АЛЕКСЕЙ БОРИСОВИЧ ШАБАТ И РАВИЛЬ ИСЛАМОВИЧ ЯМИЛОВ. ВОСПОМИНАНИЯ.

Алексей Борисович Шабат

Мой муж был одной из тех харизматичных личностей, встретив единожды которого, уже трудно забыть. Поэтому, увидев его на лекции 1 сентября на 2 курсе университета, я подошла к нему после занятия и сказала: «Вы будете моим мужем». Он, конечно, не поверил, но, как оказалось, совершенно напрасно. Правда, прошли долгих пять лет, прежде чем это случилось. В Уфе родился наш сын Владимир. Когда ему исполнилось 7 лет, мы переехали жить в Черноголовку. Мне трудно судить, в каком городе его научная жизнь была плодотворней, но Государственную премию Российской Федерации в области науки и техники совместно с Владимиром Евгеньевичем Захаровым он получил за цикл работ, выполненных в Уфе. Работал он очень много. Как говорила моя мама: «Ложишься спать – он еще работает, просыпаешься – он уже работает». Его много раз выдвигали от института на звание академика. Он прошел этот путь 2 раза, а затем сказал мне: «Забудь. Я больше делать этого не буду. Надо льстить многим людям. Я этого не люблю и не умею. Я люблю и умею работать». По этому поводу часто вспоминаю декана математического факультета Карачаево-Черкесского государственного университета – Рамазана Алиевича Бостанова, который говорил про Шабата, что первый раз видит математика, который получает такое удовольствие от работы. Но он умел не только работать, но и отдыхать. Его сердце принадлежало математике и горам. Он был альпинистом 2 разряда. Первый раз, когда он взял меня в горы, это был путь от Алма-Аты до Иссык-Куля. Он говорил, что не может взять человека в жены, не проверив его горами. Шли мы тогда в замечательной компании математиков: Саша Михайлов, Ильдар Гарипов, Сергей Обухов и еще Сергей из Киргизского университета (к сожалению, не могу вспомнить фамилию). Вступив на плоскую землю, я сказала тогда, что теперь точно знаю, что умный в гору не пойдет. Но потом было еще много походов и сплавов по рекам. Почему-то вспомнился один из сплавов, куда с нами отправился замечательный математик, один из его любимых учеников - Всеволод Адлер. Когда ему надоедало плыть, он выходил из байдарки и вез всех на веревочке по реке. Благо, высокий рост позволял ему это делать.

Работая в Новосибирске, Уфе, Черноголовке, Карачаевске, Майкопе, Алексей Борисович Шабат вырастил плеяду выдающихся математиков, среди них: Анатолий Жибер, Всеволод Адлер, Сергей Свинолупов, Равиль Ямилов и многие другие.
Следует еще отметить искрометное чувство юмора моего мужа. Он реагировал сразу. Не очень уместный пример в данном случае, но ярко демонстрирующий его чувство юмора.

Я: Хочу сесть на диету.

Он: Даже не пытайся. Как всегда сядешь мимо.

Одного его слова хватало, чтобы закончить любую дискуссию, любой спор. Ему хватало времени на все: полноценно работать и также полноценно отдыхать, проводить и организовывать конференции, работать в редакциях различных математических журналов. Яркая личность, человек, который оставил след в наших душах и сердцах. Светлая тебе память!

Альфия Камиловна Яикбаева

Равиль Исламович Ямилов

Воспоминания о моем муже Равиле Исламовиче Ямилове. Они очень разные. Это и горечь утраты близкого человека, и счастливые годы, проведенные вместе, и осознание его неординарности, таланта и большой преданности выбранной им научной стезе. Он был удивительно последовательным человеком, беззаветно преданным выбранному творческому пути. Ученый с мировым именем, фантастически работоспособный, он всего себя посвятил служению науке. В то же время в повседневной жизни был чрезвычайно скромным, надежным и интересным человеком с множеством увлечений, будь то музыка, литература, интерес и глубокие познания истории и путешествия по всему миру. С ним было и трудно и легко, потому что он был неоднозначным, незаурядным, интеллектуально развитым человеком, но всегда честным, прямым и умеющим отстоять свою точку зрения. В семье он был всегда надежной защитой, опорой и человеком, которого нам всегда будет не хватать. Светлая ему память!

Светлана Ивановна Ямилова

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 6-10.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ $O(3)$–МОДЕЛИ

А.Б. БОРИСОВ

Аннотация. Трехмерная $O(3)$ модель для единичного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ имеет многочисленные применения в теории поля и физике конденсированных сред. Показано, что эта модель интегрируема при некоторой дифференциальной связи (определенных ограничениях на градиенты полей $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$, параметризующих вектор $\mathbf{n}(\mathbf{r})$). При наличии дифференциальной связи уравнения модели редуцируются к одномерному уравнению sin–Gordon, определяющему зависимость поля $\Theta(\mathbf{r})$ от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$, и систему двух уравнений $(\nabla S)(\nabla S) = 0$, $\Delta S = 0$ для комплекснозначной функции $S(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\Phi(\mathbf{r})$. Показано, что непосредственное решение этой системы дает все известные ранее точные решения модели: двумерные магнитные инстантоны и трехмерные структуры типа «ежей». Найдено точное уравнений для поля $S(\mathbf{r})$ в виде произвольной неявной функции от двух переменных, которое сразу дает вид решения для полей $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ в неявном виде. Показано, что найденное таким образом точное решение системы для поля $S(\mathbf{r})$ приводит к точному решению уравнений $O(3)$–модели в виде произвольной неявной функции от двух переменных.

Ключевые слова: интегрируемая система, $O(3)$–модель, дифференциальная подстановка, квазилинейное уравнение, общее решение.

Mathematics Subject Classification: 35C05, 35J60, 35A08

1. Введение

$O(3)$–модель в трехмерном пространстве с плотностью энергии E

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \nabla n_j \nabla n_j \tag{1.1}$$

для единичного вектора $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}^2 = 1, \tag{1.2}$$

обладает явной $O(3)$–симметрией, соответствующей вращению сферы. Она принадлежит к широкому классу моделей, у которых пространство параметра порядка принадлежит многообразиям, отличным от $\mathbb{R}^N$. Эта модель имеет многочисленные применения в теории поля. В физике конденсированных сред она известна как модель Гейзенберга для описания магнитных структур в обменном приближении [1] или как модель для поля директора для описания упругих свойств жидких кристаллов в одноконстантном приближении [2].

Одномерные и двумерные точные решения $O(3)$–модели исследовались многими авторами. Показано,что в пространстве $(1,1)$ модель интегрируема методом обратной задачи рассеяния [3]. Очень интересный и популярный класс решений в $D = 2$ (инстантоны) был получен в работе [4]. Наконец, в трехмерном пространстве точные решения типа «ежей»

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1.3}$$

A.B. Borisov, On integrability of $O(3)$–model.

© Борисов А.Б. 2021.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема «Квант», номер г.р. АААА-А18-118020190095-4).

Поступила 10 марта 2021 г.

были экспериментально обнаружены и теоретически исследованы в нематических жидких кристаллах, гелии [5] и ферромагнетиках [6].

Статья спланирована следующим образом. Во втором параграфе для решения уравнений $O(3)$–модели используется дифференциальная подстановка, которая приводит эти уравнения к системе из двух уравнений для комплексной функции $S(\mathbf{r})$ и уравнению маятника. Показано, что непосредственное решение этой системы дает все известные ранее решения: двумерные (инстантоны) и трехмерные (структуры типа «ежей») модели. Точное решение системы для поля $S(\mathbf{r})$ предъявлено в третьем параграфе. Оно определяется произвольной функцией от двух переменных и дает общее решение $O(3)$–модели.

2. Дифференциальная подстановка

Для дальнейшего изложения удобно параметризовать единичный вектор $\mathbf{n}$ полями Θ, Φ:

$$\mathbf{n} = (\cos\Phi\sin\Theta, \sin\Phi\sin\Theta, \cos\Theta).$$

Тогда в переменных Θ, Φ уравнения модели (1.1) переходят в систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\sin 2\Theta, \qquad \nabla\left[(\nabla\Phi)^2\sin^2\Theta\right] = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы спиновых и пространственных вращений $SO(3)\times SO(3)$. Такая симметрия позволяет найти широкий класс точных решений. Аналитическое решение уравнения (2.1) возможно лишь в определенных классах решений. Для выделения одного из них нужно обобщить процедуру, предложенную в [7], и положить поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $\Theta(a[x_1, x_2, x_3])$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}, \tag{2.2}$$

$$\Delta a = \Delta\Phi = 0, \quad (\nabla a)^2 = (\nabla\Phi)^2, \quad \nabla a\nabla\Phi = 0 \tag{2.3}$$

следуют уравнения (1.2). Здесь и далее $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}^2$ — трехмерный оператор Лапласа. Для анализа текстур Θ мы используем решение уравнения (2.2) в виде 2π–солитона

$$\Theta = 2\mathrm{arctg}\exp(-a) \tag{2.4}$$

или решетки солитонов

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \mathrm{cn}\left(\frac{a}{k}, k\right), \qquad 0 < k < 1. \tag{2.5}$$

Дифференциальная подстановка (2.3), как увидим далее, приводит к точному решению неинтегрируемой модели (1.1). Перейдем к решению уравнений (2.3). Введем комплексное поле

$$S = a + \mathrm{i}\Phi \tag{2.6}$$

и запишем систему (2.3) в виде системы из двух уравнений для комплексного поля S:

$$(\nabla S)(\nabla S) = 0, \tag{2.7}$$

$$\Delta S = 0. \tag{2.8}$$

Эта система обладает замечательным свойством инвариантности к заменам поля $S \to S' = F(S)$ с произвольной функцией $F(S)$, который мы будем использовать в дальнейшем.

Покажем вначале, что простейшие решения системы (2.7), (2.8) включают все указанные выше известные ранее двумерные и трехмерные решения $O(3)$–модели. Широкий класс решений, найденных в [4] описывается простой формулой

$$w = \mathrm{ctg}\frac{\Theta}{2}\exp[\mathrm{i}\Phi] = U[z], \qquad z = x + \mathrm{i}y, \tag{2.9}$$

где U — аналитическая функция. В двумерном случае уравнения (2.7), (2.8) тождественно удовлетворяются при $S = S(z)$, и связь с полем, согласно (2.4), определяется простым соотношением

$$w = \exp[S]. \tag{2.10}$$

Наиболее просто найти решения непосредственным интегрированием (2.7), (2.8) методом разделения переменных. Тогда в сферической системе координат (R, θ, φ) мы находим семейство решений:

$$S(\theta, \varphi) = F\left(s\left[\mathrm{i}\varphi + \ln \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right]\right), \qquad s = \pm 1, \tag{2.11}$$

где F — произвольная функция. Выражение (2.11) при $F = 1$, $s = 1$ и (2.6) приводят к структуре «ежей» (1.3), а также и к другим типам «ежей» при определенном выборе функции F.

3. Точные решения модели

Обсудим сейчас точные решения уравнений (2.7), (2.8). Из (2.7) сразу следует выражение для поля $S_{,x_3} = \partial_{x_3} S$

$$S_{,x_3} = \sqrt{-S^2_{,x_1} - S^2_{,x_2}}. \tag{3.1}$$

Тогда после подстановки (3.1) уравнение (2.8) принимает простой вид

$$S^2_{,x_1} S_{,x_2,x_2} - 2S_{,x_1,x_2} S_{,x_1} S_{,x_2} + S^2_{,x_2} S_{,x_1,x_1} = 0. \tag{3.2}$$

Это уравнение принадлежит к обширному классу уравнений Монжа–Ампера [8], [9]. Для его решения используем следующую процедуру. Введем новые переменные

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{S_{,x_1}}{\sqrt{S^2_{,x_1} + S^2_{,x_2}}}, \qquad \beta(x_1, x_2, x_3) = \frac{S_{,x_2}}{\sqrt{S^2_{,x_1} + S^2_{,x_2}}}. \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что уравнение

$$\alpha_{,x_1} + \beta_{,x_2} = 0 \tag{3.4}$$

эквивалентно (3.2). Поля α, β связаны соотношением

$$\alpha^2(x_1, x_2, x_3) + \beta^2(x_1, x_2, x_3) = 1.$$

Поэтому после параметризации полей

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sin[B(x_1, x_2, x_3)], \qquad \beta(x_1, x_2, x_3) = \cos[B(x_1, x_2, x_3)] \tag{3.5}$$

и подстановки их в (3.1), (3.3) мы получаем уравнения

$$S_{,x_1} = S_{,x_2}\mathrm{tg}[B], \qquad S_{,x_3} = -\mathrm{i}S_{,x_2}\sec[B]. \tag{3.6}$$

Условие совместности системы (3.6) приводит к замкнутому уравнению для поля B

$$B_{,x_3} + \mathrm{i}(\cos[B]B_{,x_2} + \sin[B]B_{,x_1}) = 0. \tag{3.7}$$

Из теории нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для уравнения (3.7) следует, что поле B определяется неявным уравнением

$$G[H_1, H_2, H_3] = 0 \tag{3.8}$$

с произвольной функцией G, где величины H_1, H_2, H_3 есть интегралы характеристической системы уравнений для координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3(t)=1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)=\mathrm{i}\sin B(x_1,x_2,x_3),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t)=\mathrm{i}\cos B(x_1,x_2,x_3), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x_1,x_2,x_3)=0.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Интегралы имеют вид

$$\begin{gathered}H_1=-\mathrm{i}x_3\sin B(x_1,x_2,x_3)+x_1,\\ H_2=-\mathrm{i}x_3\cos B(x_1,x_2,x_3)+x_2,\\ H_3=B(x_1,x_2,x_3).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Помимо (3.7) поля $B(x_1,x_2,x_3)$ должны также удовлетворять уравнениям (3.4), (3.5):

$$B_{,x_1}-\mathrm{tg}[B]B_{,x_2}=0. \tag{3.11}$$

Подставляя в это уравнение производные поля B

$$\begin{gathered}B_{,x_1}=-\mathrm{i}\frac{G_{,H_1}}{U}, \qquad B_{,x_2}=-\mathrm{i}\frac{G_{,H_2}}{U},\\ B_{,x_3}=-\frac{G_{,H_1}\sin H_3+G_{,H_2}\cos H_3}{U},\\ U=x_3(G_{,H_1}\cos H_3-G_{,H_2}\sin H_3)+\mathrm{i}G_{,H_3},\end{gathered} \tag{3.12}$$

найденные из (3.8), (3.10), мы получаем дополнительное ограничение на уравнение (3.8):

$$G_{,H_1}-G_{,H_2}\mathrm{tg}H_3=0. \tag{3.13}$$

Отсюда следует, что решения для поля B определяются неявным уравнением

$$G[H_1\sin H_3+H_2\cos H_3, H_3]=0. \tag{3.14}$$

Неоднозначность и сингулярность в общем случае решений (3.14) наиболее интересны при исследовании сингулярных дефектов в конденсированных средах.

Отметим далее важное обстоятельство. Из (3.7), (3.9) и (3.1), (3.6) сразу следуют соотношения

$$B_{,x_1}S_{,x_2}-B_{,x_2}S_{,x_1}=0, \qquad B_{,x_3}S_{,x_2}-B_{,x_2}S_{,x_3}=0. \tag{3.15}$$

Поэтому общее решение уравнений (2.7), (2.8) определяется формулой (3.14) и произвольной функцией F:

$$S(x_1,x_2,x_3)=F(B(x_1,x_2,x_3)). \tag{3.16}$$

Действительно после подстановки (3.16) в уравнения (2.7), (2.8) мы получаем систему уравнений

$$(\nabla B)(\nabla B)=0, \qquad \Delta B=0, \tag{3.17}$$

в справедливости которой нетрудно убедиться вычислением производных неявной функции (3.14).

Благодарности

Автор признателен за приглашение опубликовать статью в номере журнала, посвященному памяти А.Б. Шабата и Р.И. Ямилова. С Алексеем Борисовичем меня связывала многолетняя дружба. А.Б. Шабат был незаурядной личностью в науке и жизни. Не только его работы оказали определяющее влияние на мою научную деятельность в последние три десятилетия, но и его поддержка, а также советы всегда были полезны и неоценимы для меня.

Автор благодарен Д.В. Долгих за обсуждение, полезные замечания и помощь в подготовке рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Борисов, В.В. Киселев. *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т.2.* Екатеринбург: УрО РАН. 2011.
2. П. Де Жен. *Жидкие кристаллы.* М.: Мир. 1977.
3. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* М.: Наука. 1980.
4. А.А. Белавин, А.М. Поляков. *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика* // Письма в ЖЭТФ. **22**:10, 500–506 (1975).
5. М.В. Курик, О.Д. Лаврентович. *Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования* // УФН. **154**:3, 381–431 (1988).
6. A.P. Malozemoff, J.C. Slonczewski. *Magnetic DomainWalls in Bubble Materials.* New York: Academic Press. 1979.
7. А.Б. Борисов. *Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике* // Письма ЖЭТФ. **76**:2, 95–98 (2002).
8. Р. Курант. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир. 1964.
9. Э. Гурса. *Курс математического анализа, том 3, часть 1.* М.-Л.: ГТТИ. 1933.

Александр Борисович Борисов,
Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 18,
620108, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: borisov@imp.uran.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 11-17.

УДК 517.587, 517.929

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА И ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

Б.С. БЫЧКОВ, Г.Б. ШАБАТ

Аннотация. Мы указываем направления возможных обобщений найденных ранее связей между многочленами Чебышева и числами Каталана, возникающими при изучении коммутирующих разностных операторов. Эти обобщения в основном связаны с идеями, высказанными Н.-Х. Абелем в публикации 1826 года, которые излагались на современном языке многими авторами. В качестве обобщений многочленов Чебышева предлагается рассмотреть многочлены ровно с двумя критическими значениями, подробно изученными в так называемой теории детских рисунков. Числа Каталана занимают начальный столбец в таблице чисел Харера–Цагира, связанных с распределением по родам ориентируемых склеек многоугольников с четным числом сторон. Коммутирующие разностные операторы неявно содержатся в теории Абеля, изучавшего квазиэллиптические интегралы (эллиптические интегралы 3-го рода, берущиеся в логарифмах); в настоящей работе формулируются предположения о связи основной теоремы Абеля с коммутирующими полубесконечными матрицами. Работа содержит вычисления, подтверждающие намеченные гипотетические связи.

Ключевые слова: многочлены Чебышева, числа Каталана, числа Харера-Цагира, полиномиальные уравнения Пелля, детские рисунки.

Mathematics Subject Classification: 39A70, 33C75

1. Введение

А.Б. Шабат, считая себя прежде всего специалистом по теории дифференциальных уравнений, обладал широким математическим кругозором. Он умел видеть неожиданные связи между отстоящими далеко друг от друга разделами математики, но предпочитал фиксировать свои идеи не построением общих теорий, а рассмотрением конкретных примеров.

Его последней прижизненной публикацией была совместная с одним из соавторов настоящей заметки работа [7], в которой устанавливались связи между коммутирующими полубесконечными матрицами, многочленами Чебышева и числами Каталана. Мы не сомневаемся в том, что эти связи допускают разнообразные обобщения, и уверены, что, если бы А.Б. Шабат жил дольше, он нашел бы эти обобщения.

В настоящей работе мы намечаем одно из направлений таких обобщений.

2. Многочлены Чебышева и числа Каталана

Напомним кратко упомянутую связь из работы [7].

B.S. Bychkov, G.B. Shabat, On generalizations of Chebyshev polynomials and Catalan numbers.

© Бычков Б.С., Шабат Г.Б. 2021.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Исследование Г.Б. Шабата выполнено при поддержке фонда Саймонса.

Поступила 21 апреля 2021 г.

Многочлены Чебышева[1] определяются многими способами, из которых мы приведем два: замкнутую формулу

$$\mathrm{T}_n(u) = \cos(n \arccos u) \tag{2.1}$$

и рекурренцию

$$\mathrm{T}_{n+1}(u) = 2u\mathrm{T}_n(u) - \mathrm{T}_{n-1}(u) \tag{2.2}$$

с начальными условиями $\mathrm{T}_0(u) = 1$ и $\mathrm{T}_1(u) = u$. См., например, [8].

Числа Каталана также определяются многими способами, см., например, [11].

Мы опускаем несколько комбинаторных интерпретаций чисел Каталана (к сожалению, комбинаторика вообще отсутствует в настоящей заметке) и определяем числа Каталана $c_0, c_1, \ldots$ с помощью производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u}. \tag{2.3}$$

Краткая формулировка одного из основных результатов работы [7] заключается в том, что *отношения соседних многочленов Чебышева близки к обрубленной производящей функции для чисел Каталана.* Например,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{T}_8\left(\frac{1}{2M}\right)}{\mathrm{T}_7\left(\frac{1}{2M}\right)} =& \frac{1}{M} - M - M^3 - 2M^5 - 5M^7 - 14M^9 - 42M^{11} - \ldots \\ =& \frac{1}{M} - c_0M - c_1M^3 - c_2M^5 - c_3M^7 - c_4M^9 - 4c_5M^{11} - \ldots\end{aligned} \tag{2.4}$$

Прямых обобщений этих равенств мы на сегодняшний день не знаем, однако полагаем, что они возможны. Однако объекты, фигурирующие и в левой, и в правой части равенств (2.4), естественные обобщения допускают, и мы расскажем о них в последующих разделах. Затем мы упомянем теорию, в рамках которой надеемся найти более концептуальные объяснения происходящего.

