УДК 517.958

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М.А. АРТЕМОВ, Ю.Н. БАБКИНА

Аннотация. Исследуется краевая задача для математической модели, описывающей установившееся изотермическое течение нелинейно-вязкоупругой жидкости с переменной вязкостью, зависящей от скорости сдвига, внутри ограниченной трехмерной (или двумерной) области с достаточно гладкой границей. Предполагается, что функция вязкости непрерывна и ограничена. Рассматриваемая модель представляет собой систему сильно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. На границе области течения ставится однородное краевое условие Дирихле, что соответствует стандартному условию прилипания жидкости на твердых стенках сосуда. Данная краевая задача рассматривается в слабой (обобщенной) постановке. Под слабым решением понимается пара функций «скорость-давление», удовлетворяющая уравнениям движения в смысле распределений. С помощью метода регуляризации посредством введения в уравнения членов с дополнительной вязкостью построено семейство вспомогательных аппроксимирующих задач. Дается интерпретация задач этого семейства в виде операторных уравнений с непрерывным нелинейным оператором, удовлетворяющим условию монотонности α. На основе теоремы о разрешимости уравнений с α-операторами доказано существование по крайней мере одного решения при любом положительном значении дополнительной вязкости. Выведены оценки норм решений, независящие от параметра дополнительной вязкости. Решение исходной краевой задачи получено как предел последовательности решений аппроксимирующих задач при стремлении дополнительной вязкости к нулю. Предельный переход осуществлен на основе известных результатов о компактности вложения пространств Соболева и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того, в работе установлена оценка энергетического типа для векторной функции скорости.

Ключевые слова: первая краевая задача, теорема существования, слабое решение, α-оператор, метод регуляризации, дополнительная вязкость, нелинейно-вязкоупругая жидкость, раствор полимеров.

Mathematics Subject Classification: 35Q35, 35A01

1. Введение

Считается, что для описания изотермических потоков слабоконцентрированных водных растворов полимеров хорошо подходит следующая система уравнений [1]:

M.A. Artemov, Yu.N. Babkina, Dirichlet boundary value problem for equations describing flows of a nonlinear viscoelastic fluid in a bounded domain.

Поступила 19 июля 2020 г.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}-\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\left[\nu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})+\kappa \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})}{\partial t}+\kappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\right]+\nabla_{\mathbf{x}} \pi=\boldsymbol{f}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{v}:=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0, \tag{1.2}$$

где n – размерность пространства, $n=2,3$; $x_1,\ldots,x_n$ — пространственные координаты; t — время; $\boldsymbol{v}$ — скорость течения жидкости; π — давление; $\boldsymbol{f}$ — плотность внешних сил; $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})=(\mathcal{E}_{i,j}(\boldsymbol{v}))$ — тензор скоростей деформации, $\mathcal{E}_{i,j}(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$; ν — коэффициент кинематической вязкости, $\nu>0$; κ — релаксационный коэффициент вязкости, $\kappa>0$.

Первые результаты о разрешимости модели движения несжимаемой вязкой среды с полимерными добавками были получены А.П. Осколковым [2]–[4] при условии прилипания на границе области течения. Случай слабосжимаемой полимерной жидкости исследован Г.А. Свиридюком [5]. Ситуация, когда область течения может быть неограниченной, рассмотрена в [6]. Вопросы о существовании и единственности k-слабого решения начально-краевой задачи для модели (1.1), (1.2) при условии пристенного скольжения Навье изучаются в [7]. Доказаны также теоремы существования решений и для других типов неоднородных граничных задач [8]–[11] при выборе различных упрощенных вариантов уравнений движения (1.1). Краевая задача, описывающая теплоперенос в потоке раствора полимеров, изучается в [12].

