УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А.В. ЖИБЕР, М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений $\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$ в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \ldots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$. Среди интегрируемых нелинейных уравнений и систем в частных производных в отдельный широкий класс выделены нелинейные гиперболические уравнения и системы, интегрируемые «по Дарбу». Отличительным свойством таких уравнений является наличие интегралов по каждому характеристическому направлению (так называемых x- и y-интегралов). Последнее позволяет сводить интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения и системы, интегрируемые «по Дарбу» эффективно поддаются исследованию и классификации при помощи характеристических колец Ли. Основополагающими в формировании алгебраического подхода исследования нелинейных гиперболических систем являются работы Лезнова, Смирнова, Шабата, Ямилова [1, 2]. В настоящее время алгебраический подход распространен на полудискретные и дискретные уравнения. В данной работе доказано, что система обладает N x-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо Ли, соответствующее непрерывному характеристическому направлению, конечномерно.

Ключевые слова: полудискретная система уравнений, характеристическое кольцо, x-интеграл, система, интегрируемая по Дарбу.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30, 37D99

1. Введение

Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений

$$\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}) \tag{1.1}$$

в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \ldots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Прежде всего, дадим точные определения и формулировки утверждений. Первоначально, определим набор независимых переменных. Каждое равенство должно быть выполнено тождественно на любом решении системы (1.1). Поэтому везде $\bar{r}_{n+1,x}$ заменяется на правую часть $\bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$, $\bar{r}_{n+2,x}$ на $\bar{h}(x, n+1, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2}, \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}))$ и т.д. Таким образом, независимые переменные

$$\ldots, r_{n-m}^i, \ldots, r_{n-1}^i, r_n^i, r_{n+1}^i, \ldots, r_{n+k}^i, \ldots, r_{n,x}^i, r_{n,xx}^i, r_{n,xxx}^i, \ldots. \tag{1.2}$$

A.V. Zhiber, M.N. Kuznetsova, Integrals and characteristic Lie rings of semi-discrete systems of equations.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/.

Поступила 15 апреля 2021 г.

Далее мы будем использовать обозначения: D_x для оператора полного дифференцирования по переменной x, D для оператора сдвига по n на единицу, т.е

$$Dr(n,x) = r(n+1,x), \qquad D^{-1}r(n,x) = r(n-1,x),$$
$$D^2 r(n,x) = r(n+2,x), \qquad D^{-2}r(n,x) = r(n-2,x).$$

Для производных вектора $\bar{r}_n$ будем использовать обозначения $\bar{r}_{n,x} = (r^1_{n,x}, r^2_{n,x}, \ldots, r^N_{n,x}), \ldots,$

$$\bar{r}_n^{(m)} = \left(r_n^{1,(m)}, \ldots, r_n^{N,(m)}\right) = \left(\frac{\partial^m r_n^1}{\partial x^m}, \ldots, \frac{\partial^m r_n^N}{\partial x^m}\right).$$

Определение 1.1. *Функция*

$$W = W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+s}), \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial W}{\partial r^i_{n+s}}\right)^2 \neq 0,$$

удовлетворяющая характеристическому уравнению $D_x W = 0$*, называется* x*-интегралом системы* (1.1)*, а число* s *– его порядком.*

Определение 1.2. *Функция*

$$I = I(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n,x}, \bar{r}_{n,xx}, \ldots, \bar{r}_n^{(m)}), \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial I}{\partial r_n^{i,(m)}}\right)^2 \neq 0,$$

удовлетворяющая уравнению $DI = I$*, называется* n*-интегралом системы* (1.1)*, а число* m *– его порядком.*

Система уравнений (1.1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор (N по каждому характеристическому направлению) функционально независимых интегралов.