А.Б. Шабат, видимо, чувствовал общематематическую перспективу, объясняющую природу обсуждаемых связей. Наша задача – рано или поздно ее восстановить.

3. Обобщенные многочлены Чебышева

Одно из свойств обычных многочленов Чебышева T_n — иметь *всего два конечных критических значения*; это свойство очевидно, если воспользоваться определением (2.1). Оно положено в основу одного из обобщений, которые мы имеем в виду.

Произвольный многочлен $P \in \mathbb{C}[u]$ степени не меньше двух называется *обобщенным многочленом Чебышева*[2], если существуют такие числа $a, b \in \mathbb{C}$, что

$$[P'(u) = 0] \Longrightarrow [P(u) \in \{a, b\}].$$

Нетрудно доказать, что в этом случае прообраз $P^{-1\circ}[a, b]$ отрезка, соединяющего критические значения – дерево на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Более того, указанная процедура сопоставления обобщенному многочлену Чебышева плоского дерева устанавливает *взаимно однозначное соответствие между классами подобия обобщенных многочленов Чебышева* (то есть орбитами действия квадрата группы $\mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}$ на многочленах линейными заменами и в аргументе, и в образе) *и изотопическими классами плоских деревьев*; см. [6].

Это соответствие дает неограниченный запас обобщенных многочленов Чебышева (хотя нахождение конкретного многочлена по соответствующему ему плоскому дереву — нетривиальная вычислительная задача). Обычные многочлены Чебышева соответствуют *цепочкам*.

[1] *первого рода*, упоминание о чем мы опускаем.

[2] или *многочленом Шабата*, причем имеется в виду не А.Б. Шабат, а один из авторов настоящей заметки.

Нам понадобится лишь одно свойство обобщенных многочленов Чебышева.

Пусть P — обобщенный многочлен Чебышева со старшим коэффициентом 1 и с критическими значениями $\{a, b\} = \{\pm 1\}$ (в каждом классе подобия можно выбрать такого представителя). Вершины дерева, соответствующие многочлену P, являются прообразами критических значений ± 1 и распадаются в несвязное объединение

$$V_P = V_P^+ \coprod V_P^-, \tag{3.1}$$

где

$$V_P^{\pm} = \{u \in \mathbb{C} \mid P(u) = \pm 1\}. \tag{3.2}$$

Тогда имеют место разложения на множители

$$P \pm 1 = \prod_{\alpha \in V_P^{\pm}} (u - \alpha)^{v_\alpha}, \tag{3.3}$$

где v_α — *валентность* вершины α дерева, соответствующего многочлену P.

Обозначим еще

$$P_{\mathrm{odd}} := \prod_{\alpha \in V_P : v_\alpha \in 2\mathbb{N}+1} (u - \alpha)$$

многочлен, простыми корнями которого являются вершины нечетной валентности дерева, соответствующего многочлену P.

Отметим, что $\deg P_{\mathrm{odd}} \geq 2$: у любого дерева есть по крайней мере две вершины нечетной валентности, причем их ровно две тогда и только тогда, когда дерево – цепочка (и соответствующий многочлен является обычным многочленом Чебышева).

Теорема 3.1. *Пусть P – обобщенный многочлен Чебышева. Тогда найдутся такие многочлены $X, Y \in \mathbb{C}[u]$, что*

$$X^2 - P_{odd} Y^2 = 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Перемножив приведенные выше равенства (3.3), получим

$$P^2 - 1 = \prod_{\alpha \in V_P} (u - \alpha)^{v_\alpha}. \tag{3.5}$$

Для получения (3.4) остается положить $X := P$ и выделить полный квадрат в правой части. □

Утверждение доказанной теоремы фактически означает, что любой обобщенный многочлен Чебышева дает коэффициент *полиномиального уравнения Пелля*, имеющего нетривиальные решения.

4. Квазиэллиптические интегралы

В работе Н.-Х. Абеля [1] рассматривался вопрос о том, какие интегралы вида

$$\int \frac{\rho \, \mathrm{d}u}{\sqrt{R}},$$

где ρ и R – многочлены над $\mathbb{C}$, берутся в элементарных функциях. Точнее, выяснялось, для каких многочленов R четной степени (по очевидным причинам можно ограничиться многочленами без кратных корней) существует многочлен ρ с указанным свойством.

Будем называть многочлены R, удовлетворяющие обсуждаемому условию, *абелевыми*.

В работе [1] приведены следующие свойства многочлена R, равносильные абелевости.

(1) *Существуют многочлены X и Y положительных степеней, удовлетворяющие полиномиальному уравнению Пелля*

$$X^2 - RY^2 = 1.$$

(2) Коэффициенты $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}[u]$ разложения в цепную дробь

$$\sqrt{R} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

периодичны.

На современном математическом языке условие (1) можно переформулировать следующим равносильным образом.

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую, гладкая аффинная модель $\ddot{\mathbf{X}}_R$ которой задается уравнением:

$$v^2 = R(u).$$

Эта модель имеет вид

$$\ddot{\mathbf{X}}_R = \mathbf{X}_R \setminus \{\underline{\infty}_\pm\},$$

где $\mathbf{X}_R$ – гладкая проективная модель (если $R = u^{2g+2} + \dots$, то в проколотых окрестностях точек $\underline{\infty}_\pm$ имеет место асимптотическое равенство $v \approx \pm u^{g+1}$). Равносильное (1) условие заключается в том, что

(1)'. $\underline{\infty}_+ - \underline{\infty}_- \in \operatorname{tors}(\operatorname{Pic}\mathbf{X})$, *разность бесконечных точек имеет конечный порядок.*

Обычные многочлены Чебышева соответствуют «вырожденному» случаю кривой $\mathbf{X}$ рода 0, абелеву многочлену $R = u^2 - 1$, стандартным интегралам $\int \frac{\rho\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}$, решениям (при любом натуральном n) полиномиального уравнения Пелля вида $X = \mathrm{T}_n$, $Y = \mathrm{U}_{n-1}$ (многочлены Чебышева *второго рода*) и разложению в цепную дробь

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2-1} =& u + \left(\sqrt{u^2-1} - u\right) = u + \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}}\\ =& u + \frac{1}{2u + \left(\sqrt{u^2-1} - u\right)} = u + \cfrac{1}{2u + \frac{1}{2u + \frac{1}{2u + \dots}}}.\end{aligned}$$

Приведем нетривиальный пример кривой рода 1. Она задается уравнением

$$v^2 = u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1 =: R,$$

а парой решений уравнения Абеля-Пелля $X^2 - Ry^2 = 1$ являются многочлены

$$X = u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1, \qquad Y = u.$$

Разложение в периодическую цепную дробь имеет вид

$$\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1} = u^2 + \frac{u}{2} + \cfrac{2}{2u + \frac{1}{u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2u + \frac{1}{u^2 + \frac{u}{2} + \dots}}}},$$

а квазиэллиптический интеграл –

$$\int \frac{(6u+2)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}} = \log \frac{u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1 + u\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}}{u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1 - u\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}}.$$

В 19-м веке такие интегралы высоко ценились и нахождение какого-нибудь одного было достаточной причиной публикации. Из результатов предыдущего раздела следует, что любое плоское дерево позволяет построить квазиэллиптический интеграл.

Мы полагаем, что обобщенные многочлены Чебышева — естественный кандидат для обобщений результатов работы [7]. Связанные с ними цепные дроби интерпретируются в рамках разностных операторов 2-го порядка (см., например, [10]), также фигурирующих в [7].

5. Числа Харера-Цагира

Эти числа $\varepsilon_g(n)$ были введены в работе [2]; каждое такое число определяется как *количество склеек* $(2n)$*-угольника в ориентируемую поверхность рода* g. Они удовлетворяют различным рекурренциям, объясняемым производящей функцией

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y =: 1 + 2xy + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{g=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\frac{\varepsilon_g(n)}{(2n-1)!!}x^{n+1}y^{n+1-2g}$$

(отметим, что коэффициент $\frac{\varepsilon_g(n)}{(2n-1)!!}$ можно интерпретировать как *вероятность того, что случайная ориентированная склейка* $(2n)$*-угольника будет иметь род* g) — см., например, [5].

Числа Каталана образуют нулевой столбец таблицы Харера-Цагира,

$$c_n \equiv \varepsilon_0(n).$$

Другие столбы таблицы ведут себя похожим образом. Например, столбец рода 1 удовлетворяет рекурсии

$$\varepsilon_{1,n+1} = \frac{4n+2}{n-1}\varepsilon_{1,n},$$

близкой к рекурсии

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n$$

для чисел Каталана. Производящая функция

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{1,n}u^n = \frac{1}{(1-4x)^{\frac{5}{2}}}$$

также близка к определению (2.3).

Отмеченные параллели указывают на то, то числа Харера-Цагира – естественные кандидаты для обобщений результатов из [7]. Разумеется, хотелось бы найти эти обобщения не только на формульном уровне, но и на концептуальном – на такую возможность указывает роль этих чисел в [2].

6. О коммутирующих разностных операторах

Другим основным результатом работы [7] является естественная связь многочленов Чебышева и элементов некоторых коммутирующих разностных операторов. А именно, рассмотрим задачу коммутирования трехдиагональной матрицы A с вандермондовой матрицей Λ

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & b_{n-1} & a_n & b_n & 0\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}, \quad \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \lambda^n & \lambda^{2n} & \dots & \lambda^{n^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ свободный параметр и полубесконечная матрица Λ считается данной. Элементы искомой трехдиагональной матрицы A предполагаются рациональными функциями λ, удовлетворяющими условию «вещественности».

Оказывается, при подходящих начальных условиях $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ матрицы A и Λ коммутируют, тогда и только тогда, когда элементы матрицы A являются рациональными функциями от λ с полюсами в точках 0 и -1, и функции $\varphi_n(\lambda) = 1 - a_{n+1}(\lambda)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (ср. (2.2))

$$\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} = \mu\varphi_n + 2, \quad \varphi_n = \frac{1}{\lambda^{n-1}}\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)^2 = 1 - a_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{6.2}$$

где $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda}$.

Классическая работа ван Мербеке-Мамфорда [4], содержащая ссылку на заметку В.Е. Захарова и А.Б. Шабата [9], связывает много идей и конструкций из разных областей математики. Помимо прочего, она указывает на тесную параллель между коммутативными кольцами разностных и дифференциальных операторов; в обоих случаях еще в 70-х годах прошлого века была прояснена связь между алгеброй (структурой этих колец), геометрией (динамикой прямолинейного движения по якобианам спектров этих колец) и дифференциальными уравнениями (явными решениями этих уравнений в тета-функциях). Сам предмет этой работы говорит о пересечении с [7] – например, всюду фигурируют трехдиагональные (полу)бесконечные матрицы, среди которых выделяются коммутирующие.

Геометрическая теория коммутирующих разностных операторов интенсивно развивалась в последующие десятилетия в нескольких интересных направлениях – см., например, [3].

Отметим, однако, что теория Абеля, опубликованная в 1826 году, в этих работах не всегда цитируется и, возможно, некоторые связи еще только предстоит осознать.

7. Заключение

Мы очень кратко наметили некоторые направления развития идей А.Б. Шабата, выработанные им в последние годы его жизни и работы (для него эти понятия совпадали). Как близкие ему люди, мы видим свою задачу в том, чтобы эти идеи не были забыты, а, наоборот, прояснялись, уточнялись и углублялись; надеемся внести посильный вклад.

Мы будем счастливы, если настоящая заметка вызовет у кого-нибудь из наших коллег — друзей и учеников А.Б. Шабата или новых людей — желание участвовать в этой работе.

Благодарности

Авторы благодарны С.В. Смирнову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N.H. Abel. *Sur l'integration de la formule differentielle* $\frac{\rho\,\mathrm{d}z}{\sqrt{R}}$, *R et ρ etant des fonctions entieres* // J. Reine Angew. Math. **1**, 185–221 (1826).
2. J. Harer, D. Zagier. *The Euler characteristic of the moduli space of curves* // Invent. Math. **85**, 457–485 (1986).
3. A. Izosimov. *Pentagrams, inscribed polygons, and Prym varieties* // El. Res. An. in Math. Sc. **23**, 25–40 (2016).
4. P. Van Moerbeke, D. Mumford. *The spectrum of difference operators and algebraic curves* // Acta Math. **143**, 93–154 (1979).
5. B.G. Pittel. *Another Proof of the Harer-Zagier Formula* // Electron. J. Comb. **23**:1 (2016).
6. G. Shabat, A. Zvonkin. *Plane trees and algebraic numbers* // Contemporary Math. **178**, 233–275 (1994).
7. А.Е. Артисевич, Б.С. Бычков, А.Б. Шабат. *Многочлены Чебышева, числа Каталана и трехдиагональные матрицы* // ТМФ. **204**:1, 3–9 (2020).
8. Н. Васильев, А. Зелевинский. *Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения* // Квант. 1, 12–19 (1982).
9. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния* // Функц. анализ. **8**:3, 54–56 (1974).
10. А.Я. Хинчин. *Цепные дроби.* М.: Физматлит. 1960.
11. Г.Б. Шабат. *Несколько взглядов на числа Каталана.* В сб. Элементы математики в задачах под ред. А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б. Скопенкова. М.: МЦНМО. 2018.

Борис Сергеевич Бычков,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
ул. Усачева, 6,
119048, г. Москва, Россия
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14,
150003, г. Ярославль, Россия
E-mail: bbychkov@hse.ru

Георгий Борисович Шабат,
Российский государственный гуманитарный университет,
Миусская площадь, 6,
125993, г. Москва, Россия
E-mail: george.shabat@gmail.com

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 18-24.

УДК 517.958

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПОЛУДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ЦИЦЕЙКИ

Р.Н. ГАРИФУЛЛИН

Аннотация. В работе рассматривается полудискретная версия уравнения Цицейки

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} + (e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}},$$

найденная в недавней статье [R.N. Garifullin and I.T. Habibullin 2021 J. Phys. A: Math. Theor. 54 205201]. Было показано, что это уравнение имеет высшие симметрии по дискретному и непрерывному направлению. Эти высшие симметрии являются уравнениями типа Савады-Котеры и дискретной Савады-Котеры. В этой работе мы строим пару Лакса для этого уравнения и его высших симметрий. Найденная пара Лакса выписывается в терминах матриц порядка 3×3 и свидетельствует об интегрируемости найденных уравнений. Для решения этой задачи используется известная связь одной из высших симметрий с хорошо исследованным уравнением Каупа–Купершмидта. Найденные пары Лакса помогут в дальнейших исследованиях этого уравнения – нахождение его законов сохранения, операторов рекурсии и широких классов решений. Кроме того выписаны два представления Лакса в виде скалярных операторов. Первое скалярное представление выписывается по степеням оператора дифференцирования по непрерывной переменной x, второе – по степеням оператора сдвига по дискретной переменной n.

Ключевые слова: интегрируемость, пары Лакса, высшие симметрии, уравнение Цицейки.

Mathematics Subject Classification: 39A14, 39A10, 35L10

1. Введение

В недавней статье [1] было найдено дифференциально-разностное уравнение

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + \lambda_1(e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \lambda_2\sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}}. \tag{1.1}$$

Здесь неизвестная функция $u_n(x)$ зависит от одной целочисленной переменной $n \in \mathbb{Z}$ и одной непрерывной x; λ_1, λ_2 – ненулевые параметры, без ограничения общности их можно считать равными 1. Через $u_{n,x}$ здесь и ниже обозначаются производные по переменной x. Аналогичным образом будем обозначать производные по t и τ: $u_{n,t},\ u_{n,\tau}$.

Уравнение (1.1) в континуальном пределе, очевидно, переходит в знаменитое уравнение Цицейки [2]

$$U_{xy} = ae^{-2U} + be^{U},$$

которое было переоткрыто в работе А.В. Жибера и А.Б. Шабата [3]. Уравнение (1.1) является представителем класса уравнений вида

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n, x). \tag{1.2}$$

R.N. Garifullin, On integrability of semi-discrete Tzizeica equation.

© Гарифуллин Р.Н. 2021.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/.

Поступила 25 апреля 2021 г.

Интегрируемые уравнения такого типа возникали как преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений в частных производных эволюционного типа. Наиболее известным представителем этого класса является одевающая цепочка, подробное исследование которой проведено в статье А.П. Веселова и А.Б. Шабата [4]

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + u_{n+1}^2 - u_n^2, \tag{1.3}$$

которая возникла как преобразование Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза:

$$u_{n,t} = u_{n,xxx} - 6u_n^2 u_{n,x}. \tag{1.4}$$

С другой стороны уравнение (1.4) можно рассматривать как высшую симметрию уравнения (1.3). По дискретному направлению высшая симметрия уравнения (1.3) имеет вид

$$u_{n,\tau} = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{1.5}$$

и является известным дифференциально-разностным уравнением [5], [6]. В статье Р.И. Ямилова [7] был приведен ряд примеров троек уравнений типа (1.3)–(1.5).

Рассматриваемое в данной статье уравнение (1.1) является первым примером, у которого высшие симметрии по обоим направлениям имею не третий, а пятый порядок:

$$\begin{aligned}\partial_t u_0 =& u_{0,5} + 5u_{0,3}(u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_2^2 e^{2u} - \lambda_1^2 e^{-4u}) - 5u_{0,2}^2 u_{0,1}\\ &- 15u_{0,2}u_{0,1}(\lambda_2^2 e^{2u} - 4\lambda_1^2 e^{-4u}) + u_{0,1}^5 - 90\lambda_1^2 u_{0,1}^3 e^{-4u} + 5u_{0,1}(\lambda_2^2 e^{2u} + \lambda_1^2 e^{-4u})^2,\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\partial_\tau u &= \Big((v^2-1)^2 - 4v_{-1}^2 T^{-1}\Big)\frac{(v_1^2+1)(v_{-1}^2+1)}{(v^2(v_{-1}+1)^2 + (v_{-1}-1)^2)(v_1(v+1)^2 + (v-1)^2)},\\ v_n &= \sqrt{1 + e^{2(u_n - u_{n+1})}} + e^{u_n - u_{n+1}},\end{aligned} \tag{1.7}$$

где T – оператор сдвига по дискретной переменной n. Здесь и ниже используются обозначения $u = u_n$, $u_k = u_{n+k}$, $v_k = v_{n+k}$, $u_{k,m} = \frac{d^m u_{n+k}}{dx^m}$. Под порядком эволюционного уравнения понимается количество производных по пространственной переменной или количество сдвигов u_{n+i} в правой части.

Уравнение (1.6) было известно ранее [8], а уравнения (1.1) и (1.7) были впервые приведены в статье [1]. В этой работе мы находим пары Лакса для всех этих трех уравнений. Пары Лакса для интегрируемых уравнений являются одним из самых важных атрибутов. Во-первых, их наличие является наиболее признанным критерием интегрируемости. Во-вторых, пары Лакса помогают в исследованиях уравнений – нахождение их законов сохранения, высших симметрий, операторов рекурсии и широких классов решений.

2. Нахождение пар Лакса

Найти сразу пару Лакса для уравнения (1.1) представляется сложной задачей. Для ее решения надо сразу искать два неизвестных линейных оператора или две матрицы, для которых априори не известна структура зависимостей от переменных. Поэтому в начале предлагается найти пару Лакса для известного уравнения (1.6), для которого, более того, известны преобразования типа Миуры к хорошо исследованному уравнению.

2.1. Пара Лакса для уравнения (1.6)**.** Для решения этой задачи мы используем известную связь [8]

$$w = -u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u} - \lambda_2^2 e^{2u} \tag{2.1}$$

между уравнением (1.6) и уравнением Каупа–Купершмидта [9]

$$w_t = w_5 + 10ww_3 + 25w_x w_2 + 20w^2 w_x. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет представление Лакса [9], [10]

$$\widetilde{L}_t = [\widetilde{L}, \widetilde{A}], \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{L} = \partial^3 + 2w\partial + w_x, \\ &\widetilde{A} = 9(\widetilde{L}^{5/3})_+ = 9\partial^5 + 30w\partial^3 + 45w_x\partial^2 + 5(4w^2 + 7w_2)\partial + 10(w_3 + 2ww_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь ∂ обозначает оператор дифференцирования по x, обозначение $()_+$ определяет положительную часть формального ряда по степеням оператора ∂.