В данной статье рассматривается обобщение модели водных растворов полимеров. В отличие от приведенных выше работ вязкость ν предполагается не постоянной, а зависящей от скорости сдвига: $\nu=\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)$, где $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ — некоторый оператор. Если в качестве $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ взять тождественный оператор, то получаем классическую модель нелинейно-вязкоупругой жидкости [13]. В случае, когда $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ — оператор усреднения, приходим к модели нелокального типа [14].

Остановимся на случае, когда течение является стационарным, т.е. величины $\boldsymbol{v}$, π и $\boldsymbol{f}$ не зависят от времени t, и будем предполагать, что жидкость движется внутри ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Тогда приходим к следующей системе уравнений в Ω:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}-\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\left[\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})+\kappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\right]+\nabla_{\mathbf{x}} \pi=\boldsymbol{f}, \qquad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{v}=0. \tag{1.3}$$

На границе Ω ставится однородное условие Дирихле, что соответствует стандартному условию прилипания жидкости на жестких стенках сосуда:

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.4}$$

Главной целью данной работы является нахождение условий, гарантирующих разрешимость краевой задачи (1.3), (1.4). С помощью метода регуляризации посредством введения «исчезающей вязкости» [4], теоремы о разрешимости уравнений α-операторами [15] и предельного перехода, доказано, что данная задача имеет по крайней мере одно слабое решение $(\boldsymbol{v},\pi)$ в декартовом произведении $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathfrak{D}'(\Omega)$ в предположениях, что функция вязкости непрерывна и ограничена, оператор $\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}$ усиленно непрерывен, а граница области Ω имеет гладкость класса $\mathcal{C}^3$.

Отметим, что в работе [16] на основе теории Коссера исследован одномерный вариант модели нестационарного движения нелинейной вязкоупругой жидкости данного типа.

2. Слабые решения краевой задачи (1.3), (1.4) и главный результат работы

Вначале введем обозначения, операторы и функциональные пространства.

Как обычно, $\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$ и $\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$.

Через $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y}$ обозначим скалярное произведение вещественных $n\times n$-матриц $\boldsymbol{X} = (X_{i,j})$ и $\boldsymbol{Y} = (Y_{i,j})$, т.е.

$$\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} := \sum_{i,j=1}^{n} X_{i,j} Y_{i,j}.$$

В зависимости от контекста $|\cdot|$ обозначает либо модуль вещественного числа, либо евклидову норму вектора или матрицы, в частности,

$$|\boldsymbol{X}| := (\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X})^{1/2}.$$

Определим дифференциальные операторы:

$$\nabla_{\mathbf{x}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \qquad \nabla^2_{\mathbf{x}} := \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \Delta_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$$\nabla^3_{\mathbf{x}} := \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla^2_{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2_{\mathbf{x}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\nabla^2_{\mathbf{x}}\right), \qquad \ldots, \qquad \nabla^m_{\mathbf{x}} := \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla^{m-1}_{\mathbf{x}}).$$

Пусть

$$\mathfrak{D}(\Omega) := \{\boldsymbol{\phi}\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\Omega),\ \operatorname{supp}\boldsymbol{\phi} \subset \Omega\}.$$

Через $\mathfrak{D}'(\Omega)$ обозначим пространство распределений на Ω.

Будем использовать обычные обозначения для пространств Лебега $L_p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, и пространств Соболева $H^m(\Omega)$, $H^m_0(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, состоящих из функций, заданных на области Ω. Нормы в этих пространствах определяются стандартным образом (см. [17]). Для обозначения пространств векторных функций, будем всегда применять жирный шрифт: $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{H}^m(\Omega)$ и т.д.

Сопряженное с $H^m_0(\Omega)$ пространство обозначим через $H^{-1}(\Omega)$.

Пусть

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) := \{\boldsymbol{\phi}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\Omega),\ \operatorname{supp}\boldsymbol{\phi} \subset \Omega,\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi} = 0\}.$$

Замыкание множества векторных функций $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ в соболевских пространствах $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H}^2(\Omega)$ и $\mathbf{H}^3(\Omega)$ дает три основных пространства при изучении краевой задачи (1.3), (1.4); мы обозначим их через $\mathbf{V}_1(\Omega)$, $\mathbf{V}_2(\Omega)$ и $\mathbf{V}_3(\Omega)$, соответственно.

