ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 45-57.

УДК 517.95, 517.956.6

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО И НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЖЕННОЙ ЧАСТЬЮ

Б.И. ИСЛОМОВ, О.Х. АБДУЛЛАЕВ

Аннотация. Данная работа посвящена доказательству однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральным условием склеивания для одного класса уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором, включающим дробную производную Капуто и нелинейное слагаемое, содержащее след решения $u(x,0)$. Так как рассматриваемое уравнение является уравнением третьего порядка, в котором дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами a, b и c действует на параболо-гиперболический оператор второго порядка, на корректную постановку краевых задач существенное влияние оказывают коэффициенты a, b и c. Поэтому, перед тем как приступить к полной формулировке исследуемых задач, приведем краевые условия в их постановке для различных случаев поведения коэффициентов a, b и c.

В первой части данной работы сформулирована нелокальная задача (т.е. задача I.) с интегральным условием склеивания, в случае $0 < b/a \leqslant 1$. Исследование этой задачи эквивалентным образом сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра и доказывается однозначная разрешимость методом последовательных приближений. Вторая часть работы посвящена корректной постановке и изучению других нелокальных задач, корректные постановки которых тесно связаны с другими возможными случаями a и b. Излагается подробное исследование нелокальной задачи II. Далее, в виде замечаний описываются ход исследования других поставленных задач.

Ключевые слова: параболо-гиперболический оператор, дробная производная Капуто, нелинейное нагруженное слагаемое, интегральное условие склеивания, нелинейное интегральное уравнение.

Mathematics Subject Classification: 35M10, 34K37, 35R11

1. Введение

Пусть Ω – односвязная область, ограниченная при $y > 0$ сегментами BB_0, B_0A_0, A_0A (соответственно на прямых $x = 1$, $y = h$, $x = 0$) и при $y < 0$ характеристиками

$$AC: \quad x + y = 0,$$
$$BC: \quad x - y = 1$$

уравнения

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \tag{1.1}$$

B.I. Islomov, O.Kh. Abdullaev, On non-local problems for third order equation with Caputo operator and non-linear loaded part.

Поступила 1 июля 2020 г.

где $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; a, b и c – действительные постоянные, причем $a^2+b^2\neq 0$,

$$Lu\equiv\begin{cases}L_1u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-{}_cD^{\alpha}_{0y}u+f_1(x,y;u(x,0)), & (x,y)\in\Omega_1,\\ L_2u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+f_2(x,y;u(x,0)), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$$

${}_cD^{\alpha}_{ay}$– дифференциальный оператор Капуто порядка $(0<\alpha<1)$ [1], [2]:

$$ {}_cD^{\alpha}_{0y}f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt \tag{1.2}$$

и

$$\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\},\qquad \Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}.$$

Хорошо известно, что локальные задачи для уравнения (1.1) с непрерывными и разрывными условиями склеивания при $f_i(x,y;u(x,0))=0$ и $\alpha=1$, были исследованы в работе [3]. А для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором целого порядка, включающего линейные нагруженные части, исследованы только локальные задачи с непрерывным условием склеивания (см. [4], [5]). Хотелось бы отметить, что методы, использованные в работах Т.Д. Джураева [3] и У.И. Балтаевой [4], [5], не достаточны для уравнения (1.1) при $f_i(x,y;u(x,0))\neq 0$ и $0<\alpha<1$. Это больше связано с оператором дробного дифференцирования (в нашем случае с оператором Капуто), а получаемые интегральные уравнения и методы их исследования, связаны с нелинейной частью рассматриваемого уравнения.

Локальные и нелокальные задачи с непрерывными и интегральными условиями склеивания для нагруженных параболо-гиперболических уравнений второго порядка, содержащие различные операторы как Капуто, Римана – Лиувилля и др., были исследованы в работах [6]–[8].

Отметим, что вышеизложенные уравнения описывают некоторые проблемы оптимального управления, регулирования этикет грунтовых вод и влажность почвы, подземных жидкостей и газодинамики, математической биологии, экономики, экологии и чистой математики [9]–[12]. Более того, краевые задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями встречаются в различных областях механики, физики, биологии, биотехнологии и др. (см. [13]–[15]).