Если мы в представление Лакса (2.4) подставим замену (2.1), то полученные операторы будут конечно же совместны на решениях (1.6), но из их условия совместности (2.3) не будет следовать уравнение (1.6), а будет следовать некоторое дифференциальное следствие этого уравнения. Для получения настоящего представления Лакса уравнения (1.6) нужно заметить, что оператор $\widetilde{L}$ в переменной u допускает следующую факторизацию:

$$\widetilde{L} = \left(\partial - u_{0,1} + \lambda_1 e^{-2u}\right)\left(\partial^2 + (u_{0,1} - \lambda_1 e^{-2u})\partial + u_{0,2} + 2\lambda_1 u_{0,1} e^{-2u} - \lambda_2^2 e^{2u}\right) + \lambda_1\lambda_2^2.$$

Тогда в качестве оператора L для уравнения (1.6) можно использовать оператор

$$L = \left(\partial^2 + (u_{0,1} - \lambda_1 e^{-2u})\partial + u_{0,2} + 2\lambda_1 u_{0,1} e^{-2u} - \lambda_2^2 e^{2u}\right)\left(\partial - u_{0,1} + \lambda_1 e^{-2u}\right) + \lambda_1\lambda_2^2. \tag{2.5}$$

Оператор A приобретает вид:

$$\begin{aligned} A =& 9(L^{5/3})_+ = 9\partial^5 - 15(u_{0,2} + u_{0,1}^2 + \lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u})\partial^3 - 15(2u_{0,3} + 4u_{0,2}u_{0,1} \\ &- 8\lambda_1^2 u_{0,1} e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u} u_{0,1})\partial^2 - 5\big(5u_{0,4} + 10u_{0,3}u_{0,1} - 2u_{0,2}u_{0,1}^2 + 9u_{0,2}^2 - u_{0,1}^4 \\ &- (\lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u})^2 + 2\lambda^2(39u_{0,2} - 11u_{0,1}^2)e^{-4u} - u_{0,2}\lambda_2^2 e^{2u}\big)\partial - 10\big(u_{0,5} + 2u_{0,1}u_{0,4} \\ &+ 5u_{0,2}u_{0,3} - u_{0,1}^2 u_{0,3} - 2u_{0,1}u_{0,2}^2 - 2u_{0,1}^3 u_{0,2} - \lambda_2^2 e^{2u}(2u_{0,3} + 7u_{0,2}u_{0,1} + 3u_{0,1}^3) \\ &- 5\lambda_1^2 e^{-4u}(u_{0,3} - 10u_{0,2}u_{0,1} + 12u_{0,1}^3) + u_{0,1}(4\lambda_1^4 e^{-8u} + 5\lambda_1^2\lambda_2^2 e^{-2u} + \lambda_2^4 e^{4u})\big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.6) *эквивалентно представлению Лакса*

$$L_t = [L, A], \tag{2.7}$$

где операторы L и A определены выражениями (2.5) *и* (2.6).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что на решениях (1.6) уравнение (2.7) выполняется.

Для проверки обратного утверждения заметим, что коэффициенты

$$l_1 = -u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u}$$

и l_0 оператора L при соответствующих степенях оператора ∂ связаны соотношением:

$$l_0 = \partial l_1 + 3u_{0,1}\lambda_2^2 e^{2u}.$$

Поэтому из (2.7) находятся выражения для $\partial_t(l_1)$ и $\partial_t(u_{0,1}e^{2u})$. Комбинируя их, можно однозначно выразить u_t, получив уравнение (1.6). □

2.2. Пара Лакса для уравнения (1.1)**.** Уравнение (1.1) должно иметь представление Лакса

$$(TL)M - ML = 0, \tag{2.8}$$

с некоторым оператором M, где T – оператор сдвига по дискретной переменной n. Однако, нам априори не известен ни способ нахождения оператора M, ни его порядок и структура зависимости его коэффициентов. Поэтому вместо поиска этого оператора предлагается перейти к матричной форме записи операторов L и A, для которых понятно как искать матричную запись оператора M. Для этого вводится скалярная функция P и спектральный параметр λ и выписываются две линейные задачи

$$LP = \lambda P, \quad P_t + AP = 0, \tag{2.9}$$

условие совместности которых эквивалентно уравнению (1.6). Эти две задачи можно переписать в матричном виде

$$\frac{dV}{dx} = \mathcal{L}V, \quad \frac{dV}{dt} = \mathcal{A}V. \tag{2.10}$$

Здесь V – некоторая вектор-функция, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ – некоторые матрицы. Оператор L имеет третий порядок, поэтому матрицы должны иметь размер 3×3. Выбирая вектор-функцию V, можно найти матрицы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$, соответствующие скалярным операторам L и A. Матрица $\mathcal{L}$, соответствующая оператору L, имеет наиболее простой вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^{-2u} & 0 & -e^u \\ 0 & \lambda_1 e^{-2u} & e^u \\ \frac{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}e^u & \frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}e^u & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

для вектор-функции:

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 P - e^{2u}P_x \\ \lambda_1 P + e^{2u}P_x \\ e^u P_{xx} + 2u_{0,1}e^u P_x - \lambda_1^2 e^{-3u}P \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{A}$, соответствующая оператору A, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \frac{9\lambda(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1} & \mathcal{A}_{13} \\ -\frac{9\lambda(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1} & -\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_{11} =& \frac{(3\lambda + 2\lambda_1\lambda_2^2)(3\lambda - \lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1}e^{2u} - 3\lambda(u_{0,2} + u_{0,1}^2) - \lambda_1^2(3\lambda + 2\lambda_1\lambda_2^2)e^{-4u} \\
&+ \lambda_1(2u_{0,4} + 4u_{0,3}u_{0,1} + 3u_{0,2}^2 - 2u_{0,2}u_{0,1}^2 - u_{0,1}^4)e^{-2u} - 10\lambda_1^3(u_{0,2} - 3u_{0,1}^2)e^{-6u} \\
&- \lambda_1\lambda_2^2(7u_{0,2} + 12u_{0,1}^2) - \lambda_1^5 e^{-10u}, \\
\mathcal{A}_{13} =& -((9\lambda + 12\lambda_1\lambda_2^2)u_{0,1} + u_{0,4} - u_{0,3}u_{0,1} + 3u_{0,2}^2 - 4u_{0,2}u_{0,1}^2 + u_{0,1}^4)e^u \\
&- \lambda_1(9\lambda - 3u_{0,3} - 6u_{0,2}u_{0,1} + 2\lambda_1\lambda_2^2)e^{-u} + 2\lambda_1^2(u_{0,2} - 15u_{0,1}^2)e^{-3u} \\
&- 12\lambda_1^3 u_{0,1}e^{-5u} - \lambda_1^4 e^{-7u} + 5\lambda_2^2 u_{0,2}e^{3u} - \lambda_2^2 e^{5u}, \\
\mathcal{A}_{23} =& -\mathcal{A}_{13} + 6\lambda_1((u_{0,3} + 2u_{0,2}u_{0,1} - 3\lambda)e^{-u} - 4u_{0,1}(\lambda_1^2 e^{-5u} + \lambda_2^2 e^u)), \\
\mathcal{A}_{31} =& \frac{\lambda - \lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}(\mathcal{A}_{23} + 18\lambda(\lambda_1 e^{-u} - u_{0,1}e^u)), \\
\mathcal{A}_{32} =& -\frac{\lambda + \lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}(\mathcal{A}_{13} + 18\lambda(\lambda_1 e^{-u} + u_{0,1}e^u)), \\
\mathcal{A}_{33} =& 3\lambda(2u_{0,2} + 2u_{0,1}^2 + 2\lambda_1^2 e^{-4u} - \lambda_2^2 e^{2u}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Условие совместности матричных линейных задач (2.10)

$$\mathcal{L}_t - \mathcal{A}_x + [L, A] = 0$$

эквивалентно уравнению (1.6).

Теперь можно перейти к построению пары Лакса для уравнения (1.1). Для этого у нас уже есть одна линейная задача по переменной x, см. (2.10), и осталось найти матрицу $\mathcal{M}$, определяющую сдвиг вектор-функции V:

$$V_{n+1} = \mathcal{M}V_n. \tag{2.13}$$

Поскольку матрица $\mathcal{L}$ зависит только от $u_{n,0}$, то матрица $\mathcal{M}$ должна зависеть от переменных $u_{n,0},\ u_{n+1,0}$. Условие совместности имеет вид:

$$\mathcal{M}_x + \mathcal{M}\mathcal{L} - (T\mathcal{L})\mathcal{M} = 0. \tag{2.14}$$

Оно должно выполняться в силу уравнения (1.1). Матрица $\mathcal{M}$ находится из этого требования и имеет вид:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)(e^{u_1-u}+e^{u-u_1}) & (\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)e^{u-u_1} & 2e^{u-u_1}\lambda_1\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1} \\ -(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)e^{u_1-u} & 0 & 0 \\ -(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1} & 0 & \lambda-\lambda_1\lambda_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие совместности (2.14) с приведенными матрицами $\mathcal{L},\ \mathcal{M}$ эквивалентно полудискретному уравнению Цицейки (1.1):

Теорема 2.2. *Пара Лакса для полудискретного уравнения Цицейки имеет вид* (2.14) *с матрицами* (2.11) *и* (2.15).

После нахождения матрицы $\mathcal{M}$ также можно выписать оператор M для условия совместности (2.8):

$$M = (\partial + \lambda_2\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}})(\partial^2 - u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u}). \tag{2.16}$$

2.3. Пара Лакса для уравнения (1.7)**.** Осталось найти матрицу $\mathcal{B}$, определяющую линейную задачу по τ:

$$\frac{dV}{d\tau} = BV. \tag{2.17}$$

В этом случае условие совместности

$$\mathcal{M}_\tau + \mathcal{M}\mathcal{B} - T(\mathcal{B})\mathcal{M} = 0 \tag{2.18}$$

должно выполняться в силу уравнения (1.7). Матрица $\mathcal{B}$ находится из этого условия:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_{22}-\mathcal{B}_{33} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{23} \\ \mathcal{B}_{31} & \mathcal{B}_{32} & \mathcal{B}_{33} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{B}_{12} &= -\frac{2(v_1^2+1)(v_0^2-1)^2(v_{-1}^2+1)}{Z_0Z_1}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}+1\right), \\
\mathcal{B}_{13} &= -\frac{2\lambda_1\lambda_2(v_0^2-1)(v_{-1}^2+1)}{(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} + \frac{4\lambda_1\lambda_2 v_{-1}(v_0^2-1)^2)(v_1^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0Z_1}, \\
\mathcal{B}_{21} &= -\frac{8(v_0^2+1)(v_{-2}^2+1)v_{-1}^2}{Z_0Z_{-1}}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}-1\right), \\
\mathcal{B}_{22} &= -\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{3}\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}\right) + \frac{2\lambda_1\lambda_2^2(v_0^2+1)(v_{-1}^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} \\
&\quad + \frac{(v_0-1)^2v_{-1}^2+5v_0^2-2v_0+5}{Z_0} + \frac{4v_0(v_0-1)^2(v_{-1}^2+1)}{Z_0Z_1} \\
&\quad - \frac{4(2v_{-1}^2v_{-2}+(v_{-2}-1)^2)(v_0^2+1)}{Z_0Z_{-1}}, \\
\mathcal{B}_{23} &= \frac{8\lambda_1\lambda_2v_{-1}^2(v_0^2-1)(v_{-2}^2+1)}{(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)Z_{-1}Z_0} - \frac{4\lambda_1\lambda_2v_{-1}(v_0^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_n}, \\
\mathcal{B}_{31} &= -\frac{2\lambda_2(v_0^2+1)v_{-1}}{Z_0}\left(\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}-1\right) - \frac{4(v_0^2-1)(v_{-2}^2+1)v_{-1}}{Z_{-1}Z_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{32} =& -\frac{2(v_{-1}^2+1)(v_0^2-1)\lambda_1\lambda_2^2}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} + \frac{2\lambda_2(2v_{-1}(v_0^2-v_0+1)+(v_{-1}-1)^2)}{Z_0} - \lambda_2 \\
&+ \frac{8\lambda_2 v_{-1}v_0(v_0-1)^2}{Z_0Z_1}, \\
\mathcal{B}_{33} =& -\frac{2}{3}\lambda_1\lambda_2^2\left(1-\frac{6(v_0^2-1)v_{-1}}{Z_n}\right)\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}\right), \\
Z_n =& (v_{n-1}+1)^2v_n^2+(v_{n-1}-1)^2, \quad v_n = \sqrt{1+e^{2(u_n-u_{n+1})}}+e^{u_n-u_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Однако, условие совместности (2.18) с построенными матрицами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ не является эквивалентным дифференциально-разностному уравнению (1.7). Оно позволяет только найти $(u_1-u_0)_\tau$. Для получения матриц, которые давали бы эквивалентное уравнению (1.7) условие совместности, надо использовать калибровочное преобразование, например с матрицей $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие преобразования соответствуют линейной замене вектор-функции V вида $V=\mathcal{T}U$, при такой замене соответствующие матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ преобразуются по известным формулам.

Теорема 2.3. *Пара Лакса для дифференциально-разностного уравнения* (1.7) *имеет вид* (2.14) *с матрицами* $\mathcal{T}_{n+1}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{B}\mathcal{T}-\mathcal{T}_\tau)$.

Замечание 2.1. *Зная матрицу* $\mathcal{B}$, *также можно выписать оператор* B, *однако он будет нелокальным из-за наличия спектрального параметра в знаменателях элементов матрицы* $\mathcal{B}$.

2.4. Представление операторов через оператор сдвига T. В заключительной части работы выпишем операторы $\hat{M}$ и $\hat{L}$ через оператор сдвига T. Для этого возьмем вектор-функцию в виде

$$V = (\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)^n e^u \begin{pmatrix} -TP \\ P \\ \frac{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1}}\left(-\frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}P+(e^{2u_1-2u}+1)TP-e^{2u_1-2u}T^2P\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда в векторном соотношении $TV=\mathcal{M}V$ два равенства выполнены автоматически, а третье дает линейное разностное уравнение на функцию P:

$$\left((T-1)\frac{e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}+\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}T\right)\Lambda P + \left((T-1)\frac{e^{2u_1}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}-\sqrt{e^{2u_2}+e^{2u_1}}\right)T^2P = 0,$$

где $\Lambda = \frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}$ – новый спектральный параметр. Отсюда, выражая формально ΛP, получаем оператор $\hat{M}$ в нелокальном виде:

$$\hat{M} = \left((T-1)\frac{e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}+\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}T\right)^{-1}\left((T-1)\frac{e^{2u_1}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}-\sqrt{e^{2u_2}+e^{2u_1}}\right)T^2.$$

Оператор $\hat{L}$ находится из соотношения $\frac{dV}{dx}=\mathcal{L}V$, вторая компонента которого имеет вид:

$$\frac{dP}{dx} = \left(\lambda_1e^{-2u}-u_{0,1}+\frac{\lambda_2e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^u}}\right)P - \frac{\lambda_2}{\Lambda-1}\frac{e^{2u}P-(e^{2u_1}+e^{2u})TP+e^{2u_1}T^2P}{\sqrt{e^{2u_1}+e^u}}.$$

Оператор $\hat{L}$ определяет оператор дифференцирования и имеет вид:

$$\hat{L} = \left(\lambda_1 e^{-2u} - u_{0,1} + \frac{\lambda_2 e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1} + e^u}}\right) - \lambda_2 \frac{(T-1)e^{2u}(T-1)}{\sqrt{e^{2u_1} + e^u}} (\hat{M} - 1)^{-1}. \tag{2.19}$$

Условие совместности операторов $\hat{M}$ и $\hat{L}$ имеет вид:

$$\frac{d\hat{M}}{dx} + [\hat{M}, \hat{L}] = 0.$$

Оно эквивалентно уравнению (1.1). Эти операторы полезны для вычисления законов сохранения, см. например [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.N.Garifullin, I.T.Habibullin. *Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:20, 205201 (2021).
2. G. Tzitzeica. *Sur une nouvelle classe de surfaces* // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25**:1, 180–187 (1907).
3. А. В. Жибер, А. Б. Шабат. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой*, // Докл. АН СССР, **247**:5, 1103–1107 (1979).
4. А.П. Веселов, А.Б. Шабат. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера* // Функц. ан. прил. **27**:2, 1–21 (1993).
5. R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**(45), R541 (2006).
6. Р.И. Ямилов. *О классификации дискретных эволюционных уравнений* // Усп. матем. наук. **38**:6, 155–156 (1983).
7. Р.И. Ямилов. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // Теор. и матем. физ. **85**:3, 368–375 (1990).
8. А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 104–154 (2012).
9. D.J. Kaup. *On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class* $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ // Stud. Appl. Math. **62**:3, 189–216 (1980).
10. A.P. Fordy, J. Gibbons. *Factorization of operators I. Miura transformations* // J. Math. Phys. **21**(10), 2508–2510 (1980).
11. R.N.Garifullin, R.I.Yamilov. *On integrability of a discrete analogue of Kaup–Kupershmidt equation* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 158–164 (2017).

Рустем Наилевич Гарифуллин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: rustem@matem.anrb.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 25-35.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А.В. ЖИБЕР, М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений $\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$ в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \dots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \dots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$. Среди интегрируемых нелинейных уравнений и систем в частных производных в отдельный широкий класс выделены нелинейные гиперболические уравнения и системы, интегрируемые «по Дарбу». Отличительным свойством таких уравнений является наличие интегралов по каждому характеристическому направлению (так называемых x- и y-интегралов). Последнее позволяет сводить интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения и системы, интегрируемые «по Дарбу» эффективно поддаются исследованию и классификации при помощи характеристических колец Ли. Основополагающими в формировании алгебраического подхода исследования нелинейных гиперболических систем являются работы Лезнова, Смирнова, Шабата, Ямилова [1, 2]. В настоящее время алгебраический подход распространен на полудискретные и дискретные уравнения. В данной работе доказано, что система обладает N x-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо Ли, соответствующее непрерывному характеристическому направлению, конечномерно.

Ключевые слова: полудискретная система уравнений, характеристическое кольцо, x-интеграл, система, интегрируемая по Дарбу.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30, 37D99

1. Введение

Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений

$$\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}) \tag{1.1}$$

в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \dots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \dots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Прежде всего, дадим точные определения и формулировки утверждений. Первоначально, определим набор независимых переменных. Каждое равенство должно быть выполнено тождественно на любом решении системы (1.1). Поэтому везде $\bar{r}_{n+1,x}$ заменяется на правую часть $\bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$, $\bar{r}_{n+2,x}$ на $\bar{h}(x, n+1, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2}, \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}))$ и т.д. Таким образом, независимые переменные

$$\dots, r_{n-m}^i, \dots, r_{n-1}^i, r_n^i, r_{n+1}^i, \dots, r_{n+k}^i, \dots, r_{n,x}^i, r_{n,xx}^i, r_{n,xxx}^i, \dots . \tag{1.2}$$

A.V. Zhiber, M.N. Kuznetsova, Integrals and characteristic Lie rings of semi-discrete systems of equations.

© Жибер А.В., Кузнецова М.Н. 2021.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/.

Поступила 15 апреля 2021 г.

Далее мы будем использовать обозначения: D_x для оператора полного дифференцирования по переменной x, D для оператора сдвига по n на единицу, т.е

$$Dr(n,x) = r(n+1,x), \qquad D^{-1}r(n,x) = r(n-1,x),$$
$$D^2r(n,x) = r(n+2,x), \qquad D^{-2}r(n,x) = r(n-2,x).$$

Для производных вектора $\bar{r}_n$ будем использовать обозначения $\bar{r}_{n,x} = (r^1_{n,x}, r^2_{n,x}, \ldots, r^N_{n,x}), \ldots,$

$$\bar{r}_n^{(m)} = \left(r_n^{1,(m)}, \ldots, r_n^{N,(m)}\right) = \left(\frac{\partial^m r_n^1}{\partial x^m}, \ldots, \frac{\partial^m r_n^N}{\partial x^m}\right).$$

Определение 1.1. *Функция*

$$W = W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+s}), \qquad \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial W}{\partial r^i_{n+s}}\right)^2 \neq 0,$$

удовлетворяющая характеристическому уравнению $D_xW = 0$, называется x-интегралом системы (1.1)*, а число s – его порядком.*

Определение 1.2. *Функция*

$$I = I(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n,x}, \bar{r}_{n,xx}, \ldots, \bar{r}_n^{(m)}), \qquad \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial I}{\partial r_n^{i,(m)}}\right)^2 \neq 0,$$

удовлетворяющая уравнению $DI = I$, называется n-интегралом системы (1.1)*, а число m – его порядком.*

Система уравнений (1.1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор (N по каждому характеристическому направлению) функционально независимых интегралов.

Пример 1.1. *Цепочка*

$$t_{n+1,x} = t_{n,x} + ce^{\frac{t_n + t_{n+1}}{2}}$$

является интегрируемой по Дабру, так как допускает x-интеграл

$$W = e^{\frac{t_{n+1} - t_n}{2}} + e^{\frac{t_{n+1} - t_{n+2}}{2}}$$

и n-интеграл (см. [3]*)*

$$I = t_{n,xx} - \frac{t^2_{n,x}}{2}.$$

Уравнения и системы, интегрируемые по Дарбу, эффективно поддаются исследованию и классификации при помощи характеристических колец Ли.

Понятие характеристичекой алгебры Ли было введено в работе [1] для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(u), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В работах [1, 2] был доказан критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений. Было показано, что система (1.3) обладает полным набором интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра конечномерна. В работе [4] получен критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \qquad (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

В работах [5, 6] введено понятие характеристического кольца дискретного уравнения и с помощью этого понятия проведена классификация интегрируемых по Дарбу дифференциально-разностных уравнений вида $u_{i+1,x} = f(u_i, u_{i+1}, u_{i,x})$. В работах [7, 8] исследуется задача построения полного набора интегралов гиперболической системы.