В пространстве $\mathbf{V}_1(\Omega)$ введем скалярное произведение и норму:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbf{V}_1(\Omega)} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{dx}, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\, \boldsymbol{dx}\right)^{1/2}.$$

Из неравенства Корна [13, гл. I, §2.2]

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant C\|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad C = \mathrm{const}, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega),$$

имеющего фундаментальное значение во многих задачах теории пластичности и упругости, вытекает, что введенная выше норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_1(\Omega)}$ будет эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$.

В пространстве $\mathbf{V}_3(\Omega)$ введем скалярное произведение и норму с помощью следующих равенств:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbf{V}_3(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v} : \nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{w}\, \boldsymbol{dx} + \int_{\Omega} \nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v} \cdot \nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{w}\, \boldsymbol{dx},$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}|^2\, \boldsymbol{dx} + \int_{\Omega} |\nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}|^2\, \boldsymbol{dx}\right)^{1/2}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $\partial\Omega \in \mathcal{C}^3$. Тогда нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)}$ эквивалентны, т.е. существуют положительные константы K_1 и K_2 такие, что*

$$K_1\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)} \leqslant K_2\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_3(\Omega). \tag{2.1}$$

Доказательство. Выполнение правого неравенства из (2.1) очевидным образом следует из определения нормы в соболевском пространстве $\mathbf{H}^3(\Omega)$.

Далее, заметим, что в силу классических результатов о свойствах решений стационарных уравнений Стокса с граничным условием Дирихле (см., например, [18, гл. I, §2]), имеет место следующая оценка

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)} \leqslant \widetilde{K}_1 \|\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\Delta_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_3(\Omega), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ — проектор Лере, $\widetilde{K}_1$ — положительная константа.

Поскольку

$$\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\Delta_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi}) = \Delta_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi}$$

для любой векторной функции $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$, то из неравенства (2.2) вытекает, что

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)} \leqslant \widetilde{K}_1 \|\Delta_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega).$$

Последнее неравенство можно продолжить по непрерывности на замыкание $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ в $\mathbf{H}^3(\Omega)$, что приводит нас к соотношению

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)} \leqslant \widetilde{K}_1 \|\Delta_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_3(\Omega).$$

Отсюда следует левое неравенство из (2.1) с $K_1 = 1/\widetilde{K}_1$. Лемма доказана. □

Опишем теперь исходные требования, которые налагаются на данные модели (1.3). Предположим, что:

(i) поверхность $\partial\Omega$ имеет гладкость класса $\mathcal{C}^3$;

(ii) выполнено включение $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$;

(iii) функция вязкости $\nu\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна, и существуют «предельные ньютоновские вязкости» ν_0 и ν_1, т.е. $0 < \nu_0 \leqslant \nu(\tau) \leqslant \nu_1$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$;

(iv) оператор $\boldsymbol{\mathcal{PE}}\colon \mathbf{V}_1(\Omega) \to \mathbf{L}_2(\Omega)$ является усиленно непрерывным, т.е. из слабой сходимости $\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \boldsymbol{u}_0$ в пространстве $\mathbf{V}_1(\Omega)$ следует сильная сходимость $\boldsymbol{\mathcal{PE}}(\boldsymbol{u}_k) \to \boldsymbol{\mathcal{PE}}(\boldsymbol{u}_0)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ при $k \to \infty$.