Пример 1.1. *Цепочка*

$$t_{n+1,x} = t_{n,x} + ce^{\frac{t_n + t_{n+1}}{2}}$$

является интегрируемой по Дабру, так как допускает x*-интеграл*

$$W = e^{\frac{t_{n+1} - t_n}{2}} + e^{\frac{t_{n+1} - t_{n+2}}{2}}$$

и n*-интеграл (см.* [3]*)*

$$I = t_{n,xx} - \frac{t_{n,x}^2}{2}.$$

Уравнения и системы, интегрируемые по Дарбу, эффективно поддаются исследованию и классификации при помощи характеристических колец Ли.

Понятие характеристичекой алгебры Ли было введено в работе [1] для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(u), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В работах [1, 2] был доказан критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений. Было показано, что система (1.3) обладает полным набором интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра конечномерна. В работе [4] получен критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \qquad (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

В работах [5, 6] введено понятие характеристического кольца дискретного уравнения и с помощью этого понятия проведена классификация интегрируемых по Дарбу дифференциально-разностных уравнений вида $u_{i+1,x} = f(u_i, u_{i+1}, u_{i,x})$. В работах [7, 8] исследуется задача построения полного набора интегралов гиперболической системы.

В работе [9] сформулирована гипотеза: система уравнений (1.1) обладает полным набором $x-$ и $n-$ интегралов, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по каждому характеристическому направлению конечномерно.

В настоящей работе доказано, что система (1.1) обладает N независимыми $x-$интегралами, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по этому характеристическому направлению конечномерно.

Статья организована следующим образом. Параграф 2 содержит доказательство основного результата, сформулированного в Теореме 2.1 для системы (1.1) при $N = 2$. В параграфе 3 приводится схема доказательства основного результата для произвольного N (Теорема 3.1). Заключение содержит обсуждение результатов.

2. Характеристические кольца. Случай $N = 2$

Исследуем случай $N = 2$:

$$\bar r_{n+1,x} = \bar h(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \bar r_{n,x}), \qquad \bar r_n = (r_n^1, r_n^2), \qquad \bar h = (h^1, h^2), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Определим x-кольцо Ли системы (2.1). На множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $x, \bar r_{n,x}, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \dots$ оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,xx}\frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}} + r^2_{n,xx}\frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right). \tag{2.2}$$

Из системы уравнений (2.1) получаем соотношения

$$\bar r_{n+k,x} = \bar h_{n+k}(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \dots, \bar r_{n+k}, \bar r_{n,x}), \qquad k = 1, 2, \dots \tag{2.3}$$

Представим оператор (2.2) в виде

$$D_x = r^1_{n,xx}Y_1 + r^2_{n,xx}Y_2 + Y_3, \tag{2.4}$$

где

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

Согласно формулам (2.3), векторное поле Y_3 можно представить в виде:

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^1_n} + r^2_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \beta_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right),$$

где $\bar h_{n+k} = (\alpha_k, \beta_k)$. Отметим, что

$$\alpha_k = \alpha_k(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \dots, \bar r_{n+k}, \bar r_{n,x}), \qquad \beta_k = \beta_k(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \dots, \bar r_{n+k}, \bar r_{n,x}).$$

Характеристическое уравнение

$$DW(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \dots, \bar r_{n+m}) = 0, \tag{2.5}$$

согласно (2.4), эквивалентно системе

$$Y_1W = 0, \qquad Y_2W = 0, \qquad Y_3W = 0. \tag{2.6}$$

С уравнениями (2.6) естественным образом связано колько Ли, порожденное векторными полями Y_1, Y_2 и Y_3. Это кольцо $\mathcal{X}$ будем называть характеристическим x-кольцом Ли системы уравнений (2.1). Решения уравнения (2.5) будем называть x-интегралами.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. *Если система уравнений* (2.1) *обладает двумя x-интегралами, независимыми в главном, то кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