В работе [9] сформулирована гипотеза: система уравнений (1.1) обладает полным набором $x-$ и $n-$ интегралов, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по каждому характеристическому направлению конечномерно.

В настоящей работе доказано, что система (1.1) обладает N независимыми $x-$интегралами, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по этому характеристическому направлению конечномерно.

Статья организована следующим образом. Параграф 2 содержит доказательство основного результата, сформулированного в Теореме 2.1 для системы (1.1) при $N = 2$. В параграфе 3 приводится схема доказательства основного результата для произвольного N (Теорема 3.1). Заключение содержит обсуждение результатов.

2. Характеристические кольца. Случай $N = 2$

Исследуем случай $N = 2$:

$$\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}), \qquad \bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2), \qquad \bar{h} = (h^1, h^2), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Определим x-кольцо Ли системы (2.1). На множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $x, \bar{r}_{n,x}, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots$ оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,xx}\frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}} + r^2_{n,xx}\frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right). \tag{2.2}$$

Из системы уравнений (2.1) получаем соотношения

$$\bar{r}_{n+k,x} = \bar{h}_{n+k}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Представим оператор (2.2) в виде

$$D_x = r^1_{n,xx}Y_1 + r^2_{n,xx}Y_2 + Y_3, \tag{2.4}$$

где

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

Согласно формулам (2.3), векторное поле Y_3 можно представить в виде:

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^1_n} + r^2_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \beta_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right),$$

где $\bar{h}_{n+k} = (\alpha_k, \beta_k)$. Отметим, что

$$\alpha_k = \alpha_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}), \qquad \beta_k = \beta_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}).$$

Характеристическое уравнение

$$DW(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m}) = 0, \tag{2.5}$$

согласно (2.4), эквивалентно системе

$$Y_1W = 0, \qquad Y_2W = 0, \qquad Y_3W = 0. \tag{2.6}$$

С уравнениями (2.6) естественным образом связано колько Ли, порожденное векторными полями Y_1, Y_2 и Y_3. Это кольцо $\mathcal{X}$ будем называть характеристическим x-кольцом Ли системы уравнений (2.1). Решения уравнения (2.5) будем называть x-интегралами.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. *Если система уравнений* (2.1) *обладает двумя x-интегралами, независимыми в главном, то кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

Доказательство. Пусть система (2.1) обладает парой интегралов одинакового порядка

$$\omega(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),$$

независимых в главном, то есть определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\omega}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial\omega}{\partial r^2_{n+m}}\\ \dfrac{\partial W}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial W}{\partial r^2_{n+m}}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\bar r_{n+m}=\bar a_n(\omega,W,x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1}). \tag{2.7}$$

Далее положим $\omega_n=\omega$, $W_n=W$. Теперь из (2.7) получаем соотношения

$$\bar r_{n+m+k}=\bar A_k(x,n,\omega_n,W_n,\dots,\omega_{n+k},W_{n+k},\bar r_n,\bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1}),\quad k=0,1,2,\dots. \tag{2.8}$$

Таким образом, учитывая формулы (2.8), от независимых переменных

$$\bar r_{n,x},x,\bar r_n,\bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+s},\dots \tag{2.9}$$

можно перейти к новым переменным

$$\bar r_{n,x},x,\bar r_n,\bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1},\omega_n,W_n,\dots,\omega_{n+k},W_{n+k},\dots. \tag{2.10}$$

В новых переменных (2.10) оператор Y_3 запишется в виде

$$\tilde Y_3=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{k=0}^{m-1}\left(r^1_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}}+r^2_{n+k,x}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

При замене переменных справедливо соотношение $\overline{[X,Z]}=[\overline{X},\overline{Z}]$, здесь черта сверху означает исходный оператор в новых переменных, и кольцо Ли, порожденное операторами Y_1, Y_2 и $\tilde Y_3$ конечномерно. Поэтому и исходное x-кольцо Ли $\mathcal{X}$ конечномерно.

Пусть исходная система уравнений (2.1) имеет пару интегралов разного минимального порядка

$$\omega(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+l}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m}),\qquad l<m, \tag{2.11}$$

независимых в главном. Последнее означает, что интегралы

$$\omega(x,n+m-l,\bar r_{n+m-l},\dots,\bar r_{n+m}),\qquad W(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m})$$

независимы в главном. И тогда, переходя от переменных (2.9) к переменным

$$\bar r_{n,x},x,\bar r_n,\bar r_{n+1},\dots,\bar r_{n+m-1},\omega_{n+m-l},\omega_{n+m-l+1},\dots,W_n,W_{n+1},\dots,$$

как и выше получаем, что кольцо $\mathcal{X}$ – конечномерно. Лемма доказана. □

Рассмотрим вопрос о зависимости двух интегралов в главном. Пусть интегралы (2.11) зависимы в главном. Последнее означает, что справедливо равенство

$$W(x,n,\bar r_m,\dots,\bar r_{n+m})=F(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1},\omega(x,n+m-l,\bar r_{n+m-l},\dots,\bar r_{n+m})).$$

Откуда получаем, что

$$W=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(x,n,\bar r_n,\dots,\bar r_{n+m-1})(\omega-\omega^0)^k.$$

В силу того, что ω и W – интегралы минимального порядка получаем, что

$$F_k = \Phi_k \left(x, n, \omega(x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+l}), \dots, \omega(x, n+m-l, \bar{r}_{n+m-l}, \dots, \bar{r}_{n+m-1})\right).$$

Таким образом,

$$W = \Phi(x, n, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+m-l})$$

и исходная система (1.1) имеет один x-интеграл.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Ясно, что $\dim \mathcal{X} \geqslant 5$.

Рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 5$. Тогда базис кольца $\mathcal{X}$ задается векторными полями Y_1, Y_2, Y_3, $Y_{13} = [Y_1, Y_3]$, $Y_{23} = [Y_2, Y_3]$. Так как

$$\begin{aligned} Y_3 =& \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^1_n} + r^2_{n,x}\frac{\partial}{\partial r^2_n} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\alpha_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x})\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \\ &+ \beta_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \dots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x})\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\Bigg), \end{aligned} \tag{2.12}$$

то

$$[Y_1, Y_3] = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial r^1_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \frac{\partial \beta_k}{\partial r^1_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right),$$

$$[Y_2, Y_3] = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial r^2_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \frac{\partial \beta_k}{\partial r^2_{n,x}}\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right).$$

Далее векторное поле (2.12) заменим на

$$\tilde{Y}_3 = Y_3 - r^1_{n,x}Y_{13} - r^2_{n,x}Y_{23}.$$

Итак, имеем следующий базис

$$\begin{aligned} &Y_1 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n,x}}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n,x}}, \qquad \tilde{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{\alpha}_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \tilde{\beta}_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right), \\ &Y_{13} = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \delta_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right), \qquad Y_{23} = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k\frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + q_k\frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \gamma_k, \delta_k, p_k, q_k$ не зависят от переменных $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$ и есть функции переменных $x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+k}$, иначе $\dim \mathcal{X} > 5$. Характеристическое уравнение (2.5) для x-интеграла $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$, согласно (2.13), сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \tilde{\beta}_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r^1_n} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \delta_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r^2_n} + p_1\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + q_1\frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}}\right)W = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как число независимых переменных равно пяти: $(x, r^1_n, r^2_n, r^1_{n+1}, r^2_{n+1})$, а число уравнений трем, то система (2.14) имеет два функционально независимых решения $\omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ и $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ первого порядка.

Далее рассмотрим кольцо $\mathcal{X}$ размерности 6. Не ограничивая общности можно считать, что базис порождается векторными полями (2.13) и полем вида

$$Y_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + s_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right), \qquad k \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Ясно, что коэффициенты оператора Y_4 не зависят от переменных $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$. Иначе размерность кольца будет больше 6.

Аналогично, коэффициенты векторных полей (2.13) не зависят от $r^1_{n,x}$ и $r^2_{n,x}$.

Если $k \geqslant 2$, то мы приходим к системе (2.14), которая имеет два функционально независимых решения первого порядка.

Пусть $k = 1$. Характеристическое уравнение (2.5) для x-интеграла первого порядка сводится к системе, состоящей из уравнений (2.14) и уравнения (см. (2.15))

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + s_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} \right) W = 0. \tag{2.16}$$

Так как число независимых переменных равно пяти: $(x, r^1_n, r^2_n, r^1_{n+1}, r^2_{n+1})$, а число уравнений четырем, то система (2.14), (2.16) имеет одно решение $\omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ первого порядка.

Далее рассмотрим уравнение (2.5) для x-интеграла второго порядка

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \tilde{\beta}_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \tilde{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
&\left(\frac{\partial}{\partial r^1_n} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \delta_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
&\left(\frac{\partial}{\partial r^2_n} + p_1 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + q_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + p_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + q_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0, \\
&\left(\frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + s_1 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + s_2 \frac{\partial}{\partial r^1_{n+2}} + d_2 \frac{\partial}{\partial r^2_{n+2}} \right) W = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Так как число переменных равно 7: $(x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$, а число уравнений системы (2.17) равно 4, то последняя имеет три функционально независимых решения $\omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$, $\omega(x, n+1, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ и $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$. Таким образом, x-интегралы $\omega = \omega(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ и $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ задают все семейство решений характеристического уравнения (2.5).

Далее рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 7$. Тогда базис кольца Ли $\mathcal{X}$ порождается векторными полями, согласно (2.13), (2.15), вида

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \beta_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\gamma_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \delta_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial r^2_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + q_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} \right),$$

$$\tilde{Y}_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + s_k \frac{\partial}{\partial r^2_{n+k}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right),$$

$$\tilde{Y}_5 = \kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} + \sum_{s=n+l+1}^{\infty} \left(\kappa_s \frac{\partial}{\partial r^1_{n+s}} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial r^2_{n+s}} \right).$$

Здесь коэффициенты векторных полей $\tilde{Y}_i$ не зависят от переменных $r^1_{n,x}$, $r^2_{n,x}$ и $l \geqslant k$.

При $k \geqslant 2$ система уравнений

$$\tilde{Y}_i W = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{2.18}$$

имеет два функционально независимых решения первого порядка и любое другое есть функция от их сдвигов, то есть

$$W = W(x, n, \omega^1, \omega^2, \omega^1_1, \omega^2_1, \dots, \omega^1_s, \omega^2_s),$$

где

$$\omega^1 = \omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}), \qquad \omega^2 = \omega^2(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}),$$
$$\omega^m_i = \omega^m_i(x, n+i, \bar{r}_{n+i}, \bar{r}_{n+i+1}), \qquad m = 1, 2, \qquad i = 1, 2, \dots, s.$$

Рассмотрим далее случай $k = 1$. Если $l \geqslant 3$, то мы приходим к системе (2.17). Таким образом, имеем x-интеграл первого порядка и x-интеграл второго порядка. Последние задают все семейство решений системы (2.18).

Пусть $l = 2$. Тогда нетрудно показать как и выше, что система (2.18) имеет два решения $\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$ и $\omega^2(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$, которые задают все множество решений характеристического уравнения (2.5). Осталось рассмотреть случай $l = 1$ (при $k = 1$). Если определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ \kappa_1 & \mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то оператор $\tilde{Y}_5$ заменим на $\tilde{\tilde{Y}}_5 = \tilde{Y}_5 - \kappa_1 \tilde{Y}_4$. Последний имеет вид:

$$\tilde{\tilde{Y}}_5 = \kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} + \sum_{s=n+1+l}^{\infty} \left(\kappa_s \frac{\partial}{\partial r^1_{n+s}} + \mu_s \frac{\partial}{\partial r^2_{n+s}} \right),$$

где $l \geqslant 2$. Этот случай был исследован выше.

Если

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ \kappa_1 & \mu_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то операторы $\tilde{Y}_4$ и $\tilde{Y}_5$ можно заменить на следующие

$$\tilde{\tilde{Y}}_4 = \frac{\partial}{\partial r^1_{n+1}} + \sum_{l=2}^{\infty} \left(s_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + d_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right),$$
$$\tilde{\tilde{Y}}_5 = \frac{\partial}{\partial r^2_{n+1}} + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\kappa_l \frac{\partial}{\partial r^1_{n+l}} + \mu_l \frac{\partial}{\partial r^2_{n+l}} \right).$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\tilde{Y}_1 W = 0, \quad \tilde{Y}_2 W = 0, \quad \tilde{Y}_3 W = 0, \quad \tilde{\tilde{Y}}_4 W = 0, \quad \tilde{\tilde{Y}}_5 W = 0. \tag{2.19}$$

Для решений второго порядка $W = W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2})$ система содержит 7 независимых переменных $x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n+2}$, а число уравнений равно 5. Следовательно, существует два независимых интеграла второго порядка.

Ясно, что система (2.19) не имеет интегралов первого порядка в этом случае. Аналогично рассматривается случай, когда $\dim \mathcal{X} > 7$. Итак, доказано утверждение:

Лемма 2.2. *Если кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно, то существует два независимых интеграла минимального порядка. Любой другой интеграл есть функция от их сдвигов.*

Таким образом, из Лемм 2.1, 2.2 следует утверждение:

Теорема 2.1. *Система уравнений (2.1) обладает двумя x-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

3. Характеристические кольца

Определим характеристическое кольцо по направлению x для системы (1.1). На множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $x, \bar{r}_{n,x}, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots$ оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} r^i_{n,xx} \frac{\partial}{\partial r^i_{n,x}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(r^i_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^i_{n+k}} \right). \tag{3.1}$$

Из системы уравнений (1.1) получаем соотношения

$$\bar{r}_{n+k,x} = \bar{h}_{n+k}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Представим оператор (3.1) в виде

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} r^i_{n,xx} Y_i + Y_{N+1}, \tag{3.3}$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial r^i_{n,x}}, \qquad Y_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^1_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \cdots + r^N_{n+k,x} \frac{\partial}{\partial r^N_{n+k}} \right).$$

Согласно формулам (3.2) векторное поле Y_{N+1} можно представить в виде:

$$Y_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + r^1_{n,x} \frac{\partial}{\partial r^1_n} + \cdots + r^N_{n,x} \frac{\partial}{\partial r^N_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^1_k \frac{\partial}{\partial r^1_{n+k}} + \cdots + \alpha^N_k \frac{\partial}{\partial r^N_{n+k}} \right),$$

где $\bar{h}_{n+k} = (\alpha^1_k, \ldots, \alpha^N_k)$. Отметим, что

$$\alpha^i_k = \alpha^i_k(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}).$$

Характеристическое уравнение

$$D_x W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m}) = 0, \tag{3.4}$$

согласно (3.3), эквивалентно системе

$$Y_i W = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, N+1. \tag{3.5}$$

С уравнениями (3.5) естественным образом связано кольцо Ли $\mathcal{X}$, порожденное векторными полями Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N, N+1$. Это кольцо $\mathcal{X}$ будем называть характеристическим x-кольцом системы уравнений (1.1). Решения уравнения (3.4) будем называть x-интегралами. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Если система уравнений* (1.1) *обладает N x-интегралами, независимыми в главном, то кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.*

Доказательство. Пусть система (1.1) допускает N интегралов одинакового порядка $\omega^i(x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+m})$, независимых в главном. То есть определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^2_{n+m}} \cdots & \dfrac{\partial \omega^1}{\partial r^N_{n+m}} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^1_{n+m}} & \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^2_{n+m}} \cdots & \dfrac{\partial \omega^N}{\partial r^N_{n+m}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\bar{r}_{n+m} = \bar{a}_n(\omega^1, \ldots, \omega^N, x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+m-1}). \tag{3.6}$$

Далее положим $\omega_n^1 = \omega^1, \ldots, \omega_n^N = \omega^N$. Тогда из (3.6) получаем сооотношения

$$\bar{r}_{n+m+k} = \bar{A}_k(x, n, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^N, \ldots, \omega_{n+k}^1, \ldots, \omega_{n+k}^N, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m-1}), \tag{3.7}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, учитывая формулы (3.7), от независимых переменных

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+s}, \ldots \tag{3.8}$$

можно перейти к новым переменным

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m-1}, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^N, \ldots, \omega_{n+k}^1, \ldots, \omega_{n+k}^N. \tag{3.9}$$

В новых переменных (3.9) оператор Y_{N+1} запишется в виде

$$\tilde{Y}_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{m-1} \left(r_{n+k,x}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \cdots + r_{n+k,x}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right).$$

При замене переменных справедливо соотношение $\overline{[X, Z]} = \left[\overline{X}, \overline{Z}\right]$, черта сверху означает исходный оператор в новых переменных, и характеристическое кольцо, порожденное операторами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, \tilde{Y}_{N+1}$ конечномерно. Поэтому и исходное характеристическое кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно.

Пусть исходная система уравнений (1.1) имеет N интегралов

$$\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+l_1}),\ \ldots,\ \omega^N(x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+l_N}), \tag{3.10}$$

разных минимальных порядков $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_N$, независимых в главном. Последнее означает, что интегралы (обозначим $l_N = M$)

$$\begin{aligned}
&\omega^1(x, n + M - l_1, \bar{r}_{n+M-l_1}, \ldots, \bar{r}_{n+M}),\\
&\omega^i(x, n + M - l_i, \bar{r}_{n+M-l_i}, \ldots, \bar{r}_{n+M}), \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,\\
&\omega^N(x, n, \bar{r}_n, \ldots, \bar{r}_{n+M})
\end{aligned}$$

независимы в главном. И тогда, переходя от переменных (3.8) к переменным

$$\bar{r}_{n,x}, x, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+m-1}, \omega_{n+m-l_1}^1, \omega_{n+m-l_1+1}^1, \ldots, \omega_n^N, \omega_{n+1}^N$$

как и выше получаем, что характеристическое кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Лемма доказана. $\square$

Теперь рассмотрим обратную задачу. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.2. *Если кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно, то существует N независимых x-интегралов минимального порядка. Любой другой интеграл есть функция от их сдвигов.*

Схема доказательства. Пусть кольцо $\mathcal{X}$ конечномерно. Ясно, что $\dim \mathcal{X} \geqslant 2N + 1$. Рассмотрим случай $\dim \mathcal{X} = 2N + 1$. Тогда базис кольца $\mathcal{X}$ задается векторными полями

$$\begin{gathered}
Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, Y_{N+1},\\
Y_{1,N+1} = [Y_1, Y_{N+1}]\,, Y_{2,N+1} = [Y_2, Y_{N+1}]\,, \ldots, Y_{N,N+1} = [Y_N, Y_{N+1}]\,.
\end{gathered}$$

Так как

$$\begin{aligned}
Y_{N+1} =& \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} r_{n,x}^i \frac{\partial}{\partial r_n^i} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}) \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \cdots \right.\\
&\left. \cdots + \alpha_k^N(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \ldots, \bar{r}_{n+k}, \bar{r}_{n,x}) \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N} \right),
\end{aligned}$$

то

$$[Y_1, Y_{N+1}] = \frac{\partial}{\partial r_n^1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k^1}{\partial r_{n,x}^1}\frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \frac{\partial \alpha_k^N}{\partial r_{n,x}^1}\frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N}\right),$$

$$[Y_i, Y_{N+1}] = \frac{\partial}{\partial r_n^i} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial \alpha_k^1}{\partial r_{n,x}^i}\frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \frac{\partial \alpha_k^N}{\partial r_{n,x}^i}\frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N}\right), \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Далее векторное поле Y_{N+1} заменим на

$$\tilde{Y}_{N+1} = Y_{N+1} - r_{n,x}^1 Y_{1,N+1} - r_{n,x}^2 Y_{2,N+1} - \dots - r_{n,x}^N Y_{N,N+1}.$$

Итак, имеем следующий базис

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^1}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^2}, \qquad \dots, \qquad Y_N = \frac{\partial}{\partial r_{n,x}^N},\\
&\tilde{Y}_{N+1} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{\alpha}_k^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + \tilde{\alpha}_{n+k}^N\right),\\
&Y_{1,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{1,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{1,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N}\right),\\
&Y_{2,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{2,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{2,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N}\right),\\
&\dots\\
&Y_{N,N+1} = \frac{\partial}{\partial r_n^N} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{N,k}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^1} + \dots + p_{N,k}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+k}^N}\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты $p_{j,k}^i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ не зависят от переменных $x, n, \bar{r}_n, \dots, \bar{r}_{n+k}$, иначе размерность $\dim \mathcal{X} > 2N + 1$.

Характеристическое уравнение (3.4) для x-интеграла $W(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$, согласно (3.11), сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + \tilde{\alpha}_1^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N}\right) W = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial r_n^1} + p_{1,1}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + p_{1,1}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N}\right) W = 0,\\
&\quad \dots\dots\dots\\
&\left(\frac{\partial}{\partial r_n^N} + p_{N,1}^1 \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^1} + \dots + p_{N,1}^N \frac{\partial}{\partial r_{n+1}^N}\right) W = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как число независимых переменных равно $2N + 1$: $x, r_n^1, \dots, r_n^N, r_{n+1}^1, \dots, r_{n+1}^N$, а число уравнений равно $N + 1$, то система (3.12) имеет N функционально независимых решений

$$\omega^1(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}), \dots, \omega^N(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1})$$

первого порядка.