Замечание 2.1. *В качестве примера оператора $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, удовлетворяющего свойству (iv), можно взять оператор усреднения* [19, гл. I, §1], *применение которого в моделях гидродинамики восходит к работам О.А. Ладыженской.*

Определение 2.1. *Под слабым решением краевой задачи* (1.3), (1.4) *понимается пара* $(\boldsymbol{v}, \pi) \in \mathbf{V}_1(\Omega) \times \mathfrak{D}'(\Omega)$, *удовлетворяющая первому уравнению* (1.3) *в смысле распределений, т.е.*

$$-\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} + \int\limits_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{PE}}(\boldsymbol{v})|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\varphi})\, \boldsymbol{dx} - \kappa \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx}$$
$$- \langle \pi, \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega)\times\mathfrak{D}(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}$$

для любой векторной функции $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathfrak{D}}(\Omega)$.

Главный результат данной работы формулируется в виде следующей теоремы существования.

Теорема 2.1. *При выполнении допущений* (i)–(iv) *задача* (1.3), (1.4) *имеет хотя бы одно слабое решение* $(\boldsymbol{v}, \pi) \in \mathbf{V}_1(\Omega) \times \mathfrak{D}'(\Omega)$, *причем*

$$\int\limits_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{PE}}(\boldsymbol{v})|)|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\, \boldsymbol{dx} \leqslant \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Доказательство этого утверждения приведено в пункте 5.

3. Разрешимость уравнений с α-операторами

Следуя [15, гл. 2], приведем некоторые сведения об α-операторах. Материал этого пункта играет важную роль при доказательстве теоремы 2.1.

Пусть $\mathbf{E}$ — вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$, а $\mathbf{E}^*$ — сопряженное с $\mathbf{E}$ пространство.

Определение 3.1. *Говорят, что оператор $\mathbf{A}\colon \mathbf{E}\to\mathbf{E}^*$ удовлетворяет условию α, если для произвольной последовательности $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbf{E}$ из слабой сходимости $\mathbf{u}_k\rightharpoonup\mathbf{u}_0$ и неравенства*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\langle\mathbf{A}(\mathbf{u}_k),\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_0\rangle_{\mathbf{E}^*\times\mathbf{E}}\leqslant 0$$

следует сильная сходимость $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}_0$ по норме $\mathbf{E}$.

Оператор, удовлетворяющий условию α, для краткости иногда будем называть *α-оператором.*

Лемма 3.1. *Если $\mathbf{A}\colon\mathbf{E}\to\mathbf{E}^*$ — α-оператор, $\mathbf{K}\colon\mathbf{E}\to\mathbf{E}^*$ — усиленно непрерывный оператор, то сумма $\mathbf{A}+\mathbf{K}$ удовлетворяет условию α.*

Лемма 3.2. *Если $\mathbf{Q}\colon\mathbf{E}\to\mathbf{E}^*$ — сильно монотонный оператор, т.е.*

$$\langle\mathbf{Q}(\mathbf{u})-\mathbf{Q}(\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{E}^*\times\mathbf{E}}\geqslant C\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{E}},\quad C=\mathrm{const}\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{E},$$

то $\mathbf{Q}$ является α-оператором.

Теорема 3.1 (теорема об остром угле). *Пусть $\mathbf{D}$ — открытое ограниченное подмножество $\mathbf{E}$ и $\mathbf{0}\in\mathbf{D}$. Если отображение $\mathbf{A}\colon\overline{\mathbf{D}}\subset\mathbf{E}\to\mathbf{E}^*$ деминепрерывно, ограничено и удовлетворяет условию α и, кроме того, выполняется неравенство*

$$\langle\mathbf{A}(\mathbf{u})-\mathbf{h},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{E}^*\times\mathbf{E}}>0,\quad\forall\mathbf{u}\in\partial\mathbf{D},$$

то уравнение $\mathbf{A}(\mathbf{u})=\mathbf{h}$ имеет хотя бы одно решение $\mathbf{u}_{\mathbf{h}}\in\mathbf{D}$.