Сначала, приведем некоторые условия, необходимые для постановки задач, связанных с возможными случаями коэффициентов a, b :

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\qquad u(1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{1.3}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{1.4}$$

$$u_{xx}(1,y)=\varphi_4(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta(x)\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\qquad 0\leqslant x<1, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left|_{AC}\right.=\psi_1(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left|_{BC}\right.=\psi_2(x),\qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \tag{1.8}$$

где n – внутренняя нормаль, $\theta(x)=\theta\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$, $\varphi_j(y)$, $a_j(x)$ $(j=\overline{1,4})$, $\psi_i(x)$ $(i=\overline{1,2})$ – заданные функции.

2. Постановка задачи

Определение 2.1. *Функция $u(x,y)$ называется регулярным решением уравнения (1.1), если она имеет непрерывные производные, входящие в оператор Lu, более того $Lu \in C^1(\Omega \setminus AB)$.*

Задача I. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1.1) в области $\Omega \setminus AB$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2} \setminus \overline{BC})$, $\quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7);

3) имеет место интегральное условие склеивания:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to+0} {}_cD^{\alpha}_{0y}u(x,y) =&\lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) + \lambda_3(x)u(x,-0) \\ &+ \lambda_4(x)\int\limits_0^x r(t)u(t,0)dt + \lambda_5(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,5})$ – заданные функции, причем

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2(x) \neq 0.$$

3. Исследование задачи I.

Обозначим,

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда, уравнение (1.1) мы можем переписать в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_{1xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u_1 + f_1(x,y;u_1(x,0)) =\upsilon_1(x,y), \\ a\upsilon_{1x} + b\upsilon_{1y} + c\upsilon_1 =0, \end{cases} \qquad (x,y) \in \Omega_1 \tag{3.1}$$

и

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} + f_2(x,y;u_2(x,0)) =\upsilon_2(x,y), \\ a\upsilon_{2x} + b\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 =0, \end{cases} \qquad (x,y) \in \Omega_2, \tag{3.2}$$

где $\upsilon_i(x,y) \in C^1\left(\Omega_i\right)$, $\quad i=1,2$ – достаточно гладкие функции.

Пусть $0 < b/a \leqslant 1$, тогда, предполагая $a>0$, $b>0$, получим

$$0 < \ b \leqslant \frac{b+a}{2}, \qquad 0 \leqslant bx - ay \leqslant \frac{b+a}{2}, \qquad (x,y) \in \Omega_2.$$

Отметим, что общее решение уравнения

$$a\upsilon_{ix} + b\upsilon_{iy} + c\upsilon_i = 0, \qquad (i=1,\, 2)$$

имеет вид:

$$\upsilon_i(x,y) = w_i(bx-ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx+ay)\right], \tag{3.3}$$

где $w_i(bx-ay)$, $(i=1,\,2)$ – произвольные непрерывно-дифференцируемые функции.

На основе (3.3) вместе с (3.1) и (3.2) будем рассматривать следующие уравнения:

$$u_{1xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u_1 + f_1(x,y;u_1(x,0)) = w_1(bx-ay)\exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx+ay)\right), \tag{3.4}$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} + f_2(x, y; u_2(x, 0)) = w_2(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right). \tag{3.5}$$

Легко заметить, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными данными $u(x, -0) = \tau(x), \quad u_y(x, -0) = \nu^-(x)$ в области Ω_2, имеет вид:

$$\begin{aligned} u_2(x, y) =& \frac{\tau(x + y) + \tau(x - y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu^-(t)dt \\ &- \frac{1}{4}\int\limits_{x+y}^{x-y} d\xi \int\limits_{\xi}^{x-y} f_2\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}; \tau\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)\right) d\eta \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_{x+y}^{x-y} d\xi \int\limits_{\xi}^{x-y} w_2\left(\frac{b - a}{2}\xi + \frac{b + a}{2}\eta\right) \exp\left(\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b + a}{2}\xi + \frac{b - a}{2}\eta\right)\right) d\eta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Учитывая $(u_x + u_y)|_{AC} = \sqrt{2}\psi_1(x)$, воспользовавшись условиями (1.6) и (1.7), из (3.6) соответственно, находим:

$$\begin{aligned} (2a_1(x) + 1)\nu^-(x) =& (1 - 2a_2(x))\tau'(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x f_2\left(\frac{\xi + x}{2}, \frac{\xi - x}{2}; \tau\left(\frac{\xi + x}{2}\right)\right) d\xi - 2a_3(x)\tau(x) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x w_2\left(\frac{b - a}{2}\xi + \frac{b + a}{2}x\right) e^{\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}x\right)} d\xi - 2a_4(x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