Аналогично доказательству Леммы 2.2 рассматриваются случаи, когда размерность $\dim\mathcal{X} > 2N + 1$.

Таким образом, из Лемм 3.1, 3.2 следует утверждение:

Теорема 3.1. *Система уравнений* (1.1) *обладает* N x*-интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда кольцо* $\mathcal{X}$ *конечномерно.*

4. Заключение

В настоящее время аппарат характеристических колец Ли является эффективным инструментом исследования интегрируемости нелинейных моделей, как непрерывных (уравнений и систем) [1, 2, 4, 7, 8], так и полудискретных уравнений (см. [5, 6]). По-видимому критерий интегрируемости полудискретных систем, рассмотренных в данной работе, состоит в следующем: система уравнений (1.1) обладает полным набором (N по каждому характеристическому направлению) интегралов, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по каждому направлению конечномерно. В данной работе доказана часть этого критерия, касающаяся непрерывного характеристического направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамичексих систем* // ТМФ. **51**:1, 10–21 (1982).
2. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана.* Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1981.
3. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Sakieva. *Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability* // J. Math. Phys., **52**:9, 093507 (2011).
4. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Вестник УГАТУ. **7**:25, 83–89 (2007).
5. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. **49**:10, 102702 (2008).
6. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1,x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. **50**:10, 102710 (2009).
7. А.В. Жибер, А.М. Гурьева. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. **6**:2, 26–34 (2005).
8. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **3**:2, 173-–184 (2010).
9. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D* // J. Phys. A: Math. Theor. (accepted), Preprint: arXiv:2102.07352 (2021).

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru

Мария Николаевна Кузнецова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: mariya.n.kuznetsova@gmail.com

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 36-43.

УДК 517.95

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О.В. КАПЦОВ, М.М. МИРЗАОХМЕДОВ

Аннотация. В работе найдены общие решения для некоторых классов линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения описывают колебания стержней, акустические волны, а также к ним сводятся некоторые модели газовой динамики. Для построения общих решений используются специальные типы преобразований Эйлера-Дарбу – преобразования типа Леви. Эти преобразования представляют собой дифференциальные подстановки первого порядка. Для построения каждого преобразования необходимо решать два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка. Решения одного из этих уравнений находятся из решений другого с помощью дифференциальной подстановки и формулы Лиувилля. В общем случае решать эти обыкновенные дифференциальные уравнения не просто. Однако можно указать некоторую формулу суперпозиции преобразований типа Леви.

Стартуя с классического волнового уравнения с постоянными коэффициентами и используя найденные преобразования, можно строить бесконечные серии уравнений, обладающих явными общими решениями. С помощью метода Матвеева получены предельные формы итерированных преобразований. Приводится ряд конкретных примеров уравнений обладающих общими решениями.

Ключевые слова: линейные уравнения с переменными коэффициентами, общие решения, предельные преобразования Леви.

Mathematics Subject Classification: 35C05, 35L10, 35A09

1. Введение

Распространение одномерных волн в неоднородных средах часто описывают уравнением вида

$$v_{tt} = a(bv_x)_x, \tag{1.1}$$

где a, b – гладкие положительные функции от x. Например, в случае звуковых волн функция v задает давление, при этом $a = \rho c^2$, $b = \rho^{-1}$, где ρ – плотность, c – скорость звука в среде [1]. Если же уравнение (1.1) моделирует продольные колебания стержня, то v описывает перемещения стержня, причем $a = \frac{E}{\rho\omega}$, $b = \omega$, где E – модуль Юнга, ρ – плотность, ω – площадь поперечного сечения стержня. Кроме того, с уравнением (1.1) связаны другие модели. Например, систему, описывающую одномерные изэнтропические движения газа [4], можно привести к виду (1.1).

Представляет интерес нахождение общих решений уравнения (1.1) для непостоянных функций a, b. Некоторые примеры таких решений имеются в [5], [3]. Общее решение может

O.V. Kaptsov, M.M. Mirzaokhmedov, General solutions of some linear equations with variable coefficients.

© Капцов О.В., Мирзаохмедов М.М. 2021.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631).

Поступила 3 февраля 2021 г.

быть использовано для решения задачи Коши. Для построения общих решений некоторых уравнений вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0,$$

Лаплас придумал каскадный метод [2]. С другой стороны, Эйлер [6] предложил использовать дифференциальные подстановки для нахождения общих решений уравнений вида

$$u_{tt} = Fu_{xx} + Gu_x + Hu, \tag{1.2}$$

где F, G, H – функции от x. Позднее Дарбу [2] и другие математики в конце XIX и начале XX веков обобщали такие преобразования и применяли их к решению геометрических задач. В последние 40 лет интерес к таким преобразованиям резко возрос в связи с развитием теории солитонов [11], [12], [8].

В данной работе мы используем преобразования Эйлера-Дарбу для нахождения общих решений уравнений

$$u_{tt} = u_{xx} + g(x)u_x, \tag{1.3}$$

для специальных классов функций g. Несложно показать, что точечными преобразованиями уравнение (1.1) приводится к виду (1.3). Мы находим преобразования Эйлера-Дарбу, переводящие решения уравнения (1.2) в решения уравнения (1.2), но с другой функцией g. Стартуя с функции $g = 0$, можно получить бесконечные серии уравнений, для которых удается найти общие решения.

Наша работа расширяет исследования, начатые в [3], используя более общие преобразования. Кроме того, мы строим предельные преобразования, используя идеи Матвеева [11].

2. Преобразования Эйлера-Дарбу

Как известно [6], Эйлер нашел условия, при выполнении которых дифференциальная подстановка первого порядка

$$w = M(u_x + su)$$

переводит решения уравнения (1.2) в решения уравнения

$$w_{tt} = F_1 w_{xx} + G_1 w_x + H_1 w, \tag{2.1}$$

где M, s, F_1, G_1, H_1 – функции от x. Мы приведем немного измененную формулировку этого результата из книги [3], поскольку ее удобнее применять в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть u – решение уравнения (1.2). Тогда подстановка*

$$w = \frac{u_x - (\ln h)_x u}{r} \tag{2.2}$$

переводит функцию u в решение уравнения (2.1), если:

1) функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Fh'' + Gh' + (H + c)h = 0, \tag{2.3}$$

где r – произвольная гладкая функция от x, c – произвольная константа;

2) F_1, G_1, H_1 задаются формулами

$$F_1 = F, \quad G_1 = G + F' + 2F(\ln r)', \quad H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)''. \tag{2.4}$$

Уравнение (1.1) несложно упростить с помощью замены независимой переменной. Действительно, пусть $v(t, x) = u(t, y(x))$, где $y = y(x)$ новая переменная. Вычисляя производные v_{tt}, v_x, v_{xx} и подставляя их в (1.1), получим уравнение

$$u_{tt} = aby'^2 u_{yy} + (aby'' + ab'y')u_y.$$

Полагая $aby'^2 = 1$, находим

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{ab}}.$$

Здесь интеграл существует, поскольку функции a, b – гладкие и положительно определенные. Таким образом, уравнение (1.1) заменой приводится к виду

$$u_{tt} = u_{xx} + G(x)u_x. \tag{2.5}$$

Предложение 2.1. *Подстановка (2.2) переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения*

$$w_{tt} = w_{xx} + G_1 w_x, \tag{2.6}$$

если выполнены условия:

1) $h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$h'' + Gh' + ch = 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

2)

$$G_1 = G + 2\Big(\ln \frac{h'}{h}\Big)', \tag{2.8}$$

3) функция r удовлетворяет уравнению

$$r'' + Gr' + \big(G' + 2(\ln h)''\big)r = 0. \tag{2.9}$$

Это предложение следует из леммы 2.1. Чтобы получить (2.9), нужно положить $H_1 = H = 0$ в формуле (2.4).

Предложение 2.2. *Подстановка*

$$r = \frac{h'}{h} \tag{2.10}$$

переводит решения уравнения (2.7) в решения уравнения (2.9). Подстановка

$$w = u - \frac{h}{h'}u_x \tag{2.11}$$

переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения (2.6).

Доказательство проводится прямой подстановкой (2.10) в (2.9). При этом следует учитывать уравнение (2.7) и его дифференциальные следствия.

Замечание 2.1. *Подстановка типа (2.11) называется преобразованием Леви в теории сопряженных сетей* [7]. *Отметим, что, зная общее решение уравнения (2.7), мы не получим общего решения уравнения (2.9). Общее решение находится по известной формуле Лиувилля.*

Пример 1. Пусть функция G в (2.5) равна нулю. Тогда в зависимости от выбора константы c, мы получим три типа решений уравнения (2.7):

1) при $c = 0$ функция h – линейная, т.е.

$$h = c_1 x + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

2) при $c = -k^2 < 0$ решение

$$h = c_1 \exp(kx) + c_2 \exp(-kx), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

3) при $c = k^2 > 0$ функция h равна

$$h = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx).$$

Рассмотрим первый вариант. В этом случае общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$r = \frac{d_1}{x+b} + d_2(x+b)^2, \qquad d_1, d_2 \in R, \qquad b = \frac{c_2}{c_1}.$$

Значит, согласно (2.8), получаем

$$G_1 = \frac{4m(x+b)^3 - 2}{(x+b)(m(x+b)^3+1)}, \qquad m = \frac{d_2}{d_1}.$$

Следовательно, в соответствии с предложением 2.1, общее решение уравнения (2.6) в данном случае имеет вид

$$w = \frac{(x+b)u_x + u}{d_1 + d_2(x+b)^3},$$

где $u = X(x+t) + T(x-t)$, а X, T – произвольные гладкие функции.

Кратко остановимся на втором варианте. В этом случае два решения уравнения (2.9) выглядят так

$$r_1 = k\frac{\exp(kx) - b\exp(-kx)}{\exp(kx) + b\exp(-kx)}, \qquad r_2 = \frac{kx(\exp(2kx) - b) - 2b}{\exp(2kx) + b}, \qquad b = \frac{c_2}{c_1}.$$

Функция G_1 находится по формуле (2.8) и при $r = r_1$ имеет вид

$$G_1 = \frac{8bk\exp(2kx)}{b^2\exp(4kx) - 1}.$$

Общее решение уравнения (2.6), с данной функцией G_1, находится с помощью подстановки (2.2) и имеет вид

$$w = X + T - \frac{(X' + T')(\exp(kx) + b\exp(-kx))}{k(\exp(kx) - b\exp(-kx))}, \tag{2.12}$$

где $X(x+t)$, $T(x-t)$ – произвольные гладкие функции, штрих означает производную. Очевидно, при $b < 0$ решение (2.12) является гладким. Аналогичным образом рассматривается третий вариант.

В [3] получена лемма о последовательности преобразований типа Леви.

Лемма 2.2. *Пусть $h_1, \ldots, h_n$ – линейно независимые решения уравнения (2.7), соответствующие параметрам $c_1, \ldots, c_n$ (причем $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$). Тогда преобразование*

$$z = \frac{W(u, h_1, \ldots, h_n)}{W(h_1', \ldots, h_n')}, \tag{2.13}$$

где W – вронскиан, переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + G_n z_x, \tag{2.14}$$

при этом функция G_n задается формулой

$$G_n = G + 2\frac{d}{dx}\Big(\ln\frac{W(h_1', \ldots, h_n')}{W(h_1, \ldots, h_n)}\Big). \tag{2.15}$$

В [3] можно найти примеры, относящиеся к этой лемме. В работе [9] изучалась последовательность Леви, возникающая в теории сопряженных сетей.

3. Предельные преобразования и примеры

В лемме 2.2 о последовательности преобразований типа Леви предполагалось, что функции h_i соответствуют попарно различным параметрам c_i. Здесь мы рассмотрим случай совпадающих параметров. Будем далее иногда использовать обозначения ∂_x, ∂_k для операторов дифференцирования по x и k соответственно. Стандартные обозначения для производных мы тоже продолжим применять.

Лемма 3.1. *Пусть $h(x,k)$ – решение уравнения*

$$h'' + gh' - k^2 h = 0, \tag{3.1}$$

где g – гладкая функция от x, $k \in \mathbb{R}$. Тогда преобразование

$$z = \frac{W(u, h, \partial_k h, \dots, \partial_k^m h)}{W(\partial_x h, \partial_k \partial_x h, \dots, \partial_k^m \partial_x h)} \tag{3.2}$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + g u_x, \tag{3.3}$$

в решения уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + g_{m+1} z_x, \tag{3.4}$$

где функция g_{m+1} задается формулой

$$g_{m+1} = g + 2\partial_x \Big(\ln \frac{W(\partial_x h, \partial_k \partial_x h, \dots, \partial_k^m \partial_x h)}{W(h, \partial_k h, \dots, \partial_k^m h)} \Big). \tag{3.5}$$

Доказательство. Мы будем использовать в рассуждениях идеи работы Матвеева [10]. Для упрощения рассмотрим случай $m = 1$. Пусть $h(x,k)$ – решение уравнения (3.1). Введем обозначения: $h^1 = h(x,k_1)$, $h^2 = h(x,k_2)$. Согласно формуле Тейлора имеем

$$h^2 = h^1 + \varepsilon \partial_k h^1 + o(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = k_2 - k_1$, $o(\varepsilon)$ – символ Ландау.

Далее мы хотим перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в формулах (2.13), (2.15). Вронскиан $W(u,h^1,h^2)$ записывается следующим образом

$$\begin{aligned} W(u,h^1,h^2) &= \begin{vmatrix} u & h^1 & h^1 + \varepsilon\partial_k h^1 + o(\varepsilon) \\ u_x & h^1_x & h^1_x + \varepsilon \partial_k h^1_x + o_x(\varepsilon) \\ u_{xx} & h^1_{xx} & h^1_{xx} + \varepsilon\partial_k h^1_{xx} + o_{xx}(\varepsilon) \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} u & h^1 & \partial_k h^1 + o \\ u_x & h^1_x & \partial_k h^1_x + o_x \\ u_{xx} & h^1_{xx} & \partial_k h^1_{xx} + o_{xx} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon W(u, h^1, \partial_k h^1 + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается формула

$$W(h^1_x, h^2_x) = \varepsilon W(\partial_x h^1, \partial_k \partial_x h^1 + o(\varepsilon)).$$

Следовательно, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{W(u,h^1,h^2)}{W(h^1_x,h^2_x)} = \frac{W(u,h^1,\partial_k h^1)}{W(\partial_x h^1, \partial_k\partial_x h^1)}.$$

Точно также из формулы (2.15) получаем выражение (3.5). Конечно можно проверить справедливость леммы 3.1 при $m = 1$ прямыми вычислениями. □

Замечание 3.1. *Можно получить более общее утверждение, чем лемма 3.1, аналогичное утверждению из* [10]. *Оно отвечает случаю, когда не все константы c_i в лемме 2.2 совпадают. Рассуждения примерно такие же, как и выше, но формулы становятся более громоздкими.*

Пример 2. Пусть $g = 0$, $k \neq 0$, $m = 1$. Тогда решение уравнения (3.1) имеет вид
$$h = a_1 \operatorname{sh}(kx) + a_2 \operatorname{ch}(kx). \tag{3.6}$$
Для упрощения формул будем считать $a_2 = 0$. Тогда, согласно (3.5), функция g_2 равна
$$g_2 = -\frac{2k(4kx \operatorname{ch}^2(kx) - \operatorname{sh}(2kx) - 2kx)}{\operatorname{ch}^2(kx)\operatorname{sh}^2(kx) - k^2x^2}. \tag{3.7}$$
Общее решение уравнения (3.4) имеет вид
$$z = \frac{(\operatorname{ch}(kx)\operatorname{sh}(kx) - kx)g'' + (-2k\operatorname{ch}^2(kx) + 2k)g' + \dots + k(k^2xf - xf'' + 2f')}{k^2(\operatorname{ch}(kx)\operatorname{sh}(kx) + kx)}. \tag{3.8}$$
Здесь $f(x+t)$, $g(x-t)$ – произвольные гладкие функции. В формуле (3.7) и решении (3.8) можно перейти к пределу при $k \to 0$. Тогда
$$g_2 \xrightarrow[k\to 0]{} \tilde{g}_2 = -\frac{4}{x}, \qquad z \xrightarrow[k\to 0]{} \tilde{z} = \frac{1}{3}(f'' + g'')x^2 - (f' + g')x + f + g.$$
Пусть теперь $m = 2$. Выражения для g_3 и z будут громоздкими, но они легко вычисляются с помощью систем компьютерной алгебры. Однако, если перейти к пределу при $k \to 0$ в формулах для g_3 и z, то получим
$$g_3 = -\frac{6}{x}, \qquad z = -\frac{1}{15}(f''' + g''')x^3 + \frac{2}{5}(f'' + g'')x^2 - (f' + g')x + f + g.$$
Можно выполнить обратный переход от уравнения (1.3) к уравнению (1.1) с помощью преобразования независимой переменной. Действительно, пусть $u(t,x) = v(t, y(x))$. Тогда, подставляя производные
$$u_{tt} = v_{tt}, \qquad u_x = y'v_y, \qquad u_{xx} = {y'}^2 v_{yy} + y''v_y$$
в (1.3), получаем
$$v_{tt} = {y'}^2 v_{yy} + \Big(y'' + gy'\Big)v_y.$$
Сравнивая с (1.1), приходим к системе
$$ab = {y'}^2, \qquad ab_y = y'' + gy', \tag{3.9}$$
где a, b – функции от y, g – функция от x. Выражая a из первого уравнения (3.9) и подставляя во второе, получаем
$$\frac{b_y}{b} = \frac{y'' + gy'}{{y'}^2}. \tag{3.10}$$
Если выбрать функции $y(x)$, $g(x)$ и затем выразить правую часть (3.10) через y, то получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции b. Решая его, находим b, а затем $a(y)$.

Пример 3. Пусть $g = -\frac{2}{x}$, $y = \operatorname{cth}(x)$. Тогда уравнение на функцию b
$$b_y = \frac{2(2\operatorname{cth}^2(y) - 1)}{\operatorname{cth}(y)} b$$
имеет решение
$$b = A\frac{\operatorname{sh}^4(y)}{\operatorname{ch}^2(y)}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$
Следовательно, функция a имеет вид
$$a = \frac{\operatorname{ch}^2(y)}{A}.$$

Как отмечалось ранее, общее решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{2}{x} u_x$$

записывается в виде

$$u = xV_x - V,$$

где $V = f_1(x+t) + f_2(x-t)$, $\quad f_1,\ f_2$ – произвольные гладкие функции. Следовательно, общее решение уравнения

$$v_{tt} = \operatorname{ch}^2(y)\Big(\frac{\operatorname{sh}^4(y)}{\operatorname{ch}^2(y)} v_y\Big)_y$$

имеет вид

$$v = \operatorname{cth}(y)\big(f_1'(\operatorname{cth}(y)+t) + f_2'(\operatorname{cth}(y)-t)\big) - \Big(f_1(\operatorname{cth}(y)+t) + f_2(\operatorname{cth}(y)-t)\Big).$$

Пример 4. Пусть $g = 2/x$, $y = \operatorname{cth}(x)$. Тогда уравнение на функцию b

$$b_y = \frac{2b}{\operatorname{cth}(y)},$$

имеет решение

$$b = \frac{\operatorname{ch}^2(y)}{A}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция a имеет вид

$$a = A\frac{\operatorname{sh}^4(y)}{\operatorname{ch}^2(y)}.$$

Как отмечалось ранее, общее решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2}{x} u_x$$

записывается в виде

$$u = \frac{f_1(x+t) + f_2(x-t)}{x},$$

где f_1, f_2 – произвольные гладкие функции. Следовательно, общее решение уравнения

$$v_{tt} = \frac{\operatorname{sh}^4(y)}{\operatorname{ch}^2(y)}\Big(\operatorname{ch}^2(y) v_y\Big)_y$$

имеет вид

$$v = \frac{f_1(\operatorname{cth}(y)+t) + f_2(\operatorname{cth}(y)-t)}{\operatorname{cth}(y)}.$$

Пример 5. Пусть теперь $g = 2/\operatorname{sh}(x)$, $y = \exp(x)$. Тогда функция имеет вид

$$b = A\frac{y(y-1)^2}{(y+1)^2}, \tag{3.11}$$

где A – произвольная константа. В этом случае функция a задается формулой

$$a = \frac{y(y+1)^2}{A(y-1)^2}. \tag{3.12}$$

Общее решение (1.3) с данной функцией g задается формулой (2.12). Подставляя $x = \ln y$ и найденные значения a, b, получаем общее решение уравнения (1.1) с функциями (3.11), (3.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.М. Бреховских. *Волны в слоистых средах.* М.: Наука. 1973.
2. Ж. Дарбу. *Лекции по общей теории поверхностей.* Т.2. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2013.
3. О.В. Капцов. *Методы интегрирования уравнений с частными производными.* М: Физматлит. 2009.
4. Л.В. Овсянников. *Лекции по основам газовой динамики.* М.: Наука. 1981.
5. А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики.* М: Физматлит. 2002.
6. Л. Эйлер. *Интегральное исчисление.* Т.3, М: ГИФМЛ. 1958.
7. L. Eisenhart. *Transformations of surfaces.* Chelsea Publ., Princeton. 1962.
8. C. Gu, H. Hu, Z. Zhou. *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry.* Springer, New York. 2005.
9. E.S. Hammond. *Periodic conjugate nets* // Ann. Math. **22**:4, 238—261 (1921).
10. V.B. Matveev. *Generalized Wronskian formula for solutions of the KdV equations: first applications* // Phys. Lett. A. **166**:3, 205–208 (1992).
11. V.B. Matveev, M.A. Salle. *Darboux transformations and solitons.* Springer-Verlag, New York. 1991.
12. C. Rogers, W.K. Schief. *Backlund and Darboux Transformations Geometry and Modern Applications in Soliton Theory.* Cambridge University Press, Cambridge. 2002.