Доказательство. Пусть система (2.1) обладает парой интегралов одинакового порядка

$$\omega(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),$$

независимых в главном, то есть определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\omega}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial\omega}{\partial r^2_{n+m}} \\ \dfrac{\partial W}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial W}{\partial r^2_{n+m}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\bar r_{n+m} = \bar a_n(\omega, W, x, n, \bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1}). \tag{2.7}$$

Далее положим $\omega_n=\omega$, $W_n=W$. Теперь из (2.7) получаем соотношения

$$\bar r_{n+m+k} = \bar A_k(x,n,\omega_n,W_n,\dots,\omega_{n+k},W_{n+k},\bar r_n,\bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1}),\quad k=0,1,2,\dots. \tag{2.8}$$

Таким образом, учитывая формулы (2.8), от независимых переменных

$$\bar r_{n,x}, x, \bar r_n, \bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+s},\dots \tag{2.9}$$

можно перейти к новым переменным

$$\bar r_{n,x}, x, \bar r_n, \bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1},\omega_n,W_n,\dots,\omega_{n+k},W_{n+k},\dots. \tag{2.10}$$

В новых переменных (2.10) оператор Y_3 запишется в виде

$$\tilde Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{m-1}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

При замене переменных справедливо соотношение $\overline{[X,Z]} = [\overline{X},\overline{Z}]$, здесь черта сверху означает исходный оператор в новых переменных, и кольцо Ли, порожденное операторами Y_1, Y_2 и $\tilde Y_3$ конечномерно. Поэтому и исходное x-кольцо Ли $\mathcal{X}$ конечномерно.

Пусть исходная система уравнений (2.1) имеет пару интегралов разного минимального порядка

$$\omega(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+l}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),\qquad l<m, \tag{2.11}$$

независимых в главном. Последнее означает, что интегралы

$$\omega(x,n+m-l,\bar r_{n+m-l},\dots,\bar r_{n+m}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m})$$

независимы в главном. И тогда, переходя от переменных (2.9) к переменным

$$\bar r_{n,x}, x, \bar r_n, \bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1},\omega_{n+m-l},\omega_{n+m-l+1},\dots,W_n,W_{n+1},\dots,$$

как и выше получаем, что кольцо $\mathcal{X}$ – конечномерно. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим вопрос о зависимости двух интегралов в главном. Пусть интегралы (2.11) зависимы в главном. Последнее означает, что справедливо равенство

$$W(x,n,\bar r_m,\dots,\bar r_{n+m}) = F(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1},\omega(x,n+m-l,\bar r_{n+m-l},\dots,\bar r_{n+m})).$$

Откуда получаем, что

$$W=\sum_{k=0}^{\infty} F_k(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1})(\omega-\omega^0)^k.$$

В силу того, что ω и W – интегралы минимального порядка получаем, что

$$F_k = \Phi_k\left(x, n, \omega(x, n, \bar r_n, \ldots, \bar r_{n+l}), \ldots, \omega(x, n+m-l, \bar r_{n+m-l}, \ldots, \bar r_{n+m-1})\right).$$

Таким образом,

$$W = \Phi(x, n, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+m-l})$$

и исходная система (1.1) имеет один x-интеграл.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Ясно, что $\dim \mathcal{X} \geqslant 5$.

Рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 5$. Тогда базис кольца $\mathcal{X}$ задается векторными полями Y_1, Y_2, Y_3, $Y_{13} = [Y_1, Y_3]$, $Y_{23} = [Y_2, Y_3]$. Так как

$$\begin{aligned} Y_3 =& \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^1_n} + r^2_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^2_n} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\alpha_k(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \ldots, \bar r_{n+k}, \bar r_{n,x})\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \\ &+ \beta_k(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1}, \ldots, \bar r_{n+k}, \bar r_{n,x})\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\Bigg), \end{aligned} \tag{2.12}$$

то

$$[Y_1, Y_3] = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial r^1_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \frac{\partial \beta_k}{\partial r^1_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right),$$

$$[Y_2, Y_3] = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial r^2_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \frac{\partial \beta_k}{\partial r^2_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