и

$$w_2(x) = \left(f_2\left(\frac{x}{a + b}, -\frac{x}{a + b}; \tau\left(\frac{x}{a + b}\right)\right) - \sqrt{2}\psi_1'\left(\frac{x}{a + b}\right)\right) e^{\frac{c(b-a)x}{2ab(a+b)}}. \tag{3.8}$$

С другой стороны, в силу (1.4) и учитывая

$${}_cD_{0y}^{\alpha} u_1(0, y) = {}_cD_{0y}^{\alpha}\varphi_1(y), \qquad \tau(0) = \varphi_1(0)$$

при $x \to +0$, из (3.4) следует, что

$$w_1(-ay) = \left[\varphi_3(y) - {}_cD_{oy}^{\alpha}\varphi_1(y) + f_1(0, y; \varphi_1(0))\right] \exp\left(\frac{cy}{2b}\right),$$

т.е.

$$w_1(y) = \left(\varphi_3\left(\frac{-y}{a}\right) - {}_cD_{oy}^{\alpha}\varphi_1\left(\frac{-y}{a}\right) + f_1(0, -\frac{y}{a}; \varphi_1(0))\right) \exp\left(-\frac{cy}{2ab}\right). \tag{3.9}$$

3.1. Основной результат.

Теорема 3.1. *Если выполнены условия:*

$$\varphi_1(y) \in C^2(0, h) \cap C^1[0, h], \quad \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C^1(0, h) \cap C[0, h]; \tag{3.10}$$

$$a_j(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad \lambda_j(x), \lambda_5(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1), \quad j = 1, 4; \tag{3.11}$$

$$\psi_1(x) \in C^2\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap C^1\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f_i(x, y; u(x, 0)) \in C(\overline{\Omega}_i) \cap C^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2; \tag{3.12}$$

$$|f_i(x, y; \tau_1(x)) - f_i(x, y; \tau_2(x))| \leqslant L_i|\tau_1(x) - \tau_2(x)|, \quad i = 1, 2, \tag{3.13}$$

где $L_i = const > 0, \quad i = 1, 2$, то решение задачи I существует и единственно.

Доказательство. В силу обозначений,

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\quad u_y(x,0)=\nu^-(x),\quad \lim_{y\to+0}{}_cD^{\alpha}_{0y}u=\nu^+(x) \tag{3.14}$$

при $y\to+0$ из (3.4) с учетом условия склеивания (2.1), имеем

$$\begin{aligned}\tau''(x)-\lambda_1(x)\nu^-(x)-\lambda_2(x)\tau'(x)-\lambda_3(x)\tau(x)-\lambda_4(x)\int\limits_0^x r(t)\tau(t)dt\\ +f_1(x,0;\tau(x))=w_1(bx)e^{-\frac{cx}{2a}}+\lambda_5(x).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Учитывая (3.7), из (3.15) после несложных упрощений, при $2a_1(x)+1\neq0$ получим:

$$\begin{aligned}\tau''(x)+A_1(x)\tau'(x)+B_1(x)\tau(x)+C_1(x)\int\limits_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right)d\xi\\ +f_1(x,0;\tau(x))+\lambda_4(x)\int\limits_0^x r(t)\tau(t)dt=f(x),\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\begin{aligned}&A_1(x)=-2C_1(x)(2a_2(x)-1)+\lambda_2(x),\\ &B_1(x)=-4C_1(x)a_3(x)+\lambda_3(x),\\ &C_1(x)=\frac{-\lambda_1(x)}{2(1+2a_1(x))},\\ &f(x)=-\frac{\lambda_1(x)}{2(1+2a_1(x))}\int\limits_0^x w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}x\right)e^{\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}x\right)}d\xi\\ &\qquad-\frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1+2a_1(x)}+w_1(bx)e^{\frac{-cx}{2a}}+\lambda_5(x).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Предполагая $a\neq b$ и вводя замену $\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}x=t$, функцию $f(x)$ можем переписать в виде:

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\lambda_1(x)}{(a-b)(1+2a_1(x))}\int\limits_{\frac{b+a}{2}x}^{bx} w_2(t)e^{\frac{c(a+b)}{2ab(a-b)}t+\frac{c}{b-a}x}dt\\ &-\frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1+2a_1(x)}+w_1(bx)e^{\frac{-cx}{2a}}+\lambda_5(x).\end{aligned}$$