Олег Викторович Капцов,
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44,
660036, г. Красноярск, Россия
E-mail: `kaptsov@icm.krasn.ru`

Мансур Мавлонович Мирзаохмедов,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79,
660041, г. Красноярск, Россия
E-mail: `mansur.mirzoahmedov@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 44-73.

УДК 517.957, 512.818.4, 519.142

Светлой памяти наших
учителей и старших коллег —
Алексею Борисовичу Шабату
и Равилю Исламовичу Ямилову
посвящается.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Д.В. МИЛЛИОНЩИКОВ, С.В. СМИРНОВ

Аннотация. В данной работе изучаются характеристические алгебры для систем экспоненциального типа, соответствующих вырожденным матрицам Картана. Эти системы обобщают хорошо известные в теории интегрируемых систем гиперболические уравнения синус-Гордон и Цицейки. Для таких систем, соответствующих матрицам Картана ранга 2, характеристические алгебры описаны явно в терминах образующих и соотношений, и доказано, что они имеют линейный рост. Исследуется связь между высшими симметриями этих систем и структурой их характеристических алгебр. Полностью описаны высшие симметрии экспоненциальной системы, отвечающей матрице Картана аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$. Получены также частичные результаты о симметриях систем, соответствующих другим вырожденным матрицам Картана ранга 2. Высказана гипотеза о структуре высших симметрий произвольной экспоненциальной системы, соответствующей вырожденной матрице Картана. Изучена интересная комбинаторика, связанная с оператором, порождающим характеристическую алгебру в самом простом случае — для интегрируемого по Дарбу уравнения Лиувилля. Найденные комбинаторные свойства могут оказаться весьма полезными для доказательства высказанной гипотезы о структуре высших симметрий. Кроме того, в данной статье давно используемому в литературе понятию характеристической алгебры гиперболической системы придается математически строгий смысл на основе понятия алгебры Ли–Райнхарта и на примерах продемонстрировано, что такая формализация действительно необходима.

Ключевые слова: характеристическая алгебра, высшая симметрия, уравнение Лиувилля, система экспоненциального типа.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30, 17B67, 17B70

1. Введение

В 1981 году А.Б. Шабатом и Р.И. Ямиловым была написана работа [1], в которой рассматривались так называемые *системы экспоненциального типа*, т.е. системы гиперболических уравнений в частных производных вида

$$w^j_{xy} = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} w^k\right), \quad j = 1, 2, \dots, r, \tag{1.1}$$

D.V. Millionschikov, S.V. Smirnov, Characteristic algebras and integrable exponential systems.

© Миллионщиков Д.В., Смирнов С.В. 2021.

Исследование С.В. Смирнова (параграфы 6, 7) выполнено за счет средств РНФ в рамках научного проекта №20-11-20214.

Поступила 21 апреля 2021 г.

где a_{jk} — постоянные коэффициенты, а функции w^j зависят от переменных x и y. Нетрудно проверить, что если матрица $M = (a_{jk})$ является матрицей Картана простой алгебры Ли серии A, то соответствующая система вида (1.1) сводится к двумеризованной цепочке Тоды

$$q_{j,xy} = \exp(q_{j+1} - q_j) - \exp(q_j - q_{j-1}), \quad j = 0, 1, \ldots, r, \tag{1.2}$$

с тривиальными граничными условиями $q_{-1} \equiv \infty$, $q_{r+1} \equiv -\infty$.

Исследование подобных систем вида (1.1) в работе [1] было основано на изучении *характеристических алгебр*, т.е. алгебр Ли, порожденных операторами D_y полного дифференцирования по переменной y в силу системы и $\frac{\partial}{\partial w^j}$. Шабатом и Ямиловым были высказаны две важных гипотезы об интегрируемости систем экспоненциального типа. Первая гипотеза состояла в том, что система (1.1) интегрируема по Дарбу (т.е. допускает полные наборы независимых характеристических интегралов по обеим переменным) тогда и только тогда, когда она является прямой суммой нескольких систем экспоненциального типа, матрицы M которых являются матрицами Картана простых алгебр Ли. Вторая гипотеза утверждала, что системы вида (1.1), не интегрируемые по Дарбу, но интегрируемые методом обратной задачи, соответствуют медленно растущим характеристическим алгебрам. Несмотря на то, что доказательство основной классификационной теоремы в работе [1] содержало некоторые пробелы, которые не устранены и по сей день (что, по-видимому, и явилось причиной того, что этот текст так и остался в статусе препринта), эта работа послужила отправной точкой для большого количества исследований и публикаций на тему систем экспоненциального типа. В частности, в статье [2] были изучены интегрируемые системы экспоненциального типа с матрицами Картана размера 2, а в статье [3] — системы, соответствующие невырожденным матрицам Картана и, в частности, системы, соответствующие алгебрам Ли серии A, были проинтегрированы в явном виде. Отметим также работы уфимской школы [4]–[6], в которых изучались редукции систем экспоненциального типа и их связь с высшими симметриями, и целый ряд работ [7]–[17], в которых исследовались дискретные аналоги систем экспоненциального типа.

Хотя идеи, связанные с понятием характеристической алгебры неявно использовались еще Гурса [18] при его попытках классификации интегрируемых по Дарбу скалярных гиперболических уравнений, соответствующее определение было введено лишь в последней четверти двадцатого века в статье [19]. Впоследствии понятие характеристической алгебры широко использовалось при изучении интегрируемых по Дарбу дискретных и полудискретных уравнений в работах уфимской школы [20]–[30]. Подробное описание применений характеристических алгебр при изучении нелинейных уравнений содержится в книге [31]. Симметрии уравнений Клейна–Гордона изучались в статье [32].

Характеристические алгебры интегрируемых гиперболических уравнений дают примеры градуированных бесконечномерных алгебр Ли линейного роста. В статье [21] была изучена характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон, которая имеет скорость роста $\frac{3}{2}$, а в работе [25] была исследована характеристическая алгебра уравнения Цицейки, растущая со средней скоростью $\frac{4}{3}$. В работах [33], [34] были построены бесконечные линейные базисы для этих алгебр Ли и было показано, что они изоморфны неотрицательной части алгебры петель $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ и скрученной алгебре петель простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ соответственно.

Данная работа направлена на развитие некоторых идей, высказанных в препринте [1], и на продвижение в доказательстве высказанных там гипотез и преследует несколько целей. Во-первых, мы хотим придать должную алгебраическую строгость понятию характеристической алгебры (будут приведены примеры, показывающие, что в дискретном случае это совершенно необходимо): мы покажем, что к этим объектам естественно относиться не как к алгебрам Ли (или кольцам Ли), а как к алгебрам Ли–Райнхарта. Во-вторых, мы исследуем любопытную комбинаторику, связанную с уравнением Лиувилля — самым простым представителем класса экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана. И, в-третьих, мы опишем в явном виде характеристические алгебры экспоненциального типа (1.1) с вырожденными матрицами Картана ранга 2 и опишем высшие симметрии для некоторых из них. Как и в случае систем ранга 1, сводящихся к уравнениям sin-Гордон и Цицейки, характеристические алгебры этих систем имеют линейный рост.

В параграфе 2 дается краткий обзор известных результатов об интегрируемости систем экспоненциального типа, соответствующих матрицам Картана. В параграфе 3 вводится понятие алгебры Ли–Райнхарта, описывается структура характеристических алгебр уравнений sin-Гордон и Цицейки и приводится пример, показывающий, что характеристические алгебры правильно рассматривать именно как алгебры Ли–Райнхарта. Параграф 4 посвящен описанию понятия роста бесконечномерных алгебр Ли. В параграфе 5 изучается любопытная комбинаторика, связанная с характеристическими интегралами и симметриями уравнения Лиувилля. Параграф 6 посвящен явному описанию в терминах образующих и соотношений характеристических алгебр экспоненциальных систем, отвечающих вырожденным матрицам Картана ранга 2. В параграфе 7 описывается иерархия симметрий для системы, отвечающей аффинной матрице Картана $A_2^{(1)}$ и приводятся некоторые частичные результаты о высших симметриях систем, отвечающих другим вырожденным матрицам Картана ранга 2.

2. Системы экспоненциального типа и матрицы Картана

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений в частных производных экспоненциального типа, являющуюся многомерным обобщением классического уравнения Лиувилля

$$w^i_{xy} = e^{\rho_i}, \quad \rho_j = a_{i1}w^1 + \dots + a_{ir}w^r, \quad i = 1, \dots, r. \tag{2.1}$$

Лезнов [3] показал, что, если матрица коэффициентов $M = (a_{ij})$ является невырожденной матрицей Картана, то соответствующая экспоненциальная гиперболическая система (2.1) интегрируема по Дарбу. В его доказательстве [3] для матрицы Картана из серии A было явно найдено точное решение системы, зависящее от $2r$ произвольных функций, т.е. было явно построено многомерное обобщение классического решения одномерного уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Позднее в препринте [1] было высказано утверждение (предположение), что основной результат из работы [3] может быть перенесен и на случай произвольной матрицы Картана M, возможно вырожденной, при помощи метода обратной задачи рассеяния. Случай $r = 2$ был полностью разобран в [1, 2]:

$$\begin{cases} w^1_{xy} = e^{(a_{11}w^1 + a_{12}w^2)} \\ w^2_{xy} = e^{(a_{21}w^1 + a_{22}w^2)} \end{cases}, \qquad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Было показано [1, 2], что для вырожденных матриц Картана

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствующие экспоненциальные системы (2.2) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. Характеристические алгебры Ли этих уравнений (мы будем о них говорить в следующем параграфе) изоморфны некоторым подалгебрам Ли в алгебрах Ли $A_1^{(1)}, A_2^{(2)}$. Экспоненциальные системы (2.2), отвечающие невырожденным 2×2-матрицам Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

полупростых алгебр Ли $A_1 \oplus A_1, A_2, C_2, G_2$ являются интегрируемыми в явном виде.

Рассмотрим теперь вырожденную матрицу Картана $M = (a_{ij})$. Ее последнюю строку l_r можно представить в виде линейной комбинации первых $r-1$ строк:

$$l_r = \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_{r-1} l_{r-1}.$$

Введем новые переменные

$$u^i = a_{i1} w^1 + \dots + a_{ir} w^r, \quad i = 1, 2, \dots r-1.$$

Тогда систему (2.1) можно переписать в виде

$$u^i_{xy} = a_{i1} e^{u_1} + a_{i2} e^{u_2} + \dots + a_{ir-1} e^{u_{r-1}} + a_{ir} e^{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{r-1} u_{r-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Таким образом, для вырожденных матриц Картана размера r соответствующая экспоненциальная система сводится к системе, состоящей из $r-1$ гиперболического уравнения. В частности, вырожденные матрицы Картана размера 2 приводят к скалярным уравнениям sin-Гордон и Цицейки. В параграфе 6 мы изучим системы, к которым сводятся экспоненциальные системы, отвечающие вырожденным матрицам Картана размера 3.

3. Характеристические алгебры Ли–Райнхарта

Напомним конструкцию одного обобщения понятия алгебры Ли, известного в литературе под названием алгебры Ли–Райнхарта.

Определение 3.1 ([35]). *Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и A — коммутативная R-алгебра. Пара $(A, \mathcal{L})$ называется алгеброй Ли–Райнхарта, если*

1) $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли над R, которая действует на A левыми дифференцированиями, т.е.

$$X(ab) = X(a)b + aX(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in \mathcal{L};$$

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ является A-модулем.

Пара $(A, \mathcal{L})$ должна удовлетворять следующим условиям совместности

$$[X, aY] = X(a)Y + a[X, Y] \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathcal{L}, \ a \in A;$$
$$(aX)(b) = a(X(b)) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in \mathcal{L}.$$

Морфмизмом $\varphi : (A, \mathcal{L}) \to (A, \tilde{\mathcal{L}})$ алгебр Ли–Райнхарта $(A, \mathcal{L})$ и $(A, \tilde{\mathcal{L}})$ называется морфизм $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ алгебр Ли над R, согласованный с действием $\mathcal{L}$ на A.

Оказывается, что понятие алгебры Ли–Райнхарта естественным образом возникает в теории характеристических алгебр Ли гиперболических систем. В качестве базового примера разберем пример характеристической алгебры Ли $\chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона.

В [33], [34] было установлено, что в характеристической алгебре Ли

$$\chi(\sinh(u)) = \mathcal{L}ie(X_0, X_1)$$

можно выбрать бесконечный базис $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$, такой, что

$$[X_i, X_j] = c_{ij} X_{i+j}, \qquad c_{ij} = \begin{cases} 1, & j - i \equiv 1 \bmod 3 \\ 0, & j - i \equiv 0 \bmod 3 \\ -1, & j - i \equiv -1 \bmod 3 \end{cases}, \qquad i, j \geq 0. \tag{3.1}$$

Структурные соотношения (3.1) совпадают с каноническими соотношениями для базисных элементов алгебры неотрицательных петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))^{\leqslant 0}$ над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ или в других терминах, — неотрицательной части аффинной алгебры Каца–Муди $A_1^{(1)}$.

Сама характеристическая алгебра Ли $\chi(\sinh(u))$ является обычной алгеброй Ли, но в доказательстве ее коммутационных соотношений существенным образом используется структура некоторой вспомогательной алгебры Ли–Райнхарта. Тут стоит сразу заметить, что в монографии [31], а также в целом ряде статей [25] – [28] и др. использовался термин *кольцо Ли*. Этот выбор был не совсем удачным, сейчас в литературе все чаще применяется более правильный (на наш взгляд) термин *алгебра Ли–Райнхарта* [30].

Напомним некоторые известные конструкции. Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона $u_{xy} = f(u)$, полученное из классического уравнения

$$u_{tt} - u_{zz} = f(u)$$

заменой переменных $x = \frac{z+t}{2}, \quad y = \frac{z-t}{2}$.

Определим сложную функцию $g(x, y)$ при помощи функции многих переменных g и некоторого решения $u(x, y)$ уравнения Клейна–Гордона:

$$u = u(x, y), \quad g(x, y) = g(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = g(u, u_1, u_2, u_3, \dots),$$

где использованы обозначения

$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad u_3 = u_{xxx}, \quad \dots.$$

Классическая конструкция: при вычислении частной производной $\frac{\partial g}{\partial x}$ сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u_1} + \dots = u_1\frac{\partial g}{\partial u} + u_2\frac{\partial g}{\partial u_1} + \dots$$

возникает оператор $D = \frac{\partial}{\partial x}$ частной производной по x

$$D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k} + \dots. \tag{3.2}$$

Определение 3.2. *Многочлен* $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = F(u, u_1, u_2, u_3, \dots)$ *называется* y*-интегралом уравнения Клейна–Гордона, если* $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(u, u_1, u_2, \dots) &= u_y\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_1} + u_{xxy}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots \\ &= \underbrace{u_y\frac{\partial F}{\partial u}}_{=0} + \underbrace{f\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots}_{=0}.\end{aligned}$$

Полином F будет y-интегралом, если будут выполняться условия

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad X_f(F) = f\frac{\partial F}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial F}{\partial u_2} + D^2(f)\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots = 0.$$

Напомним, что характеристической алгеброй $\chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона называется алгебра Ли $\mathcal{L}ie(X_0, X_{\sinh u})$, порожденная двумя дифференциальными операторами $X_0, X_{\sinh u}$, где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_{\sinh u} = \sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_n}$$

и $D_y = X_{\sinh u} + X_0$. Строить нужный нам бесконечный базис в $\chi(\sinh(u))$ будем последовательно, для этого рассматриваем всевозможные коммутаторы высших порядков от образующих X_0, $X_{\sinh u}$.

На первом шаге зафиксируем линейную оболочку $\langle X_0, X_{\sinh u}, Y_1\rangle$, где $Y_1 = [X_0, X_{\sinh u}]$ и рассмотрим в ней другой базис

$$X_0, \quad X_1 = X_{\sinh u} + Y_1, \quad X_2 = X_{\sinh u} - Y_1.$$

Новые операторы могут быть записаны следующим образом

$$X_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(e^u)\frac{\partial}{\partial u_n}, \qquad X_2 = -\sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Заметим, что эти операторы можно выразить через многочлены Белла $B_n(u_1, \dots, u_n)$, о которых будем говорить более подробно в параграфе 5:

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{+\infty} B_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n}, \qquad X_2 = -e^{-u} \sum_{n=1}^{+\infty} B_{n-1}(-u_1, \dots, -u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Первая идея доказательства [33], [34] — это представить характеристическую алгебру Ли $\chi(\sinh(u))$ как алгебру Ли $\mathcal{L}ie(X_0, X_1, X_2)$, порожденную не двумя, а тремя элементами X_0, X_1, X_2. Преимущество представления $\chi(\sinh(u)) = \mathcal{L}ie(X_0, X_1, X_2)$ заключается в следующих двух коммутационных соотношениях

$$[X_0, X_1] = X_1, \qquad [X_0, X_2] = -X_2,$$

которые означают, что векторы X_1, X_2 являются собственными для оператора $\operatorname{ad} X_0$, равно как и все их высшие коммутаторы. Именно это соображение и будет ключевым во всех вычислениях.

Второй идеей доказательства из [33], [34] является наблюдение, что коммутационные соотношения (3.1) можно находить без получения явных формул для самих операторов $X_3, X_4, X_5, \dots$. Данная идея не является оригинальной и основана на известной элементарной лемме.

Лемма 3.1 ([31]). *Пусть дифференциальный оператор*

$$X = \sum_{i=1}^{+\infty} P_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad P_i = P_i(u, u_1, \dots, u_n, \dots),$$

коммутирует с оператором D. Тогда $X = 0$.

Сразу отметим, что в равенстве $[D, X_0] = 0$ нет никакого противоречия с предыдущей леммой, т.к. оператор $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}$ не имеет указанный в условии леммы 3.1 вид.

Не сложно проверить и другие коммутационные соотношения

$$[D, X_1] = -e^u X_0, \qquad [D, X_2] = e^{-u} X_0.$$

Появление функциональных множителей вида e^u, e^{-u} в правых частях этих формул и указывает на необходимость рассмотрения алгебр Ли–Райнхарта вместо обычных алгебр Ли.

Приведем в качестве примера еще одно коммутационное соотношение, где так же возникают функциональные множители e^u, e^{-u}

$$[D, X_3] = [D, [X_1, X_2]] = -\left[e^u X_0, X_2\right] + \left[X_1, e^{-u} X_0\right] = e^u X_2 - e^{-u} X_1.$$

Что можно сказать об алгебре Ли $\mathcal{L}ie(D, X_0, X_1, X_2)$, порожденной операторами D, X_0, X_1, X_2? Именно ее и надо реализовывать как подалгебру Ли в алгебре Ли–Райнхарта $(A, \mathcal{L})$, где A обозначает коммутативную алгебру квазимногочленов вида

$$A = \left\{ \sum_{k=-n}^{m} e^{ku} P_k, \quad P_k \in \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, \dots], \quad n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

а алгебра Ли $\mathcal{L}$ является алгеброй квазиполиномиальных дифференциальных операторов

$$X = f_0 \frac{\partial}{\partial u} + f_1 \frac{\partial}{\partial u^1} + f_2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \dots, \quad f_i \in A, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Заметим сразу, что

$$[D, -e^u X_0] = -D(e^u)X_0 = -e^u u_1 X_0, \qquad [D, e^{-u} X_0] = -e^{-u} u_1 X_0.$$

Продолжив этот процесс рекуррентно, мы видим, что алгебре Ли $\mathcal{L}ie(D, X_0, X_1, X_2)$ принадлежат и операторы с коэффициентами в виде квазимногочленов произвольных весов

$$-e^u B_n(u_1, \ldots, u_n)X_0, \qquad e^{-u} B_k(-u_1, \ldots, -u_n)X_0, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Было бы интересно изучить $\mathcal{L}ie(D, X_0, X_1, X_2)$ с точки зрения бесконечномерных $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли. Представляется, что она должна быть изоморфна одной из известных таких алгебр.

Однако главной целью всех наших вычислений является все же доказательство коммутационных соотношений (3.1).

$$[D, X_4] = -[[D, X_1], X_3] - [X_1, [D, X_3]] = [e^u X_0, X_3] - \left[X_1, e^u X_2 + e^{-u} X_1\right] = -e^u X_3,$$

где $X_4 = -[X_1, X_3]$.