Далее векторное поле (2.12) заменим на

$$\tilde Y_3 = Y_3 - r^1_{n,x}Y_{13} - r^2_{n,x}Y_{23}.$$

Итак, имеем следующий базис

$$\begin{gathered} Y_1 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}}, \qquad \tilde Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde\alpha_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \tilde\beta_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right), \\ Y_{13} = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \delta_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right), \qquad Y_{23} = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + q_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты $\tilde\alpha_k, \tilde\beta_k, \gamma_k, \delta_k, p_k, q_k$ не зависят от переменных $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$ и есть функции переменных $x, n, \bar r_n, \ldots, \bar r_{n+k}$, иначе $\dim \mathcal{X} > 5$. Характеристическое уравнение (2.5) для x-интеграла $W(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1})$, согласно (2.13), сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde\alpha_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \tilde\beta_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r^1_n} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \delta_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r^2_n} + p_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + q_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как число независимых переменных равно пяти: $(x, r^1_n, r^2_n, r^1_{n+1}, r^2_{n+1})$, а число уравнений трем, то система (2.14) имеет два функционально независимых решения $\omega(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1})$ и $W(x, n, \bar r_n, \bar r_{n+1})$ первого порядка.

Далее рассмотрим кольцо $\mathcal{X}$ размерности 6. Не ограничивая общности можно считать, что базис порождается векторными полями (2.13) и полем вида

$$Y_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + s_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right), \qquad k \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Ясно, что коэффициенты оператора Y_4 не зависят от переменных $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$. Иначе размерность кольца будет больше 6.

Аналогично, коэффициенты векторных полей (2.13) не зависят от $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$.

Если $k \geqslant 2$, то мы приходим к системе (2.14), которая имеет два функционально независимых решения первого порядка.

Пусть $k = 1$. Характеристическое уравнение (2.5) для x-интеграла первого порядка сводится к системе, состоящей из уравнений (2.14) и уравнения (см. (2.15))

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + s_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} \right) W = 0. \tag{2.16}$$

Так как число независимых переменных равно пяти: $(x, r^1_n, r^2_n, r^1_{n+1}, r^2_{n+1})$, а число уравнений четырем, то система (2.14), (2.16) имеет одно решение $\omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ первого порядка.

Далее рассмотрим уравнение (2.5) для x-интеграла второго порядка

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \tilde{\beta}_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \tilde{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r^1_n} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \delta_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r^2_n} + p_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + q_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + p_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + q_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + s_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + s_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + d_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Так как число переменных равно 7: $(x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$, а число уравнений системы (2.17) равно 4, то последняя имеет три функционально независимых решения $\omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$, $\omega(x, n+1, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ и $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$. Таким образом, x-интегралы $\omega = \omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ и $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ задают все семейство решений характеристического уравнения (2.5).

Далее рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 7$. Тогда базис кольца Ли $\mathcal{X}$ порождается векторными полями, согласно (2.13), (2.15), вида

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \beta_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\gamma_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \delta_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + q_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + s_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right),$$

$$\tilde{Y}_5 = \kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} + \sum_{s=n+l+1}^{\infty} \left(\kappa_s \frac{\partial}{\partial r^1_{n+s}} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial r^2_{n+s}} \right).$$

Здесь коэффициенты векторных полей $\tilde{Y}_i$ не зависят от переменных $r^1_{n,x}$, $r^2_{n,x}$ и $l \geqslant k$.