4. Разрешимость семейства регуляризованных задач

Следуя подходу, принятому в [4] (см. также [6]), рассмотрим однопараметрическое семейство регуляризованных задач: при заданном $m\in\mathbb{N}$ требуется найти векторную функцию $\boldsymbol{v}_m\in\mathbf{V}_3(\Omega)$ такую, что

$$\begin{gathered}\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega}\nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}_m:\nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{dx}+\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega}\nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}_m\cdot\nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{dx}-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_{mi}\boldsymbol{v}_m\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_i}\,\boldsymbol{dx}\\ +\int\limits_{\Omega}\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m):\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{dx}\\ -\kappa\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_{mi}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m):\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})}{\partial x_i}\,\boldsymbol{dx}=\langle\boldsymbol{f},\,\boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\end{gathered}\tag{4.1}$$

для любого $\boldsymbol{w}\in\mathbf{V}_3(\Omega)$.

Лемма 4.1. *При выполнении допущений* (i)–(iv) *задача* (4.1) *имеет по крайней мере одно решение $\boldsymbol{v}_m\in\mathbf{V}_3(\Omega)$ и выполнено неравенство*

$$\frac{1}{m}\|\boldsymbol{v}_m\|^2_{\mathbf{V}_3(\Omega)}+\nu_0\|\boldsymbol{v}_m\|^2_{\mathbf{V}_1(\Omega)}\leqslant\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_m\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}.\tag{4.2}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{A}_m\colon \mathbf{V}_3(\Omega) \to \mathbf{V}_3^*(\Omega),$$

$$\langle \mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)} := \frac{1}{m}\int\limits_\Omega \nabla_{\mathbf{x}}^3 \boldsymbol{v} : \nabla_{\mathbf{x}}^3 \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{dx} + \frac{1}{m}\int\limits_\Omega \nabla_{\mathbf{x}}^2 \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{dx},$$

$$\mathbf{B}_1\colon \mathbf{V}_2(\Omega) \to \mathbf{V}_3^*(\Omega), \quad \langle \mathbf{B}_1(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)} := -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx},$$

$$\mathbf{B}_2\colon \mathbf{V}_2(\Omega) \to \mathbf{V}_3^*(\Omega), \quad \langle \mathbf{B}_2(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)} := \int\limits_\Omega \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{dx},$$

$$\mathbf{B}_3\colon \mathbf{V}_2(\Omega) \to \mathbf{V}_3^*(\Omega), \quad \langle \mathbf{B}_3(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)} := -\kappa\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx},$$

$$\mathbf{B}\colon \mathbf{V}_2(\Omega) \to \mathbf{V}_3^*(\Omega), \quad \mathbf{B} := \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3,$$

$$\mathbf{J}\colon \mathbf{V}_3(\Omega) \to \mathbf{V}_2(\Omega), \quad \mathbf{J}(\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{v},$$

и запишем задачу (4.1) в эквивалентной форме

$$\mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}_m) + \mathbf{B}\circ\mathbf{J}(\boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{f}. \tag{4.3}$$

Ясно, что оператор $\mathbf{A}_m$ непрерывен и имеет место равенство

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}) - \mathbf{A}_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle =& \frac{1}{m}\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathbf{x}}^3(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})|^2\, \boldsymbol{dx} + \frac{1}{m}\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathbf{x}}^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})|^2\, \boldsymbol{dx}\\ =& \frac{1}{m}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Тогда, согласно лемме 3.2, этот оператор удовлетворяет условию α.

Так как вложение $H^3(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ компактно, то компактно и вложение $\mathbf{V}_3(\Omega) \subset \mathbf{V}_2(\Omega)$. Поэтому оператор $\mathbf{J}$ усиленно непрерывен.