Далее, учитывая (3.8) после некоторых упрощений окончательно имеем

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(a+b)\lambda_1(x)}{(a-b)(1+2a_1(x))}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{bx}{a+b}} e^{\frac{c(2t-x)}{(a-b)}}\left(f_2(t,-t;\tau(t))-\sqrt{2}\psi_1'(t)\right)dt\\ &-\frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1+2a_1(x)}+w_1(bx)e^{\frac{-cx}{2a}}+\lambda_5(x).\end{aligned}$$

Учитывая

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\qquad \tau'(0)=\sqrt{2}\psi_1(0)-\varphi_1'(0) \tag{3.18}$$

и дважды интегрируя (3.16) по x от 0 до x, получим

$$
\begin{aligned}
\tau(x)+&\int_0^x [(x-t)(B_1(t)-A_1'(t))+A_1(t)]\tau(t)dt+\int_0^x \tau(t)dt\int_t^x r(t)(x-z)\lambda_4(z)dz\\
&+\int_0^x (x-t)f_1(t,0;\tau(t))dt+2\int_0^x (x-t)C_1(t)dt\int_{t/2}^t f_2(s,s-t;\tau(s))ds\\
&-\frac{2(a+b)}{a-b}\int_0^x (x-t)C_1(t)dt\int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s,-s;\tau(s))ds=\int_0^x (x-t)\left(w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}}+\lambda_5(t)\right)dt\\
&-\frac{2\sqrt{2}(a+b)}{a-b}\int_0^x (x-t)C_1(t)dt\int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}}\psi_1'(s)ds+x(\varphi_1(0)A_1(0)+\sqrt{2}\psi_1(0)-\varphi_1'(0))\\
&+\psi_1(0)-\int_0^x (x-t)\frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)}dt.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$
\begin{aligned}
\tau(x)=&2\int_0^x (x-t)\left(\frac{(a+b)}{a-b}\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s,-s;\tau(s))ds-\int_{\frac{t}{2}}^{t} f_2(s,s-t;\tau(s))ds\right)C_1(t)dt\\
&-\int_0^x K_1(x,t)\tau(t)dt-\int_0^x (x-t)f_1(t,0;\tau(t))dt+f^*(x),
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

где

$$
\begin{aligned}
K_1(x,t)=&(x-t)(B_1(t)-A_1'(t))+A_1(t)+r(t)\int_t^x (x-z)\lambda_4(z)dz,\\
f^*(x)=&\int_0^x (x-t)\left(w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}}-\frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)}+\lambda_5(t)\right)dt+x(\varphi_1(0)A_1(0)+\sqrt{2}\psi_1(0)-\varphi_1'(0))\\
&-\frac{2\sqrt{2}(a+b)}{a-b}\int_0^x (x-t)C_1(t)dt\int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}}\psi_1'(s)ds+\psi_1(0).
\end{aligned}
$$

В силу (3.10)–(3.12), из последнего имеем:

$$\|K_1(x,t)\|_C\leqslant M,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1;\qquad \|f^*(x)\|_C\leqslant f_0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{3.20}$$

где $M, f_0=const>0$. Учитывая неравенства

$$\|f_i(x,y;\tau(x))\|_C\leqslant f_{0i},\qquad \|C_1(x)\|_C\leqslant c_0$$

и предполагая $\tau_0(x) = f^*(x)$, из

$$\begin{aligned}\tau_n(x) =& \frac{2(a+b)}{a-b}\int\limits_0^x (x-t)C_1(t)dt \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s,-s;\tau_{n-1}(s))ds \\ & - 2\int\limits_0^x (x-t)C_1(t)dt \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} f_2(s,s-t;\tau_{n-1}(s))ds \\ & - \int\limits_0^x K_1(x,t)\tau_{n-1}(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)f_1(t,0;\tau_{n-1}(t))dt + f^*(x),\end{aligned} \tag{3.21}$$

получим

$$\|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C \leqslant x \cdot c_{01}, \tag{3.22}$$

где f_0, c_0, $c_{01} = const > 0$, причем

$$c_{01} = \frac{1}{4}\cdot\max\left\{\frac{(a+b)c_0 f_{02}}{a-b}; \frac{c_0 f_{02}}{3}; M f_0; \frac{f_{01}}{2}\right\}.$$