При $k \geqslant 2$ система уравнений

$$\tilde{Y}_i W = 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \tag{2.18}$$

имеет два функционально независимых решения первого порядка и любое другое есть функция от их сдвигов, то есть

$$W = W(x, n, \omega^1, \omega^2, \omega^1_1, \omega^2_1, \ldots, \omega^1_s, \omega^2_s),$$

где

$$\omega^1 = \omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}), \qquad \omega^2 = \omega^2(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}),$$
$$\omega^m_i = \omega^m_i(x, n+i, \bar{r}_{n+i}, \bar{r}_{n+i+1}), \qquad m = 1,2, \qquad i = 1,2,\ldots,s.$$

Рассмотрим далее случай $k = 1$. Если $l \geqslant 3$, то мы приходим к системе (2.17). Таким образом, имеем x-интеграл первого порядка и x-интеграл второго порядка. Последние задают все семейство решений системы (2.18).

Пусть $l = 2$. Тогда нетрудно показать как и выше, что система (2.18) имеет два решения $\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ и $\omega^2(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$, которые задают все множество решений характеристического уравнения (2.5). Осталось рассмотреть случай $l = 1$ (при $k = 1$). Если определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ \kappa_1 & \mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то оператор $\tilde{Y}_5$ заменим на $\tilde{\tilde{Y}}_5 = \tilde{Y}_5 - \kappa_1 \tilde{Y}_4$. Последний имеет вид:

$$\tilde{\tilde{Y}}_5 = \kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} + \sum_{s=n+1+l}^{\infty} \left(\kappa_s \frac{\partial}{\partial r^1_{n+s}} + \mu_s \frac{\partial}{\partial r^2_{n+s}} \right),$$

где $l \geqslant 2$. Этот случай был исследован выше.

Если

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ \kappa_1 & \mu_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то операторы $\tilde{Y}_4$ и $\tilde{Y}_5$ можно заменить на следующие

$$\tilde{\tilde{Y}}_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \sum_{l=2}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right),$$
$$\tilde{\tilde{Y}}_5 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right).$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\tilde{Y}_1 W = 0, \quad \tilde{Y}_2 W = 0, \quad \tilde{Y}_3 W = 0, \quad \tilde{\tilde{Y}}_4 W = 0, \quad \tilde{\tilde{Y}}_5 W = 0. \tag{2.19}$$

Для решений второго порядка $W = W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ система содержит 7 независимых переменных $x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2}$, а число уравнений равно 5. Следовательно, существует два независимых интеграла второго порядка.

Ясно, что система (2.19) не имеет интегралов первого порядка в этом случае. Аналогично рассматривается случай, когда $\dim \mathcal{X} > 7$. Итак, доказано утверждение:

Лемма 2.2. *Если кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно, то существует два независимых интеграла минимального порядка. Любой другой интеграл есть функция от их сдвигов.*

Таким образом, из Лемм 2.1, 2.2 следует утверждение:

Теорема 2.1. *Система уравнений (2.1) обладает двумя x-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

3. Характеристические кольца

Определим характеристическое кольцо по направлению x для системы (1.1). На множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $x, \bar{r}_{n,x}, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots$ оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} r^i_{n,xx} \frac{\partial}{\partial r^i_{n,x}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(r^i_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^i_{n+k}} \right). \tag{3.1}$$

Из системы уравнений (1.1) получаем соотношения

$$\bar{r}_{n+k,x} = \bar{h}_{n+k}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Представим оператор (3.1) в виде

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} r^i_{n,xx} Y_i + Y_{N+1}, \tag{3.3}$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial r^i_{n,x}}, \qquad Y_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^1_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \cdots + r^N_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^N_{n+k}} \right).$$

Согласно формулам (3.2) векторное поле Y_{N+1} можно представить в виде:

$$Y_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x} \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \cdots + r^N_{n,x} \frac{\partial}{\partial r^N_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^1_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \cdots + \alpha^N_k \frac{\partial}{\partial r^N_{n+k}} \right),$$

где $\bar{h}_{n+k} = (\alpha^1_k, \ldots, \alpha^N_k)$. Отметим, что

$$\alpha^i_k = \alpha^i_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}).$$

