omega_j)} \ln\left(\frac{\rho(\Omega)}{\rho(x, \partial\Omega_j)}\right) dx.$$

Суммируя эти неравенства по $m \in \{1, 2, \ldots, m_j\}$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_j} \frac{|u(x)|}{\rho^n(x, \partial\Omega_j)} dx \leqslant \int\limits_{\Omega_j} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega_j)|}{\rho^{n-1}(x, \partial\Omega_j)} \ln\left(\frac{\rho(\Omega)}{\rho(x, \partial\Omega_j)}\right) dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ с использованием теоремы 2.1 и теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Тогда получим требуемое неравенство (3.4) для случая $p = 1$. Применяя лемму 3.1, приходим к неравенству (3.4) для случая $p > 1$. Теорема 3.3 доказана. □

Доказательство. Доказательство теоремы 3.4. Снова пользуемся геометрическими построениями, проведенными в доказательстве теоремы 3.1.

Фиксируем вещественнозначную функцию $u \in C_0^1(\Omega)$ с компактным носителем $K \subset \Omega$, строим последовательность открытых множеств Ω_j, составленных из кубиков. Далее, пользуемся также формулами для интегралов по множествам $W(G_{jm})$, зависящих от выбора систем координат, для случая

$$F(x) = |u(x)| r^{-n} \ln^{-2} \frac{be}{r}.$$

Применим неравенство леммы 3.4 с выбором параметров

$$a = \varphi_{n-k}(y, \omega), \quad b = \rho(\Omega) \geqslant \rho(\Omega_j) \geqslant a$$

для соответствующих внутренних интегралов. Приходим к неравенствам

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|u(x)|}{r^n \ln^2 \frac{e\rho(\Omega)}{r}} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|u'_r(x)|}{r^{n-1}} dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} \frac{|u(x)|}{r^{n-k+1} \ln^2 \frac{e\rho(\Omega)}{r}} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} \frac{|u'_r(x)|}{r^{n-k}} dr,$$

$$\int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} \frac{|u(x)|}{r \ln^2 \frac{e\rho(\Omega)}{r}} dr \leqslant \int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} |u'_r(x)| dr,$$

соответствующим случаям $k = 1$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $k = n$. Интегрируя по внешним переменным с учетом равенств $r = \rho(x, \partial\Omega_j)$ и (3.6), получим

$$\int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|u(x)|}{\rho^n(x, \partial\Omega_j) \ln^2 \frac{e\rho(\Omega)}{\rho(x, \partial\Omega_j)}} dx \leqslant \int\limits_{W(G_{jm})} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega_j)|}{\rho^{n-1}(x, \partial\Omega_j)} dx.$$

Суммируем эти неравенства по $m \in \{1, 2, \ldots, m_j\}$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_j} \frac{|u(x)|}{\rho^n(x, \partial\Omega_j) \ln^2 \frac{e\rho(\Omega)}{\rho(x, \partial\Omega_j)}} dx \leqslant \int\limits_{\Omega_j} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x, \partial\Omega_j)|}{\rho^{n-1}(x, \partial\Omega_j)} dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ с использованием теоремы 2.1 и теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Тогда получим требуемое неравенство (3.5) для случая $p = 1$. Применяя лемму 3.1, приходим к неравенству (3.5) для случая $p > 1$.

Этим завершается доказательство теоремы 3.4. □

4. Пример и одна открытая проблема

Пусть $c_p(s, \Omega)$ и $c_p^*(s, \Omega)$ — константы в неравенствах (1.2) и (1.3), определенные формулами (1.4) и (1.5) соответственно.

Для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, справедливы равенства

$$c_p(s, \Omega) = c_p^*(s, \Omega) = \frac{(s-1)^p}{p^p}$$

в силу теоремы 2.2, оценки $c_p(s,\Omega) \leqslant (s-1)^p/p^p$ из статьи [14] и оценки $c_p^*(s,\Omega) \leqslant c_p(s,\Omega)$. В частности, имеем

$$c_2(2,\Omega) = c_2^*(2,\Omega) = \frac{1}{4}.$$

Приведем пример, который показывает, что эти равенства справедливы и для некоторых невыпуклых областей. Рассмотрим круговое кольцо

$$A = A(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \quad 0 < r < R < \infty,$$

с конформным модулем $M(A) = (2\pi)^{-1} \ln \frac{R}{r}$. В силу леммы 1 из [15] и формулы (3.6) справедливо равенство

$$c_2(2,A) = c_2^*(2,A) \quad \text{для} \quad A = A(r,R).$$

В [15] вычислены точные значения $c_2(2,A)$ в зависимости от модуля $M(A)$. Оказалось, что

$$\lim_{M(A)\to\infty} c_2(2,A) = 0, \quad c_2(2,A) = \frac{1}{4} \quad \text{для случая} \quad M(A) \in (0, M^*],$$

$$0 < c_2(2,A) < \frac{1}{4} \quad \text{для случая} \quad M(A) \in (M^*, \infty),$$

где критическое значение модуля $M^* \approx 0.57298$.