Далее, в силу (3.13) с учетом (3.22), из (3.21) находим:

$$\|\tau_2(x) - \tau_1(x)\|_C \leqslant x^2\cdot c_{11} + x^3\cdot c_{12} + x^4\cdot c_{13} \leqslant \frac{x^2}{2!}\cdot c_{01}m;$$

$$\|\tau_3(x) - \tau_2(x)\|_C \leqslant \frac{x^3}{3!}\cdot c_{21} + \frac{x^4}{4!}\cdot c_{22} + \frac{x^5}{5!}\cdot c_{23} \leqslant \frac{x^3}{3!}\cdot c_{01}m^2,$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} =& c_{01}\cdot\frac{M}{2}, \quad c_{12} = c_{01}\cdot\frac{L_1}{6}, \quad c_{13} = c_{01}\cdot\frac{c_0 L_2(2a+b)}{a-b}, \\ c_{21} =& m\cdot c_{11}, \quad c_{22} = m\cdot c_{12}, \quad c_{23} = m\cdot c_{13}, \\ m =& \frac{1}{3}\cdot\max\left\{\frac{M}{2}; \frac{L_1}{6}; \frac{c_0 L_2(2a+2)}{a-b}\right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leqslant c_{01}m^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n!}. \tag{3.23}$$

На основе (3.23) заключаем, что уравнение (3.19) имеет сжатый оператор, более того имеется единственная неподвижная точка этого оператора. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (3.19) имеет единственное решение в классе $C[0,1]\cap C^2(0,1)$. $\square$

Замечание 3.1. *Если $a = b$, то учитывая (см.* (3.17)*)*

$$f(x) = \frac{a\lambda_1(x)}{c(1+2a_1(x))} w_2(ax)\left(e^{\frac{-cx}{2a}} - 1\right) - \frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1+2a_1(x)} + w_1(ax)e^{\frac{-cx}{2a}} + \lambda_5(x)$$

и

$$w_2(x) = f_2\left(\frac{x}{2a}, -\frac{x}{2a}; \tau\left(\frac{x}{2a}\right)\right) - \sqrt{2}\psi_1'\left(\frac{x}{2a}\right),$$

из (3.16) аналогично получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\tau(x) = \frac{4a}{c}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)C_1(2t)\left(e^{\frac{-ct}{a}} - 1\right) f_2(t,-t;\tau(t))dt - 2\int\limits_0^x (x-t)C_1(t)dt\int\limits_{t/2}^{t} f_2(s,s-t;\tau(s))ds$$

$$-\int_0^x K_1(x,t)\tau(t)dt - \int_0^x (x-t)f_1(t,0;\tau(t))dt + f_1^*(x),$$

где

$$f_1^*(x) = x(\varphi_1(0)A_1(0) + \sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0)) + \int_0^x (x-t)\left(w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}} + \lambda_5(t) - \frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)}\right)dt$$
$$-\frac{4\sqrt{2}a}{c}\int_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)C_1(2t)\left(e^{\frac{-ct}{a}}-1\right)\psi_1'(t)dt + \psi_1(0).$$

Далее, $\nu^-(x)$ можно будет найти из (3.7), и следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение задачи Коши (см. (3.6)).

Замечание 3.2. *В случаях $2a_1(x)+1=0,\ 2a_2(x)-1\neq 0$ и $2a_1(x)+1=0,\ a_3(x)\neq 0$ неизвестная функция $\tau(x)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, которое следует из (3.7).*

Решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается аналогично (см. (3.6)), а в области Ω_1 как решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) [16]:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) = &\int_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^1 G_0(x,\xi,y)\tau(\xi)d\xi \\ &-\int_0^y\int_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\left(\omega_1(b\xi-a\eta)e^{-\frac{c(b\xi+a\eta)}{2ab}} - f_1(\xi,\eta;\tau(\xi))\right)d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $\omega_1(.)$ определяется из (3.9) и

$$G_0(x,\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y \eta^{-\alpha}G(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right]$$

функция Грина первой краевой задачи,

$$e^{1,\delta}_{1,\delta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\delta n)}$$

функция типа Райта [16].

Следует отметить, что в случаях $2a_1(x)+1=0$, $2a_2(x)-1\neq 0$ и $2a_1(x)+1=0$, $a_3(x)\neq 0$, сначала определяется $\nu^+(x)$ из решения первой краевой задачи (см. (3.24)), потом, воспользовавшись условием склеивания, находится $\nu^-(x)$ при $\lambda_1(x)\neq 0$.