Характеристическое уравнение

$$D_x W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m}) = 0, \tag{3.4}$$

согласно (3.3), эквивалентно системе

$$Y_i W = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, N+1. \tag{3.5}$$

С уравнениями (3.5) естественным образом связано кольцо Ли $\mathcal{X}$, порожденное векторными полями Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N, N+1$. Это кольцо $\mathcal{X}$ будем называть характеристическим x-кольцом системы уравнений (1.1). Решения уравнения (3.4) будем называть x-интегралами. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Если система уравнений* (1.1) *обладает* N *x-интегралами, независимыми в главном, то кольцо* $\mathcal{X}$ *конечномерно.*

Доказательство. Пусть система (1.1) допускает N интегралов одинакового порядка $\omega^i(x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+m})$, независимых в главном. То есть определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^2_{n+m}} \cdots & \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^N_{n+m}} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^2_{n+m}} \cdots & \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^N_{n+m}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\bar{r}_{n+m} = \bar{a}_n(\omega^1, \ldots, \omega^N, x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+m-1}). \tag{3.6}$$

Далее положим $\omega_n^1 = \omega^1, \dots, \omega_n^N = \omega^N$. Тогда из (3.6) получаем сооотношения

$$\bar{r}_{n+m+k} = \bar{A}_k(x, n, \omega_n^1, \dots, \omega_n^N, \dots, \omega_{n+k}^1, \dots, \omega_{n+k}^N, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+m-1}), \tag{3.7}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, учитывая формулы (3.7), от независимых переменных

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+s}, \dots \tag{3.8}$$

можно перейти к новым переменным

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+m-1}, \omega_n^1, \dots, \omega_n^N, \dots, \omega_{n+k}^1, \dots, \omega_{n+k}^N. \tag{3.9}$$

В новых переменных (3.9) оператор Y_{N+1} запишется в виде

$$\tilde{Y}_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{m-1} \left(r_{n+k,x}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + r_{n+k,x}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right).$$

При замене переменных справедливо соотношение $\overline{[X, Z]} = \left[\overline{X}, \overline{Z}\right]$, черта сверху означает исходный оператор в новых переменных, и характеристическое кольцо, порожденное операторами $Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \tilde{Y}_{N+1}$ конечномерно. Поэтому и исходное характеристическое кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.

Пусть исходная система уравнений (1.1) имеет N интегралов

$$\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+l_1}), \ \dots, \ \omega^N(x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+l_N}), \tag{3.10}$$

разных минимальных порядков $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \dots \leqslant l_N$, независимых в главном. Последнее означает, что интегралы (обозначим $l_N = M$)

$$\begin{aligned}
&\omega^1(x, n + M - l_1, \bar{r}_{n+M-l_1}, \dots, \bar{r}_{n+M}),\\
&\omega^i(x, n + M - l_i, \bar{r}_{n+M-l_i}, \dots, \bar{r}_{n+M}), \qquad i = 1, 2, \dots, N-1,\\
&\omega^N(x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+M})
\end{aligned}$$

независимы в главном. И тогда, переходя от переменных (3.8) к переменным

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+m-1}, \omega_{n+m-l_1}^1, \omega_{n+m-l_1+1}^1, \dots, \omega_n^N, \omega_{n+1}^N$$

как и выше получаем, что характеристическое кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Лемма доказана. □

Теперь рассмотрим обратную задачу. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.2. *Если кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно, то существует N независимых x-интегралов минимального порядка. Любой другой интеграл есть функция от их сдвигов.*

Схема доказательства. Пусть кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Ясно, что $\dim \mathcal{X} \geqslant 2N + 1$. Рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 2N + 1$. Тогда базис кольца $\mathcal{X}$ задается векторными полями

$$\begin{gathered}
Y_1, Y_2, \dots, Y_N, Y_{N+1},\\
Y_{1,N+1} = [Y_1, Y_{N+1}], \ Y_{2,N+1} = [Y_2, Y_{N+1}], \dots, Y_{N,N+1} = [Y_N, Y_{N+1}].
\end{gathered}$$