Отметим, что

$$M^* = (2\pi)^{-1} \ln\left(\frac{2}{q^*} - 1\right).$$

Число $q^* \approx 0.05318$ определяется следующим образом. Рассмотрим гипергеометрическую функцию Гаусса

$$F(\alpha,\beta,1;\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{(k!)^2} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha+j)(\beta+j), \quad |\zeta| < 1,$$

и ее аналитическое продолжение на область $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$. Как доказано в [15], справедлива формула

$$F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1; \zeta\right) = \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos t\, dt}{(\operatorname{ch}^2 t - \zeta)^{\frac{1}{2}}}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty),$$

и уравнение

$$X(q) := \frac{F'\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1; -\frac{1-q}{q}\right)}{q\, F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1; -\frac{1-q}{q}\right)} - \frac{F'\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1; \frac{1-q}{2-q}\right)}{(2-q)\, F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1; \frac{1-q}{2-q}\right)} = \frac{1}{1-q}$$

имеет корень $q = q^* \in (0,1)$, такой, что

$$q^* = \min_{q\in(0,1)} \{q : X(q)(1-q) = 1 \quad \text{и} \quad X(t)(1-t) \leqslant 1 \quad \forall t \in [q,1)\} \approx 0.05318.$$

Нетрудно вычислить, что критическому модулю M^* соответствует легко запоминающееся критическое значение отношения радиусов

$$c^* = (R/r)^* = \exp(2\pi M^*) \approx 36.6.$$

Следовательно, справедливо

Предложение 4.1. *Пусть $A(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Если*

$$1 < \frac{R}{r} \leqslant c^* \approx 36.6,$$

то $c_2(2, A(r,R)) = c_2^*(2, A(r,R)) = 1/4$.

В заключение приведем одну из нерешенных задач.

Проблема. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная односвязная область, удовлетворяющая лишь условию $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Существует ли постоянная $C_2^* > 0$, такая, что имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla \rho(x,\partial\Omega)|^2\, dx \geqslant C_2^* \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^2\, dx}{\rho^2(x,\partial\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^1(\Omega)?$$

Если ответ на этот вопрос будет положительным, то следующим шагом станет получение подобных неравенств в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с равномерно совершенными границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. *Неравенства. (С дополнениями В.И. Левина и С.Б. Стечкина).* Москва: ИЛ. 1948.
2. A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis. *The analysis and geometry of Hardy's inequality.* Springer, Heidelberg. 2015.
3. Ф.Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства.* Изд-во Казанского университета, Казань. 2020.
4. H. Rademacher. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit I* // Math. Ann. **89**:4, 340–359 (1919).
5. T.S. Motzkin. *Sur quelques propriétés charactéristiques des ensembles convexes* // Atti Real. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Serie VI, **21**, 562–567 (1935).
6. C. Mantegazza, A.C. Mennucci. *Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds* // Appl. Math. Optim. **47**, 1–25 (2003).
7. Ф.Г. Авхадиев. *Свойства и применения функции расстояния открытого подмножества в евклидовом пространстве* // Изв. вузов. Матем. № 4, 87–92 (2020).
8. F.G. Avkhadiev. *A Strong Form of Hardy Type Inequalities on Domains of the Euclidean Space* // Lobachevskii J. Math. **41**:11, 2120–2135 (2020).
9. A.A. Balinsky, W.D. Evans. *Some recent results on Hardy-type inequalities* // Appl. Math. Inf. Sci. **4**:2, 191–208 (2010).
10. Ф.Г. Авхадиев. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. МИАН. **255**, 8–18 (2006).
11. F.G. Avkhadiev, A. Laptev. *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains* // International Mathematical Series "Around Research of Vladimir Maz'ya, I". Function Spaces, Springer, **11**, 1–12 (2010).
12. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18**, 723–736 (2011).
13. Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* // Сиб. матем. журн. **55**:2, 239–250 (2014).
14. Ф.Г. Авхадиев, И.К. Шафигуллин. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами* // Изв. вузов. Матем. 2, 69–73 (2014).
15. F.G. Avkhadiev. *Sharp Hardy constants for annuli* // J. Math. Anal. Appl. **466**, 936–951 (2018).
16. F.G. Avkhadiev, R.V. Makarov. *Hardy Type Inequalities on Domains with Convex Complement and Uncertainty Principle of Heisenberg* // Lobachevskii J. Math. **40**:9, 1250–1259 (2019).

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 г. Казань, Россия
E-mail: avkhadiev47@mail.ru