4. Другие задачи, связанные с условием на a и b

Задача II. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1.1) в области $\Omega\setminus AB$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2})$, $\quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет всем условиям **задачи I** и (1.8) для $1 < b/a < +\infty$.

Замечание 4.1. *Для корректной постановки задачи подбираются необходимые условия для определения неизвестной функций $w_i(bx-ay)$, $i=1,2$, которые по аргументу полностью охватывают рассматриваемую область при соответственных условиях на коэффициенты a и b. С этой целью, в случае Задачи II включено дополнительное условие (1.8).*

Задача III. Требуется определить регулярное решение $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2})$, $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)$ в (1.1) в области $\Omega \setminus AB$, удовлетворяющее всем условиям **задачи II**, при этом, (1.4) меняется на (1.5), для $-\infty < b/a < -1$.

Задача IV. Требуется определить регулярное решение

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2} \setminus \overline{AC}), \qquad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)$$

из уравнения (1.1) в области $\Omega \setminus AB$, удовлетворяющее всем условиям задачи III кроме (1.7) для $-1 \leqslant b/a < 0$.

Замечание 4.2. *Учитывая условия на коэффициенты a и b, для корректности задач III и IV условие для определения неизвестных функций $w_i(bx-ay)$, $i=1,2$, в отличие от задач I и II ставится на отрезке $x=1$.*

4.1. Исследование задачи II. Пусть $1 < b/a < +\infty$, тогда предполагая $a>0$ и $b>0$, имеем $b > (a+b)/2$, следовательно

$$0 \leqslant bx - ay \leqslant \frac{b+a}{2}, \qquad (x,y) \in \Omega_{21}, \tag{4.1}$$

$$\frac{b+a}{2} \leqslant bx - ay \leqslant b, \qquad (x,y) \in \Omega_{22}. \tag{4.2}$$

Здесь Ω_{21} и Ω_{22} – характеристические треугольники ABE и BCE соответственно, где $E = E\left(\frac{b+a}{2b}, 0\right)$, причем $\Omega_{21} \cup CE \cup \Omega_{22} = \Omega_2$.

Пусть имеет место неравенство (4.1), тогда из решения (3.6), применяя (1.6) и (1.7), соответственно находим функциональное соотношение (3.7) и $\omega_{21}(x)$ (см. (3.8)):

$$w_{21}\left((a+b)x\right) = e^{\frac{c(b-a)x}{2ab}} \left(f_2\left(x, -x; \tau(x)\right) - \sqrt{2}\psi_1'(x) \right). \tag{4.3}$$

В случае (4.2), пользуясь условием (1.8) и учитывая $(u_y - u_x)|_{BC} = \sqrt{2}\psi_2(x)$ из (3.6), находим $w_{22}(x)$:

$$w_{22}\left((b-a)x + a\right) = e^{\frac{c}{2ab}((b+a)x-a)} \left(\sqrt{2}\psi_2'(x) + f_2\left(x, x-1; \tau(x)\right) \right). \tag{4.4}$$

Следует отметить, что

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{21}(x), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a+b}{2}; \\ w_{22}(x), & \dfrac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{4.5}$$

должна быть непрерывной для всех $0 < x < b$. Легко можем убедиться, что

$$w_{21}\left(\frac{a+b}{2}\right) = w_{22}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

при
$$\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right)=-\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right).$$