Так как

$$\begin{aligned}
Y_{N+1} = &\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} r_{n,x}^i \frac{\partial}{\partial r_n^i} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}) \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \cdots \right.\\
&\left. \cdots + \alpha_k^N(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}) \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right),
\end{aligned}$$

то

$$[Y_1, Y_{N+1}] = \frac{\partial}{\partial r_n^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \alpha_k^1}{\partial r_{n,x}^1} \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \frac{\partial \alpha_k^N}{\partial r_{n,x}^1} \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right),$$

$$[Y_i, Y_{N+1}] = \frac{\partial}{\partial r_n^i} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \alpha_k^1}{\partial r_{n,x}^i} \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \frac{\partial \alpha_k^N}{\partial r_{n,x}^i} \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right), \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Далее векторное поле Y_{N+1} заменим на

$$\tilde{Y}_{N+1} = Y_{N+1} - r_{n,x}^1 Y_{1,N+1} - r_{n,x}^2 Y_{2,N+1} - \dots - r_{n,x}^N Y_{N,N+1}.$$

Итак, имеем следующий базис

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^1}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^2}, \qquad \dots, \qquad Y_N = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^N},\\
&\tilde{Y}_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{\alpha}_k^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \tilde{\alpha}_{n+k}^N \right),\\
&Y_{1,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{1,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right),\\
&Y_{2,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{2,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{2,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right),\\
&\dots\\
&Y_{N,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^N} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{N,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{N,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты $p_{j,k}^i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ не зависят от переменных $x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+k}$, иначе размерность $\dim \mathcal{X} > 2N + 1$.

Характеристическое уравнение (3.4) для x-интеграла $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$, согласно (3.11), сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + \tilde{\alpha}_1^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N} \right) W = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial r_n^1} + p_{1,1}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + p_{1,1}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N} \right) W = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&\left(\frac{\partial}{\partial r_n^N} + p_{N,1}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + p_{N,1}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N} \right) W = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как число независимых переменных равно $2N + 1$: $x, r_n^1, \dots, r_n^N, r_{n+1}^1, \dots, r_{n+1}^N$, а число уравнений равно $N + 1$, то система (3.12) имеет N функционально независимых решений

$$\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}), \dots, \omega^N(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$$

первого порядка.

Аналогично доказательству Леммы 2.2 рассматриваются случаи, когда размерность $\dim\mathcal{X} > 2N + 1$.

Таким образом, из Лемм 3.1, 3.2 следует утверждение:

Теорема 3.1. *Система уравнений* (1.1) *обладает N x-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

4. Заключение

В настоящее время аппарат характеристических колец Ли является эффективным инструментом исследования интегрируемости нелинейных моделей, как непрерывных (уравнений и систем) [1, 2, 4, 7, 8], так и полудискретных уравнений (см. [5, 6]). По-видимому критерий интегрируемости полудискретных систем, рассмотренных в данной работе, состоит в следующем: система уравнений (1.1) обладает полным набором (N по каждому характеристическому направлению) интегралов, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по каждому направлению конечномерно. В данной работе доказана часть этого критерия, касающаяся непрерывного характеристического направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамичексих систем* // ТМФ. **51**:1, 10–21 (1982).
2. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана.* Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1981.
3. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Sakieva. *Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability* // J. Math. Phys., **52**:9, 093507 (2011).
4. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Вестник УГАТУ. **7**:25, 83–89 (2007).
5. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. **49**:10, 102702 (2008).
6. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1,x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. **50**:10, 102710 (2009).
7. А.В. Жибер, А.М. Гурьева. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. **6**:2, 26–34 (2005).
8. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **3**:2, 173-–184 (2010).
9. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D* // J. Phys. A: Math. Theor. (accepted), Preprint: arXiv:2102.07352 (2021).

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru

Мария Николаевна Кузнецова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: mariya.n.kuznetsova@gmail.com