Докажем, что $[X_1, X_4] = 0$. Для этого вычислим такой двойной коммутатор

$$[D, [X_1, X_4]] = [[D, X_1], X_4] + [X_1, [D, X_4]] = -[e^u X_0, X_4] - [X_1, e^u X_3] = -e^u X_4 + e^u X_4 = 0.$$

Аналогичным образом доказывается [34], что $[X_2, X_5] = 0$.

Далее определяем индуктивно все операторы канонического бесконечного базиса для характеристической алгебры Ли $\chi(\sinh(u))$ формулами

$$X_{3k+1} = -[X_1, X_{3k}], \qquad X_{3k+2} = [X_2, X_{3k}], \qquad X_{3k+3} = [X_1, X_{3k+2}], \qquad k \geq 1.$$

И уже для этих операторов по индукции доказываются коммутационные соотношения (3.1).

Следуя работе [2], можно предложить и другой способ алгебраических рассуждений. Он заключается в том, что у базисных операторов «убираются» функциональные множители вида $e^{\lambda u}$, иными словами, мы вводим новые операторы

$$L_{3k+1} = e^{-u} X'_{3k+1}, \qquad L_{3k+2} = e^u X'_{3k+2}, \qquad L_{3k+3} = X'_{3k+3}.$$

Очевидно, что новые дифференциальные операторы L_i удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (3.1), что и операторы X_i, но при этом они будут полиномиальными, т.е. они будут являться дифференцированиями алгебры полиномов $\mathbb{C}[u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots]$.

Коммутационные соотношения с участием оператора D изменят свой вид. Выпишем два основных таких соотношения.

$$[D, L_1] = -u_1 L_1, \quad [D, L_2] = u_1 L_2. \tag{3.3}$$

Мы приходим к конструкции так называемой *полиномиальной алгебры Ли*, предложенной Бухштабером [36]. Полиномиальная алгебра Ли по Бухштаберу — это алгебра Ли–Райнхарта в ситуации, когда алгебра A является некоторой алгеброй многочленов (чаще всего от конечного числа переменных), и при этом должны выполняться два важных дополнительных условия:

1) алгебра Ли $\mathcal{L}$, участвующая в определении, должна быть свободным модулем (чаще всего конечномерным) над алгеброй A;

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ и полиномиальная алгебра A должны быть градуированными, причем градуировки должны быть согласованы в естественном смысле.

Как было показано в [37] на примере $\chi(\sinh(u))$, изучение характеристических алгебр Ли приводит к необходимости рассматривать полиномиальные алгебры Ли A от бесконечного числа переменных, причем алгебры Ли, являются, вообще говоря, модулями счетного ранга над полиномиальной алгеброй A.

Определим теперь $\mathbb{Z}$-градуировки полиномиальной алгебры $A = \mathbb{C}[u_1, u_2, \dots, u_p, ...]$ и алгебры Ли $\mathcal{L}$ для характеристической алгебры Ли уравнения синус-Гордон, задав веса $w(u_i)$ образующих $u_1, u_2, u_3, \dots$ алгебры A и веса $w(L_i), w(D)$ базисных операторов $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ алгебры Ли $\mathcal{L}$

$$w(u_i) = -i, \quad w(D) = -1, \quad w(L_i) = i, \quad \text{где} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Полиномиальная алгебра Ли $(\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots], \mathcal{L})$ счетного ранга определяется при помощи счетного базиса $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ алгебры Ли $\mathcal{L}$, т.е. базиса левого модуля $\mathcal{L}$ над алгеброй многочленов $A = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, \dots]$.

1) базисные элементы $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ должны удовлетворять коммутационным соотношениям (3.1) и (3.3).

2) действие алгебры $\mathcal{L}$ на алгебре многочленов $\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots]$ задается действием базисных операторов на переменных u_i

$$D(u_i) = u_{i+1}, \quad L_1(u_i) = B_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-1}), \quad L_2(u_i) = B_{i-1}(-u_1, \dots, -u_{i-1}), \quad i \geq 1.$$

3) действие базисных операторов L_k при $k \geq 3$, определяется по индукции, начиная с действия образующих L_1, L_2

$$L_3(u_i) = L_1 L_2(u_i) - L_2 L_1(u_i) = L_1(B_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}) - L_2 B_i(-u_1, -u_2, \dots, -u_{i-1}).$$

Коммутаторы $[D, L_k]$ для $k \geq 3$, определяются аналогично:

$$[D, L_3] = [D, [L_1, L_2]] = [[D, L_1], L_2] + [L_1[D, L_2]] = L_1 - L_2.$$

Анализ других примеров из приложений показывает, что и сами характеристические алгебры Ли могут иметь дополнительную структуру алгебры Ли–Райнхарта, что может существенно упростить поиск высших симметрий гиперболических систем. Это направление сейчас активно развивается [30].

Понятие характеристической алгебры допускает обобщение на случай полудискретных и полностью дискретных гиперболических уравнений [20], [22]. Если уравнение не симметрично по отношению к двум независимым переменным (а в полудискретном случае это всегда так), то необходимо определить две характеристические алгебры — по каждому из характеристических направлений. Мы не будем приводить здесь общей теории из работ [20], [22], а лишь ограничимся рассмотрением одного поучительного примера и дадим все необходимые для него определения.

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$u_{n+1,x} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n,x}), \tag{3.4}$$

где u — функция двух независимых переменных: непрерывной переменной x и дискретной n, зависимость от которой по традиции указывается в виде нижнего индекса. Аналитическая функция $I = I(u_{n,x}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots)$ называется *x-интегралом* уравнения (3.4), если ее полная производная по x в силу уравнения равна нулю: $D(I) = 0$, где

$$D = u_{n,xx} \frac{\partial}{\partial u_{n,x}} + u_{n,x} \frac{\partial}{\partial u_n} + f \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} + (Tf) \frac{\partial}{\partial u_{n+2}} + (T^2 f) \frac{\partial}{\partial u_{n+3}} \dots,$$

а T — оператор сдвига по дискретной переменной: $Tf = f(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+1,x})$. Нетрудно заметить, что если функция I является интегралом уравнения (3.4), то она не может зависеть от $u_{n,x}$, поскольку в этом случае при применении оператора D мы получим слагаемое, содержащее $u_{n,xx}$, которое ни с чем не может сократиться. Таким образом, всякий x-интеграл также должен удовлетворять условию $X_0(I) = 0$, где $X_0 = \frac{\partial}{\partial u_{n,x}}$.

Алгебра Ли χ_x, порожденная операторами D и X_0, называется *x-характеристической алгеброй* уравнения (3.4). Из предыдущих рассуждений следует, что функция I является x-интегралом уравнения (3.4) если и только если она аннулирует характеристическую алгебру χ_x. По аналогии с идеями из работ [1], [2] естественно предположить, что уравнение (3.4) допускает нетривиальные x-интегралы если и только если его характеристическая алгебра конечномерна. Однако, как показывает следующий пример, в таком виде это утверждение неверно.

Пример 3.1. Рассмотрим полудискретный аналог уравнения Лиувилля

$$u_{n+1,x} - u_{n,x} = e^{u_{n+1}} + e^{u_n}.$$

Это уравнение было детально изучено в статье [38], где было показано, что по своим свойствам оно совершенно аналогично непрерывному уравнению Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Например, оно обладает x-интегралом

$$I = (1 + e^{u_{n+1}-u_{n+2}})(1 + e^{u_{n+1}-u_n}).$$

Изучим характеристическую алгебру χ_x этого уравнения. Нетрудно проверить, что в данном случае для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$T^k f = u_{n,x} + e^{u_n} + 2\left(e^{u_{n+1}} + e^{u_{n+2}} + \dots + e^{u_{n+k}}\right) + e^{u_{n+k+1}}.$$

Поэтому оператор D можно представить в виде $D = X_0 + u_{n,x}Y + W$, где

$$Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}, \quad W = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(e^{u_n} + 2\sum_{j=1}^{i-1} e^{u_{n+j}} + e^{u_{n+i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}.$$

Рассматривая коммутационные соотношения, нетрудно убедиться в том, что

$$[X_0, D] = Y, \quad [Y, D] = W,$$

откуда следует, что $Y, W \in \chi_x$. Поскольку $D \in \chi_x$, то $u_{n,x}Y = D - X_0 - W \in \chi_x$. Далее,

$$[u_{n,x}Y, W] = u_{n,x}W \in \chi_x,$$
$$[u_{n,x}Y, u_{n,x}W] = (u_{n,x})^2 W \in \chi_x,$$
$$[u_{n,x}Y, (u_{n,x})^2 W] = (u_{n,x})^3 W \in \chi_x,$$

и т.д. Легко видеть, что в данном случае характеристическая алгебра χ_x является бесконечномерной, как алгебра Ли над полем констант. Тем не менее, она является конечномерным модулем над кольцом многочленов от переменной $u_{n,x}$ и порождена полями X_0, Y и W, как алгебра Ли–Райнхарта.

Характеристические алгебры могут быть определены и эффективно использованы при изучении произвольных систем гиперболических уравнений. Рассмотренный пример показывает, что при переходе от экспоненциальных систем к общему случаю (как в дискретном, так, вообще говоря, и в непрерывном случае), характеристическую алгебру нужно определять не как алгебру Ли, а как алгебру Ли–Райнхарта и рассматривать ее размерность именно в этом смысле. Т.е. именно понятие алгебры Ли–Райнхарта дает в данном случае подходящую алгебраическую конструкцию.

4. Рост характеристических алгебр Ли

Появление и развитие теории характеристических алгебр в ее применении к теории симметрий гиперболических систем произошло по времени чуть позже появления первых работ Каца и Муди, в которых были заложены основы теории аффинных алгебр — *контрагредиентных алгебр Ли*, как они тогда назывались.

В конце 60-х годов Виктор Кац приступил к изучению простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_k$, удовлетворяющих следующему условию на размерности однородных компонент

$$\dim \mathfrak{g}_k \le P(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $P(t)$ — некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами. Такие бесконечномерные алгебры Ли Кац стал называть алгебрами Ли *конечного роста*.

Кац доказал [39], что бесконечномерная простая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечного роста, удовлетворяющая некоторым двум техническим условиям, изоморфна одной алгебре Ли (и только одной) из следующего списка (см. [40] для уточнения определений и обозначений)

- аффинные алгебры без центра — шесть бесконечных серий и семь исключительных алгебр

$$A_n^{(1)},\quad B_n^{(1)},\quad C_n^{(1)},\quad D_n^{(1)},\quad A_n^{(2)},\quad D_n^{(2)},\quad E_6^{(2)},\quad D_4^{(3)},\quad E_6^{(1)},\quad E_7^{(1)},\quad E_8^{(1)},\quad F_4^{(1)},\quad G_2^{(1)};$$

- алгебры Ли Картановского типа W_n, S_n, K_n, H_n.

В дополнение к своей теореме Кац сформулировал гипотезу, что отказ от дополнительных технических условий из его теоремы добавит к этому списку лишь одну простую $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли — алгебру Витта W. Гипотеза Каца была доказана Матье в 1990 году [40].

Появление термина *рост алгебры Ли* в работе Каца тоже не случайно, ведь теория роста групп и алгебр появилась и стала очень популярной именно в те самые годы [41]: конец 60-х и начало 70-х годов (понятие роста группы появилось чуть раньше). Термин *конечный рост* из работы [39] все-таки не прижился в алгебраической литературе, обычно сейчас говорят про *полиномиальный рост*.

Дадим современное определение функции роста алгебры Ли (см. детали в [41]). Предположим, что бесконечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена конечномерным подпространством $V_1(\mathfrak{g})$. Обозначим через $V_n(\mathfrak{g})$ подпространство $V_1(\mathfrak{g})$, натянутое на высшие коммутаторы длины не больше $n \geq 2$ с произвольной расстановкой скобок. Возникает цепочка бесконечномерных подпространств

$$V_1(\mathfrak{g}) \subset V_2(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset V_n(\mathfrak{g}) \subset \ldots, \quad \cup_{i=1}^{+\infty} V_i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}.$$

Определим функцию роста $F_{\mathfrak{g}}(n) = \dim V_n(\mathfrak{g})$. Однако такое определение не является инвариантным — оно очевидным образом зависит от выбора порождающего множества V_1.

Например, если выбрать другое порождающее множество $\tilde{V}_1(\mathfrak{g})$ такое, что $\tilde{V}_1(\mathfrak{g}) \subset V_m(\mathfrak{g})$ для некоторого натурального m, то возникнет такая оценка на две функции роста

$$\tilde{F}_{\mathfrak{g}}(n) = \dim \tilde{V}_n(\mathfrak{g}) \leq \dim V_{mn}(\mathfrak{g}) = F_{\mathfrak{g}}(mn).$$

Ростом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется класс эквивалентности ее функций роста [41]. Функции роста $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называются *эквивалентными*, если найдутся такие константы $c, m, \tilde{c}, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, что

$$f(n) \leq cg(mn), \quad g(n) \leq \tilde{c} f(\tilde{m} n),$$

для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

Выделяются три типа роста алгебр Ли: 1) полиномиальный; 2) экспоненциальный (так растет свободная алгебра Ли от конечного числа образующих; 3) промежуточный, или субэкспоненциальный рост.

Полиномиальный тип роста удобно характеризуется при помощи другого инварианта, который называется в литературе *размерностью Гельфанда–Кириллова* [42]

$$\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \dim V_n(\mathfrak{g})}{\log n}.$$

Конечность размерности Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g}$ означает, что существует полином $P(x)$ такой, что $\dim V_n(\mathfrak{g}) < P(n)$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является конечномерной, то ее размерность Гельфанда–Кириллова равняется нулю: $\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g} = 0$. Неформально можно сказать еще так: если размерность Гельфанда–Кириллова алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равна некоторому вещественному числу α, то функция роста алгебры Ли $\mathfrak{g}$ растет со скоростью степенной функции Cn^{α}, где C — некоторая положительная константа.

При изучении роста характеристических алгебр Ли нужно иметь в виду целый ряд дополнительных обстоятельств. Первое из них отражено в следующей лемме, которая характеризует, в частности, характеристические алгебры Ли экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана.

Лемма 4.1 ([34]). *Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — бесконечномерная алгебра Ли, порожденная конечномерным подпространством*

$$V_1(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

где $\mathfrak{g}_0$ — коммутативная подалгебра Ли в $\tilde{\mathfrak{g}}$, а подпространство $\mathfrak{g}_1$ размерности q инвариантно относительно действия $\mathfrak{g}_0$ на $\tilde{\mathfrak{g}}$. Предположим также, что $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{g}_1$ диагонализируем и его соответствующие веса $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathfrak{g}_0^*$ нетривиальны. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$, порожденную подпространством $\mathfrak{g}_1$. Тогда функции роста $F_{\mathfrak{g}}(n)$ и $F_{\tilde{\mathfrak{g}}}(n)$ отличаются друг от друга на константу

$$F_{\tilde{\mathfrak{g}}}(n) = F_{\mathfrak{g}}(n) + \dim \mathfrak{g}_0.$$

Следствие 4.1. *У алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ размерности Гельфанда–Кириллова совпадают.*

В уже разобранном примере характеристической алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = \chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона коммутативная подалгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \langle X_0 \rangle$ одномерна, а двумерное подпространство $\mathfrak{g}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$ определялось как линейная оболочка

$$\mathfrak{g}_1 = \langle X(\sinh(u)), [X_0, X(\sinh(u))] \rangle.$$

Общий вывод таков: если характеристическая алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет свойствам в условии леммы 4.1, то можно изучать рост ее коммутанта $\mathfrak{g} = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ вместо роста всей алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Второе свойство, которое характеризует характеристические алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана — это естественная положительная градуировка их коммутантов $\mathfrak{g} = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$.

Определение 4.1. *$\mathbb{N}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется естественно градуированной, если*

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_{k+1}, \quad \text{где} \quad k \geq 1. \tag{4.1}$$

Для естественно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ можно определить одну выделенную функцию роста $F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n)$ [34], выбрав в качестве порождающего подпространства $V_1(\mathfrak{g})$ однородную компоненту $\mathfrak{g}_1$. Очевидны следующие свойства

$$F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n) = \dim V_n(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathfrak{g}_i = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{n+1}),$$

где $\mathfrak{g}^{n+1}$ обозначает $(n+1)$-й идеал нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 4.2. *$\mathbb{N}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется алгеброй Ли* ограниченной ширины, *если размерности всех ее однородных компонент равномерно ограничены некоторой константой C*

$$\dim \mathfrak{g}_k \leq C, \quad \text{где } k \geq 1.$$

Наибольшая размерность среди размерностей $\dim \mathfrak{g}_k$ однородных компонент алгебры Ли ограниченной ширины называется ее шириной $d(\mathfrak{g})$.

Для произвольной естественно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ ширины $d(\mathfrak{g})$ функция $F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n)$ растет не быстрее, чем $d(\mathfrak{g})n$:

$$F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n) \leq d(\mathfrak{g})n.$$

Следовательно, размерность Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GKdim}\,\mathfrak{g}$ произвольной алгебры Ли конечной ширины равна единице: $\mathrm{GKdim}\,\mathfrak{g} = 1$.

В работе [34] показано, что характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки растут со средней линейной скоростью $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$ соответственно. В параграфе 6 мы покажем, что характеристические алгебры систем, соответствующие вырожденным матрицам Картана ранга 2, также имеют линейный рост.

В ряде работ, в частности в монографии [31], высказывалась гипотеза, что интегрируемость экспоненциальных гиперболических нелинейных систем определяется ростом соответствующей характеристической алгебры Ли. Нам представляется, что и интегрируемость и медленный рост характеристических алгебр Ли — все это косвенные проявления свойств матриц Картана. В любом случае не стоит сильно надеяться на ограничения, возникшие только из-за медленного роста. Отметим также, что $\mathbb{Z}$-градуированные алгебр Ли из списка Каца являются простыми и это очень сильное условие. Характеристические же алгебры Ли, если и обладают, то неотрицательной градуировкой, а значит уже в принципе не могут быть простыми. К требованиям медленного роста необходимо добавить ряд дополнительных требований. Все это в данный момент можно рассматривать только как план будущих исследований.

5. Комбинаторика уравнения Лиувилля

Этот параграф посвящен свойствам интегралов и симметрий уравнения Лиувилля с точки зрения формальной алгебры и комбинаторики. Рассмотрим уравнение Лиувилля $u_{xy} = f(u) = e^u$. Легко проверяется явным вычислением, что многочлен

$$q_2 = 2u_2 - u_1^2 = 2u_{xx} - u_x^2$$

будет y-интегралом уравнения Лиувилля.

Определим полиномиальный дифференциальный оператор X формулой $X_{e^u} = e^u X$, т.е.

$$X = \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + (u_1^2 + u_2)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots.$$

Коэффициенты этого оператора известны в комбинаторике под названием полных многочленов Белла B_k

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})\frac{\partial}{\partial u_k}.$$

В книге Риордана [43] можно найти много интересных комбинаторных свойств многочленов Белла, они также имеют множество приложений.

Порождающей функцией для многочленов Белла $B_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i\frac{t^i}{i!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(u_1, \dots, u_n)\frac{t^n}{n!}.$$

В [43] приведена также и такая рекуррентная формула для многочленов Белла $B_n(u_1, \dots, u_n)$:

$$(D + u_1)B_k = B_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Следствие 5.1. *Верно равенство:*

$$B_n(u_1, \dots, u_n) = (D + u_1)^n(1). \tag{5.1}$$

При помощи формулы (5.1) удобно последовательно выписывать многочлены Белла

$$
\begin{aligned}
B_1(u_1) &= (D+u_1)(1) = u_1,\\
B_2(u_1,u_2) &= (D+u_1)(u_1) = u_2+u_1^2,\\
B_3(u_1,u_2,u_3) &= (D+u_1)(u_2+u_1^2) = u_3+3u_1u_2+u_1^3,\\
B_4(u_1,u_2,u_3,u_4) &= (D+u_1)(B_3(u_1,u_2,u_3)) = u_1^4+6u_1^2u_2+4u_1u_3+3u_2^2+u_4.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Полные многочлены Белла могут быть рекуррентно определены и другим способом:

$$
B_0 = 1, \quad B_{n+1}(u_1,u_2,\dots,u_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}(u_1,u_2,\dots,u_{n-i})u_{i+1}.
$$

Определим градуировку в алгебре полиномов $A = \mathbb{K}[u_1,u_2,u_3,\dots]$ на ее образующих

$$
w(u_k) = k, \quad k = 1,2,3,\dots,
$$

распространив ее потом по мультипликативности на все многочлены. Например, многочлен $q_2 = 2u_2 - u_1^2$ является однородным веса 2. Заметим, что эта градуировка отличается знаком от градуировки алгебры $A = \mathbb{K}[u_1,u_2,u_3,\dots]$, введенной в параграфе 3.