В силу (4.5) и (3.7), из (3.15) имеем
$$\begin{aligned}\tau(x)=&\Phi(x,\tau(x))-2\int\limits_0^x(x-t)C_1(t)dt\int\limits_{t/2}^t f_2(s,s-t;\tau(s))ds\\&-\int\limits_0^x K_1(x,t)\tau(t)dt-\int\limits_0^x(x-t)f_1(t,0;\tau(t))dt+g^*(x),\end{aligned}\tag{4.6}$$
где
$$\begin{aligned}\Phi(x,\tau(x))=&\frac{2}{a-b}\int\limits_0^{\frac{a+b}{2}}w_{21}(z)K_2(x,z)dz\\&+\frac{2}{a-b}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{bx}w_{22}(z)e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}}dz\int\limits_{z/2}^{x}(x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt,\end{aligned}\tag{4.7}$$
$$K_2(x,z)=\begin{cases}e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}}\int\limits_{\frac{z}{2}}^{\frac{2z}{b+a}}(x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt, & 0\leqslant z\leqslant\frac{a+b}{2}x;\\ e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}}\int\limits_{z/2}^{x}(x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt, & \frac{a+b}{2}x\leqslant z\leqslant\frac{a+b}{2},\end{cases}$$
$$\begin{aligned}g^*(x)=&\int\limits_0^x(x-t)\left(w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}}+\lambda_5(t)-\frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)}\right)dt\\&+x(\varphi_1(0)A_1(0)+\sqrt{2}\psi_3(0)-\varphi_1'(0))+\psi_1(0).\end{aligned}$$
Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.7), получим
$$\begin{aligned}\Phi(x,\tau(x))=&\frac{2}{a-b}\int\limits_0^{\frac{a+b}{2}}e^{\frac{c(b-a)z}{2ab(a+b)}}f_2\left(\frac{z}{a+b},-\frac{z}{a+b};\tau\left(\frac{z}{a+b}\right)\right)K_2(x,z)dz\\&+\frac{2}{a-b}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{bx}e^{\frac{-c}{b-a}}f_2\left(\frac{z-a}{b-a},\frac{z-a}{b-a}-1;\tau\left(\frac{z-a}{b-a}\right)\right)dz\int\limits_{z/2}^{x}(x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt\\=&\frac{2(a+b)}{a-b}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}e^{\frac{c(b-a)z}{2ab}}f_2\left(z,-z;\tau(z)\right)K_2(x,z(a+b))dz\\&-2e^{\frac{-c}{b-a}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{bx-a}{b-a}}f_2\left(z,z-1;\tau(z)\right)dz\int\limits_{\frac{z(b-a)+a}{2}}^{x}(x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt.\end{aligned}$$

Более того, учитывая

$$\left\| \int\limits_{\frac{z(b-a)+a}{2}}^{x} (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}}dt \right\|_C \leqslant const \quad \text{и} \quad \|K_2(x,z)\|_C \leqslant const,$$

выводим, что

$$\|\Phi(x,\tau(x))\|_C \leqslant m_1 \left\| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f_2\left(z,-z;\tau(z)\right)dz \right\|_C + m_2 \left\| \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{bx-a}{b-a}} f_2\left(z,z-1;\tau(z)\right)dz \right\|_C ,$$

где $m_1, m_2 = const > 0$.

В силу (3.13) и второго условия (3.12), также предполагая $m_0 = max\{m_1, m_2\}$, получим:

$$\|\Phi(x,\tau(x))\,\|_C \leqslant \frac{bx-a}{b-a}\cdot const;$$

$$\|\Phi(x,\tau_{n-1}(x)) - \Phi(x,\tau_{n-2}(x))\|_C \leqslant mL_2 \left\| \int\limits_0^{\frac{bx-a}{b-a}} |\tau_{n-1}(z)-\tau_{n-2}(z)|dz \right\|_C$$
$$\leqslant \frac{m_0L_2}{n!}\left(\frac{bx-a}{b-a}\right)^n \cdot const.$$

Далее, учитывая $x < \frac{bx-a}{b-a}$ при $b > a$, аналогичными рассуждениями для уравнения (4.6), выводим:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leqslant \frac{(bx-a)^n}{(b-a)^n n!}\cdot const.$$

Таким образом, заключаем что уравнение (4.6) однозначно разрешимо как нелинейное интегральное уравнение Вольтерра.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если имеют место все условия Теоремы 3.1 и*

$$\psi_2(x) \in C^2\left(\frac{1}{2},1\right) \cap C^1\left[\frac{1}{2},1\right],$$

то задача II однозначно разрешима.

Замечание 4.3. *При исследовании* ***задачи II*** *неизвестную функцию $\tau(x)$, можно определить как решение нелинейного интегрального уравнения при $2a_1(x)+1 = 0$, $2a_2(x)-1 \neq 0$, или $2a_1(x)+1=0$, $a_3(x) \neq 0$, точно также, как и в задаче I.*

Замечание 4.4. *Исследования задач* ***III*** *и* ***IV*** *редуцируются к задаче Коши для уравнения (3.16) с начальными условиями $\tau(1) = \varphi_2(0)$, $\tau'(1) = \varphi_2'(0) - \sqrt{2}\psi_2(0)$.*