Покажем, что оператор $\mathbf{B}$ непрерывен. Сначала рассмотрим первое слагаемое $\mathbf{B}_1$. Возьмем последовательность векторных функций $\{\boldsymbol{u}_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ такую, что $\boldsymbol{u}_\ell \to \boldsymbol{u}_0$ сильно в $\mathbf{V}_2(\Omega)$ при $\ell \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что $\boldsymbol{u}_\ell \to \boldsymbol{u}_0$ по норме пространства $\mathbf{L}_4(\Omega)$ (см. [17, гл. 6]). Нам нужно установить, что $\mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_\ell) \to \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_0)$ сильно в $\mathbf{V}_3^*(\Omega)$ при $\ell \to \infty$. Пусть $\boldsymbol{w}$ — произвольная векторная функция из пространства $\mathbf{V}_3(\Omega)$. Поскольку

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_\ell) - \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)} &= -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{\ell i}\boldsymbol{u}_\ell \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0i}\boldsymbol{u}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx}\\ &= \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega (u_{0i} - u_{\ell i})\boldsymbol{u}_\ell \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx}\\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0i}(\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_\ell) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx},\end{aligned}$$

то, применяя неравенство Гёльдера, можно вывести следующую оценку:

$$|\langle \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_\ell) - \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{w}\rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)\times\mathbf{V}_3(\Omega)}| \leqslant C\|\boldsymbol{u}_\ell - \boldsymbol{u}_0\|_{\mathbf{L}_4}(\Omega) \max\{\|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbf{L}_4}(\Omega) :\ k = 0,1,2,\dots\}\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)},$$

с некоторой независящей от индекса ℓ константой C. Следовательно,

$$\|\mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_\ell) - \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_0)\|_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_\ell - \boldsymbol{u}_0\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \max\{\|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} :\ k = 0,1,2,\dots\} \to 0$$

при $\ell \to \infty$, т.е. имеем сильную сходимость $\mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_\ell) \to \mathbf{B}_1(\boldsymbol{u}_0)$ в $\mathbf{V}_3^*(\Omega)$.

Используя аналогичные рассуждения, можно установить также непрерывность операторов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_3$.

Таким образом, сумма операторов $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$ непрерывна, а композиция $\mathbf{B} \circ \mathbf{J}$ является усиленно непрерывной. Применив лемму 3.1, заключаем, что отображение $\mathbf{A}_m + \mathbf{B} \circ \mathbf{J}$ удовлетворяет условию α.

Заметим, что

$$\langle \mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega) \times \mathbf{V}_3(\Omega)} = \frac{1}{m} \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{V}_3(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Кроме того, используя интегрирование по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial |\boldsymbol{v}|^2}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} \\ =& \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}) |\boldsymbol{v}|^2\, \boldsymbol{dx} - \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{v}) |\boldsymbol{v}|^2\, \boldsymbol{dx} = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} \\ =& \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\, \boldsymbol{dx} - \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{v}) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\, \boldsymbol{dx} = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где символ $\mathbf{n}$ обозначает внешнюю нормаль к поверхности $\partial\Omega$. Поэтому с учетом допущения (iii) выводим оценку:

$$\langle \mathbf{B} \circ \mathbf{J}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega) \times \mathbf{V}_3(\Omega)} \geqslant \nu_0 \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{V}_1(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Из соотношений (4.4) и (4.7) следует, что

$$\langle \mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}) + \mathbf{B} \circ \mathbf{J}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega) \times \mathbf{V}_3(\Omega)} \geqslant \frac{1}{m} \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{V}_3(\Omega)}.$$

Поэтому нетрудно вывести оценку

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_m(\boldsymbol{v}) + \mathbf{B} \circ \mathbf{J}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega) \times \mathbf{V}_3(\Omega)} &\geqslant \frac{1}{m} \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{V}_3(\Omega)} - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}_3^*(\Omega) \times \mathbf{V}_3(\Omega)} \\ &\geqslant \Big(\frac{1}{m} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)} - \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)} \Big) \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)} > 0 \end{aligned}$$

при условии, что

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_3(\Omega)} > m \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)}.$$