Пусть $-1 \leqslant \frac{b}{a} < 0$, тогда неизвестная функция $w_2(x)$ определяется из условия (1.8), и имеет вид (4.4). В другом случае, т.е. при $-\infty < \frac{b}{a} < -1$, функция $w_2(x)$ определяется как (4.5). Следует отметить, что в этих случаях мы получим линейное интегральное уравнение типа Фредгольма при $f_i(x,y;\tau(x)) = 0$ и $\lambda_4(x) \neq 0$. Следовательно, требуется отдельно доказать единственность решения задачи, или наложить дополнительные условия на заданные функции, обеспечивающие однозначную разрешимость соответствующего линейного интегрального уравнения типа Фредгольма. Но, так как $f_i(x,y;\tau(x)) \neq 0$, $i = 1,2$, то мы получим нелинейное интегральное уравнение с Фредгольмовыми и Вольтерровскими операторами.

С другой стороны, если интегральное слагаемое условия склеивания (2.1) заменить на

$$\lambda_4(x)\int_x^1 r(t)\tau(t)dt,$$

и соответствующее нелокальное условие (см. (1.6)) ставить на характеристике BC, то мы опять получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра.

Замечание 4.5. *Похожие задачи для (1.1) при $b=0$, $a,c\neq 0$ можно исследовать аналогичным методом.*

Такие задачи были изучены в работе [17] при

$$f_i(x,y;u(x,0))=\sum_{k=1}^{n} p_k I_{0x}^{\beta_{ik}}u(x;0), \qquad i=1,2.$$

Как нам известно, краевые задачи для уравнения (1.1) при $a=0, b, c\neq 0$ не были исследованы даже при $f_i(x,y;u(x,0))=0$. Отметим, что методы исследования, использованные в работе [3] при $a=0, b, c\neq 0$, не применимы для таких уравнений, в которых содержатся операторы дробного дифференцирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Podlubniy. *Fractional differential equations.* Academic Press, New York, 1999.
2. S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach, Longhorne, PA, 1993.
3. Т.Д. Джураев и др. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Ташкент. ФАН. 1986.
4. B. Islomov, U. Baltaeva. *Boudanry-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic type equation with variable coefficients* // EJDE **2015**:221. 1–10 (2015).
5. U. Baltaeva, P. Agarwal. *Boundary value problems for a third-order loaded equation with noncharacteristic type change boundaries* // Math. Meth. Appl. Sci. **41**:9. 3305–3315 (2018).
6. O.Kh. Abdullaev, K. Sadarangani. *Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative* // EJDE **2016**:164. 1–10 (2016).
7. K. Sadarangani, O.Kh. Abdullaev. *About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives* // International Journal of Differential Equations **2016**:9815796. 1–6 (2016).
8. O.Kh. Abdullayev. *Solvability of a non-local problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi-Kober operators* // Fractional Differ. Calc. **7**:2. 371-–383 (2017).
9. А.М. Нахушев. *Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги* // ДАН СССР **242**:5. 1243–1247 (1978).
10. А.М. Нахушев. *Нагруженные уравнения и их приложения.* М.Наука. 2012.
11. E.N. Zhuravleva, E.A. Karabut. *Loaded complex equations in the problem of impact of jets* // Comput. Math. and Math. Phys. **51**:5. 876–894 (2011).
12. I.S. Lomov. *A theorem on unconditional basis property of roots vectors of second order weighted differential operators* // Differential Equations **27**:9. 1550–1563 (1991).
13. F. Bloom. *Ill-posed Problems for Integro-differential Equations in Mechanics and Electromagnetic Theory.* SIAM. 1981.

14. K. Schumacher. *Traveling-front solutions for integro-differential equations II* // In.: Joger W., Rost H., Tautu P. (eds). Biological Growth and Spread. Lecture Notes in Biomathematics: **38**. 296–309 (1980).
15. N. Apreutesei, A. Ducrot, V. Volpert. *Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics* // Discrete and Continuous Dynamical Systems - B **11**:3. 541–561 (2009).
16. A.V. Pskhu. *Solution of boundary value problems fractional diffusion equation by the Green function method* // Differential equation **39**:10. 1509–1513 (2003).
17. O.Kh. Abdullaev, A.A. Matchanova. *Non-local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo operator* // Bulletin of the Institute of Mathematics **2018**:5. 36–42 (2018).

Бозор Исломович Исломов,
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
ул. Университетская, 4,
100174, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: `islomovbozor@yandex.com`

Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев,
Институт Математики им. В.И. Романовского,
ул. Университетская, 4–а,
100174, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: `obidjon.mth@gmail.com`