Применив теорему 3.1 к (4.3), убеждаемся в том, что задача (4.1) имеет решение $\boldsymbol{v}_m$ в шаре $\mathfrak{B}_R \subset \mathbf{V}_3(\Omega)$ с центром в $\mathbf{0}$ и радиусом R при любом $R > m\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}_3^*(\Omega)}$. Оценка (4.2) получается путем подстановки $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_m$ в (4.1) с учетом равенств (4.5) и (4.6), в которых следует взять $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_m$. Лемма доказана. □

5. Доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность решений семейства задач (4.1). Из оценки (4.2) следует, что

$$\nu_0 \|\boldsymbol{v}_m\|^2_{\mathbf{V}_1(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leqslant C \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbf{V}_1(\Omega)}, \quad C = \mathrm{const},$$

и, стало быть,

$$\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbf{V}_1(\Omega)} \leqslant C \nu_0^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\boldsymbol{v}_m \rightharpoonup \boldsymbol{v} \quad \text{слабо в } \mathbf{V}_1(\Omega) \text{ при } m \to \infty, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v} \quad \text{по норме } \mathbf{L}_2(\Omega) \text{ при } m \to \infty \tag{5.2}$$

для некоторой векторной функции $\boldsymbol{v}$ из пространства $\mathbf{V}_1(\Omega)$. Здесь мы использовали компактность вложения $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [17, гл. 6]).

Кроме того, принимая во внимание условие (iv), получаем

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) \quad \text{по норме } \mathbf{L}_2(\Omega) \text{ при } m \to \infty, \tag{5.3}$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_{m_k}) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } k \to \infty$$

для некоторой подпоследовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } m \to \infty.$$

Более того, поскольку функция ν непрерывна (см. условие (iii)), имеем

$$\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) \to \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|) \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } m \to \infty$$

и, следовательно,

$$\bigl|\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) - \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\bigr|^2 \to 0 \quad \text{п. в. на } \Omega \text{ при } m \to \infty. \tag{5.4}$$

Заметим, что согласно условию (iii), функция ν ограничена. Поэтому мы можем применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости к последовательности функций $\bigl\{\bigl|\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) - \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\bigr|^2\bigr\}_{m=1}^{\infty}$. Получаем, что из поточечной сходимости (5.4) следует, что

$$\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) \to \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|) \quad \text{по норме } L_2(\Omega) \text{ при } m \to \infty. \tag{5.5}$$

Возьмем теперь произвольную векторную функцию $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$. Поскольку $\boldsymbol{v}_m$ — решение (4.1), имеем, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega} \nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}_m : \nabla^3_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}\, \boldsymbol{dx} + \frac{1}{m}\int\limits_{\Omega} \nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{v}_m \cdot \nabla^2_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}\, \boldsymbol{dx} - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{mi}\boldsymbol{v}_m \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx}& \\
+ \int\limits_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{dx}& \\
- \kappa\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{mi}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) : \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} &= \langle \boldsymbol{f},\, \boldsymbol{\psi}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Применим соответствующее количество раз формулу интегрирования по частям к первому и второму слагаемым из левой части последнего равенства:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}_m \cdot \nabla^6_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}\, \boldsymbol{dx} + \frac{1}{m}\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}_m \cdot \nabla^4_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}\, \boldsymbol{dx} - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{mi}\boldsymbol{v}_m \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx}& \\
+ \int\limits_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{dx}& \\
- \kappa\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{mi}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) : \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} &= \langle \boldsymbol{f},\, \boldsymbol{\psi}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Воспользовавшись (5.1), (5.2) и (5.5), осуществим предельный переход в равенстве (5.6) при $m \to \infty$:

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \, \boldsymbol{dx} + \int_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi}) \, \boldsymbol{dx} - \kappa \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} v_i \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \, \boldsymbol{dx} = \langle \boldsymbol{f}, \, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_0(\Omega)}. \tag{5.7}$$

В силу теоремы де Рама (см. [18, гл. I, п. 1.4]), из равенства (5.7) следует, что найдется $\pi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ такое, что выполнено первое уравнение системы (1.3) в смысле распределений. Тем самым установлено, что пара $(\boldsymbol{v}, \pi)$ является одним из слабых решений краевой задачи (1.3), (1.4).

Далее, подставим $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_m$ в (4.1). Поскольку третье и пятое слагаемые в левой части полученного равенства равны нулю, то нетрудно видеть, что

$$\int_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|^2 \, \boldsymbol{dx} \leqslant \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_m \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_0(\Omega)}.$$

Переходя к нижнему пределу при $m \to \infty$, находим, что

$$\varliminf_{m \to \infty} \int_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|^2 \, \boldsymbol{dx} \leqslant \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}^1_0(\Omega)}. \tag{5.8}$$

Рассмотрим теперь последовательность матричнозначных функций

$$\left\{ \sqrt{\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|)} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) \right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Из (5.1) и (5.3) следует, что

$$\sqrt{\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|)} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m) \rightharpoonup \sqrt{\nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) \quad \text{слабо в } \mathbf{L}_2(\Omega) \text{ при } m \to \infty.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2 \, \boldsymbol{dx} \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \int_{\Omega} \nu(|\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|) |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}_m)|^2 \, \boldsymbol{dx},$$

которое вместе с (5.8) очевидным образом приводит нас к оценке (2.3). Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.А. Павловский. *К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров* // Докл. АН СССР **200**:4. 809–812 (1971).
2. А.П. Осколков. *О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. **27**. 145–160 (1972).
3. А.П. Осколков. *О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров* // Зап. науч. сем, ЛОМИ. **38**. 98–136 (1973).
4. А.П. Осколков. *О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей* // Тр. МИАН СССР **159**. 103–131 (1983).
5. Г.А. Свиридюк. *Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Матем. **1**. 62–70 (1994).
6. А.В. Звягин. *Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров* // Вестн. ВГУ, серия: физ.-матем. **1**. 147–156 (2011).

7. E.S. Baranovskii. *Global solutions for a model of polymeric flows with wall slip* // Math. Meth. Appl. Sci. **40**:14. 5035–5043 (2017).
8. O.A. Ladyzhenskaya. *On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers* // J. Math. Sci. **99**:1. 888–897 (2000).
9. E.S. Baranovskii. *Flows of a polymer fluid in domain with impermeable boundaries* // Comput. Math. Math. Phys. **54**:10. 1589–1596 (2014).
10. М.А. Артемов, Е.С. Барановский. *Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок* // Тр. ИММ УрО РАН **21**:1. 14–24 (2015).
11. E.S. Baranovskii. *Mixed initial-boundary value problem for equations of motion of Kelvin-Voigt fluids* // Comput. Math. Math. Phys. **56**:7. 1363–1371 (2016).
12. M.A. Artemov, E.S. Baranovskii. *Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions* // Mathematics **7**:7. Article ID 611 (2019).
13. В.Г. Литвинов. *Движение нелинейно-вязкой жидкости.* М.: Наука. 1982.
14. A.C. Eringen. *Nonlocal Continuum Field Theories.* Springer Verlag: New York. 2002.
15. И.В. Скрыпник. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* М.: Наука. 1991.
16. F. Carapau. *One-dimensional viscoelastic fluid model where viscosity and normal stress coefficients depend on the shear rate* // Nonlinear Anal. Real World Appl. **11**:5. 4342–4354 (2010).
17. R.A. Adams, J.J.F. Fournier. *Sobolev spaces.* Amsterdam: Elsevier. 2003.
18. Р. Темам. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.* М.: Мир. 1981.
19. О.А. Ладыженская. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука. 1970.

Михаил Анатольевич Артемов,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: `artemov_m_a@mail.ru`

Юлия Николаевна Бабкина,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: `poiais.vsu@gmail.com`