Таким образом, алгебра A является положительно градуированной

$$
A = \oplus_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n = \{P \in A, w(P) = n\}.
$$

Оператор X уменьшает вес $w(P)$ каждого однородного полинома $P \in A_n$ на единицу, а оператор D и оператор умножения на u_1 наоборот — эти операторы увеличивают вес каждого однородного многочлена ровно на единицу

$$
X: A_n \to A_{n-1}, \quad D: A_n \to A_{n+1}, \quad u_1: A_n \to A_{n+1}, \quad n \geq 1.
$$

Определим возрастающую фильтрацию $\{A^m, m \geq 0\}$ алгебры A

$$
A^0 = \langle 1 \rangle \subset A^1 = \langle 1, u_1 \rangle \subset A^2 = \langle 1, u_1, u_1^2, u_2 \rangle \subset \dots \subset A^m = \{P \in A, w(P) \leq m\} \subset A^{m+1} \subset \dots,
$$

т.е. фильтрующее подпространство A^m определим, как линейную оболочку однородных многочленов P с весами $w(P)$ не выше m.

Предложение 5.1. *Оператор X, ограниченный на произвольное (конечномерное) подпространство A^m становится нильпотентным: $X|_{A^m}^{m+1} = 0$.*

Так как X является дифференцированием алгебры A, то его ядро $\operatorname{Ker} X$ является подалгеброй в A. Более того, подалгебра $\operatorname{Ker} X$ является D-инвариантной, в силу следующих коммутационных соотношений

$$
[D,X] = DX - XD = -u_1X \quad \Leftrightarrow \quad (D+u_1)X = XD. \tag{5.3}
$$

В дальнейшем нам понадобится следующее элементарное обобщение коммутационного соотношения (5.3)

$$
X(D+ku_1) = (D+(k+1)u_1)X + k\,\mathrm{Id}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.4}
$$

Рассмотрим однородные y-интегралы весов $3,4,\dots,k,\dots$, которые определяются рекуррентно при помощи оператора D и самого первого элемента ядра $q_2 = 2u_2 - u_1^2$ (отличного от константы):

$$
q_3 = D(q_2) = 2u_1u_2 - 2u_3, \quad q_4 = D^2(q_2) = 2u_2^2 + 2u_1u_3 - 2u_4, \quad \dots, \quad q_k = D^{k-2}(q_2), \quad \dots.
$$

Можно рассматривать полиномы q_k как полиномиальную деформацию переменных $2u_k$

$$
q_k = 2u_k + Q_k(u_1,\dots,u_{k-1}),
$$

где квадратичные полиномы $Q_k(u_1,\dots,u_{k-1})$ зависят от переменных u_j с номерами j строго меньшими, чем k. Тем самым, полиномы вида $q_2^{k_2}q_3^{k_3}\dots q_m^{k_m}$, где $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \geq 1$, образуют бесконечный набор линейно независимых многочленов.

Мы приходим к известной теореме.

Теорема 5.1 (Шабат, Жибер, 1979). *Подалгебра* $\operatorname{Ker} X$ *изоморфна полиномиальной алгебре* $\mathbb{K}[q_2, q_3, \dots, q_k, \dots]$, *где* $q_k = D^{k-2}(q_2), \quad k \geq 2$.

Если мы думаем про доказательство этой *алгебраической* теоремы, то на данный момент нами доказано лишь включение подалгебр

$$\mathbb{K}[q_2, q_3, q_4, \dots] \subset \operatorname{Ker} X. \tag{5.5}$$

А доказательство того, что это включение является на самом деле равенством, мы проведем чуть позже в этом параграфе.

При помощи оператора X определим еще одну возрастающую фильтрацию алгебры A

$$\tilde{A}^0 = \{0\} \subset \tilde{A}^1 \subset \tilde{A}^2 \subset \dots \subset \tilde{A}^m = \{P \in A, X^m P = 0\} \subset \tilde{A}^{m+1} \subset \dots, \tag{5.6}$$

т.е. в этом случае фильтрующее подпространство $\tilde{A}^m$ определяется как ядро оператора X^m. Заметим, что подпространства $\tilde{A}^m$ уже не будут конечномерными. При этом имеется очевидная связь между двумя фильтрациями в силу предложения 5.1

$$A^m \subset \tilde{A}^{m+1}, \quad m \geq 0.$$

Также отметим, что $\tilde{A}^1 = \operatorname{Ker} X$.

Для всех натуральных m справедливы включения

$$X\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m-1}, \quad u_1\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m+1}, \quad D\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m+1}.$$

Первое включение следует из определения $\tilde{A}^m$, а для доказательства второго достаточно заметить, что выполняются соотношения

$$X^{m+1}(u_1 F) = (m+1)X^m F + u_1 X^{m+1} F, \quad \text{где} \quad m \geq 0, \tag{5.7}$$

которые доказываются несложной индукцией по m, начиная с очевидного равенства

$$X(u_1 F) = F + u_1 X F.$$

Последнее включение следует из такого соотношения с участием оператора D:

$$X^{m+1}(DF) = (D + (m+1)u_1)X^{m+1}F + \frac{m(m+1)}{2} X^m F, \quad m \geq 1. \tag{5.8}$$

Оно так же доказывается индукцией по степени m, начиная с (5.3):

$$\begin{aligned} X^{m+1}DF &= X(D + mu_1)X^m F + X(\frac{(m-1)m}{2} X^{m-1}F) \\ &= (D + (m+1)u_1)\, X^{m+1}F + \left(\frac{(m-1)m}{2} + m\right) X^m F. \end{aligned}$$

В качестве следствия (5.7, 5.8) приведем и такую формулу

$$X^{m+1}(D + ku_1)F = (D + (m+k+1)u_1)\, X^{m+1}F + \frac{(m+1)(m+2k)}{2} X^m F. \tag{5.9}$$

Замечание 5.1. *Многочлены P из ядра оператора* $\operatorname{Ker} X$ *являются собственными векторами оператора XD с собственным значением $\lambda = 0$:*

$$XD(P) = (D + u_1)XP = 0.$$

Лемма 5.1. *Пусть F — произвольный многочлен из алгебры A, тогда ряд*

$$\pi(F) = F - u_1 XF + \frac{u_1^2}{2!} X^2 F - \frac{u_1^3}{3!} X^3 F + \dots + (-1)^k \frac{u_1^k}{k!} X^k F + \dots \tag{5.10}$$

содержит конечное число ненулевых слагаемых и определенный таким образом многочлен πF будет аннулировать оператор X.

Доказательство леммы состоит в прямом вычислении

$$X\pi(F) = XF - X(u_1)XF - u_1X^2F + \frac{X(u_1^2)}{2!}X^2F - \dots.$$

Так как

$$X(u_1) = 1, \qquad X(u_1^2) = 2u_1, \qquad X(u_1^k) = ku_1^{k-1},$$

то в том случае, когда $F \in A^m$ для некоторого натурального m, имеем:

$$X\tilde{F} = \frac{X^m}{m!}F = 0.$$

Из доказательства следует в частности, что для многочлена $F \in \tilde{A}^{m+1}$ выполняется

$$\pi(F) = F - u_1XF + \frac{u_1^2}{2!}X^2F - \frac{u_1^3}{3!}X^3F + \dots + (-1)^m\frac{u_1^{m-1}}{(m-1)!}X^mF.$$

В частности для $F \in \operatorname{Ker} X^2$ верно, что $F - u_1XF \in \operatorname{Ker} X$.

Замечание 5.2. *Отображение $\pi : A \to A$, определенное формулой (5.10), является проектором на подалгебру* $\operatorname{Ker} X$*:* $\pi^2 = \pi$.

Также несложно найти ядро этого проектора:

$$\operatorname{Ker} \pi = u_1 A = \{u_1F,\ F \in A\}. \tag{5.11}$$

В самом деле, используем формулу (5.7) при вычислении $\pi(u_1F)$ для произвольного $F \in A$

$$\begin{aligned}\pi(u_1F) &= u_1F - u_1X(u_1F) + \frac{u_1^2}{2!}X^2(u_1F) - \frac{u_1^3}{3!}X^3(u_1F) + \dots\\ &= u_1F - u_1F - u_1^2XF + \frac{u_1^2}{2!}(2XF + u_1X^2F) - \frac{u_1^3}{3!}(3X^2F + u_1X^3F) + \dots = 0.\end{aligned}$$

В качестве следствия получим формулу для размерности ядра оператора X, ограниченного на подпространство A^n элементов веса n:

$$\dim \operatorname{Ker} \pi|_{A^n} = \dim u_1A^{n-1} = p(n-1),$$

согласно (5.11). Откуда выводим формулу

$$\dim \operatorname{Ker} X|_{A^n} = \dim \operatorname{Im}\ \pi|_{A^n} = \dim A^n - \dim \operatorname{Ker} \pi|_{A^n} = p(n) - p(n-1), \tag{5.12}$$

где $p(n)$ обозначает число разбиений числа n, а разность $p(n)-p(n-1)$, очевидным образом, равняется числу разбиений числа n на слагаемые строго больше 1: разбиение числа n, содержащее единицу, получается из некоторого разбиения $n-1$, к которому прибавили одну единицу.

Следствие 5.2. *Включение (5.5) из теоремы 5.1 Жибера–Шабата является изоморфизмом.*

Также мы доказали, что оператор $X|_{A^n} : A^n \to A^{n-1}$ является отображением полного ранга: $\dim \operatorname{Im} X|_{A^n} = \dim A^{n-1} = p(n-1)$.

Напомним про определяющее уравнение высших симметрий уравнения Клейна–Гордона (уравнение формальной группы Ли–Бэклунда высших симметрий)

$$F_{xy} = f'(u)F, \quad u_\tau = F(u, u_x, u_{xx}, \dots),$$

которое может быть сведено к следующей алгебраической форме

$$(D + u_1)XF = XDF = F.$$

Это означает, что симметрия $F = F(u_1, u_2, \dots)$ является собственным вектором оператора XD с собственным значением $\lambda = 1$.

Лемма 5.2. *Для всех целых m оператор $D+mu_1$ имеет нулевое ядро:*

$$\operatorname{Ker}(D+mu_1)=\{0\}.$$

Воспользуемся стандартным лексикографическим порядком в алгебре A и выделим старший моном $\gamma u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}$ в разложении элемента ядра $F\in\operatorname{Ker}(D+mu_1)$. Это означает, в частности, что u_n является самой старшей переменной, среди участвующих в разложении полинома F:

$$F=\gamma u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}+\dots,\quad \gamma\in\mathbb{C}.$$

Многоточие обозначает суммы мономов от переменных $u_1,\dots,u_n$, куда переменная u_n может входить с кратностями строго меньше k_n. Применим к F оператор $(D+mu_1)$

$$DF+u_1F=\gamma k_n u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n-1}u_{n+1}+\dots,$$

т.е. моном $\gamma k_n u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n-1}u_{n+1}$ будет самым старшим в разложении $(D+mu_1)F$, т.к. кратность переменной u_n в мономе, где присутствует u_{n+1}, будет максимальной. Значит $\gamma=0$ и, продолжая эти рассуждения, получаем, что $F=0$.

Предложение 5.2. *Пусть F — симметрия, т.е. является собственным вектором оператора XD с $\lambda=1$. Тогда $X^2(F)=0$.*

Из определения симметрии $F=XDF$ и коммутационных соотношений (5.4) при $k=1$ получаем такую цепочку равенств

$$XF=X^2DF=X(D+u_1)XF=((D+2u_1)X+Id)\,XF=(D+2u_1)X^2F+XF.$$

Откуда следует, что $(D+2u_1)X^2F=0$, после чего применив лемму 5.2, получаем утверждение предложения.

Теорема 5.2 (Жибер, Шабат, 1979, [32]). *Произвольная x-симметрия F (собственный вектор оператора XD с $\lambda=1$) может быть записана в виде*

$$F=(D+u_1)Q,\quad Q\in\operatorname{Ker}X=\mathbb{K}[q_2,q_3,\dots].$$

Мы повторим здесь на более строгом языке доказательство из [32]. В одну сторону: пусть $XQ=0$, тогда

$$\begin{aligned}(D+u_1)X(D+u_1)Q&=(D+u_1)\left((D+2u_1)X+Id\right)Q\\&=(D+u_1)(D+2u_1)XQ+(D+u_1)Q\\&=(D+u_1)Q.\end{aligned}$$

Доказательство в обратную сторону следует из определения симметрии $(D+u_1)XF=F$. Введем элемент $Q=XF$. Из предложения 5.2 следует, что $F=(D+u_1)Q$, при этом $XQ=X^2F=0$.

Обозначим собственные пространства оператора XD, относящиеся к $\lambda=0,1$, как V_0 и V_1 соответственно.

Предложение 5.3. *Верно равенство:*

$$V_0\oplus V_1=\operatorname{Ker}X^2.$$

Ранее мы доказали включение $V_0\oplus V_1\subset\operatorname{Ker}X^2$. Рассмотрим конечномерную версию, ограничив все операторы на подпространство A^n многочленов веса n. Подпространство $V_1(n)=V_1\cap A^n$ изоморфно подпространству $V_0(n-1)=V_0\cap A^{n-1}$, согласно теореме 5.2 и лемме 5.2. Тем самым

$$\dim(V_0(n)\oplus V_1(n))=p(n)-p(n-1)+p(n-1)-p(n-2)=p(n)-p(n-2).$$

С другой стороны, оператор $X : A^n \to A^{n-1}$ сюръективен для любого n, а значит сюръективен и оператор $X^2 : A^n \to A^{n-2}$, тем самым $\dim \mathrm{Ker}\, X^2|_{A^n} = p(n) - p(n-2)$.

Возникает естественный вопрос: «Какие еще есть собственные векторы у оператора XD?»

Прежде, чем дать общий ответ на этот вопрос, проанализируем примеры в малых размерностях.

1) Вес $n = 1$. У оператора XD имеется единственный собственный вектор u_1 с собственным значением $\lambda_1 = 1$.

2) Вес $n = 2$. Рассмотрим базис u_1^2, u_2. Тогда матрицей оператора XD будет $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. У этой матрицы два собственных значения: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_2 = 3$. Соответствующими собственными векторами будут два многочлена

$$q_2 = u_1^2 - 2u_2, \quad B_2 = u_1^2 + u_2.$$

3) В весе $n = 3$ зафиксируем базис u_1^3, u_1u_2, u_3. Матрица оператора XD в этом базисе будет равна

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственными числами будут $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_3 = 6$.

А три ее собственных вектора равняются соответственно

$$\begin{aligned} &q_3 = u_1u_2 - 2u_3, && (\lambda_0 = 0), \\ &u_1^3 - 2u_3, && (\lambda_1 = 1), \\ &2u_1^2 + 5u_1u_2 + u_3, && (\lambda_3 = 6). \end{aligned}$$

4) В весе $n = 4$ выберем базис из многочленов $u_1^4, u_1^2u_2, u_1u_3, u_2^2, u_4$. Матрица оператора XD будет уже пятого порядка

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственными числами будут: $\lambda_0 = 0$ (кратности 2), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_4 = 10$.

Среди собственных векторов этой матрицы есть: два интеграла q_2^2 и q_4 $(\lambda_0 = 0)$, одна симметрия $(D + u_1)(q_3) = q_4$, а также и другие собственные векторы:

$$-u_1^4 - 2u_1^2u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + u_4 \quad \text{и} \quad 6u_1^4 + 26u_1^2u_2 + 9u_1u_3 + 8u_2^2 + u_4,$$

относящиеся к $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_4 = 10$ соответственно.

Мы приходим к теореме, которая естественным образом обобщает теорему 5.2.

Теорема 5.3. *1) Оператор $(D + u_1)X = XD$, ограниченный на подпространство A_n многочленов веса $n \geq 2$, диагонализируем;*

2) Его спектром является следующий набор неотрицательных целых чисел

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \ldots, \quad \lambda_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}, \quad \lambda_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

3) Кратность собственного значения λ_k равняется

$$p(n-k) - p(n-k-1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, n;$$

4) Произвольный собственный вектор P, соответствующий собственному значению λ_k, где $k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n\}$, может быть записан в виде

$$P = (D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + ku_1)F,$$

где F обозначает некоторый однородный многочлен веса $(n-k)$ из ядра $\operatorname{Ker} X$.

Начнем доказательство теоремы с пункта 4).

Пусть $XF = 0$; тогда применим к многочлену $P = (D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + nu_1)F$ оператор XD:

$$\begin{aligned} XD(D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + nu_1)F &= (D + u_1)X(D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + nu_1)F \\ &= (D + u_1)((D + 2u_1)X + id)(D + 2u_1) \ldots (D + nu_1)F \\ &= (D + u_1)(D + 2u_1)X(D + 3u_1) \ldots (D + nu_1)F + P. \end{aligned}$$

Меняя последовательно местами операторы X и $(D + ku_1)$ с учетом соотношения (5.4), мы в итоге получаем соотношение

$$XDP = (D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + nu_1)XF + P + 2P + \cdots + nP = \frac{n(n+1)}{2}P,$$

где использовали тот факт, что $XF = 0$.

Следующее предложение является элементарным следствием леммы 5.2.

Предложение 5.4. *Линейное отображение $\varphi_k : V_0(n-k) \to V_k(n)$, определенное формулой*

$$\varphi_k(F) = (D + u_1)(D + 2u_1) \ldots (D + ku_1)F,$$

является мономорфизмом.

Из него сразу выводится простая оценка для размерностей собственных подпространств $V_k(n)$

$$\dim V_k(n) \geq \dim \operatorname{Im} \varphi_k = \dim V_0(n-k) = \dim \operatorname{Ker}_{n-k} X = p(n-k) - p(n-k-1), \quad (5.13)$$

где $p(n)$ обозначает число разбиений числа n.

Рассмотрим прямую сумму $\oplus_{k=0, \neq n-1}^{n} V_k(n)$ собственных подпространств оператора $XD|_{A_n}$. Согласно (5.13), имеем такую оценку для ее размерности

$$\dim \left(\oplus_{k=0, \neq n-1}^{n} V_k(n)\right) \geq \sum_{k=0}^{n-2} (p(n-k) - p(n-k-1)) + 1 = p(n) = \dim A_n.$$

Откуда делаем вывод, что это неравенство является равенством, равно как и все неравенства (5.13). Отсюда следует пункт 1), т.е.

$$A_n = V_0(n) \oplus V_1(n) \oplus \cdots \oplus V_{n-2}(n) \oplus V_n(n),$$

и пункт 2) о размерностях собственных подпространств V_k. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 5.3. *Имеется простая связь между собственными подпространствами V_k оператора XD и фильтрацией $\tilde{A}^m$ полиномиальной алгебры A*

$$V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \operatorname{Ker} X^{k+1} = \tilde{A}^{k+1}.$$

Мы уже доказали это утверждение для $k = 0, 1$. Причем оператор $X : V_1 \to V_0$ являлся изоморфизмом, понижающим градуировку. В общем случае

$$XV_k \subset V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Напомним, что согласно формуле (5.9), отображение $(D + qu_1)$ переводит элемент $F \in \operatorname{Ker} X^m$ в элемент более высокой фильтрации из $\operatorname{Ker} X^{m+1}$.

Максимальное собственное значение $\lambda_n = \frac{n(n+1)}{2}$ оператора $XD|_{A_n}$ имеет кратность один, а соответствующий ему собственный вектор коллинеарен однородному полиному P_n в A_n, который задается элегантной формулой, похожей на формулу (5.2) для полиномов Белла:

$$P_n = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)(1). \tag{5.14}$$

У нас уже появлялись в примерах первые полиномы из этой последовательности

$$P_1 = u_1, \quad P_2 = u_1^2 + u_2, \quad P_3 = 2u_1^2 + 5u_1u_2 + u_3, \quad P_4 = 6u_1^4 + 26u_1^2u_2 + 9u_1u_3 + 8u_2^2 + u_4.$$

Несложно установить по индукции значения двух крайних коэффициентов многочлена P_n

$$P_n = (n-1)!u_1^n + \dots + u_n.$$

Появление у оператора XD собственного вектора P_n кратности один со строго положительными координатами — это явное проявление классической теоремы Перрона–Фробениуса об операторе с матрицей специального вида, состоящей из неотрицательных элементов.

Напомним, что как и в теореме Перрона–Фробениуса соответствующее вектору P_n собственное значение λ_n является положительным и максимальным среди всех собственных значений оператора $XD|_{A_n}$. Разумно предположить, что семейство многочленов P_n не только имеет красивое рекуррентное определение (5.14), но также обладает полезными приложениями, которые еще предстоит установить.

6. Характеристические алгебры для систем ранга 2

По аналогии со случаем скалярных гиперболических уравнений понятие характеристической алгебры может быть распространено и на случай произвольной системы экспоненциального типа: следуя работе [1], *характеристической алгеброй* системы вида (1.1) будем называть алгебру Ли, порожденную операторами

$$\frac{\partial}{\partial w^1}, \quad \frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^r}, \quad D_y,$$

где D_y — оператор полного дифференцирования по y в силу системы. Для экспоненциальных систем, соответствующих невырожденным матрицам Картана, характеристическая алгебра конечномерна [1].

Рассмотрим экспоненциальные системы, соответствующие матрицам Картана аффинных алгебр Ли небольшого ранга r. Нетрудно проверить, что в самом простом случае ранга 1 экспоненциальные системы, соответствующие матрицам Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

сводятся к уравнениям

$$u_{xy} = e^u + e^{-u} \quad \text{и} \quad u_{xy} = e^u + e^{-2u}$$

соответственно. Оба этих уравнения хорошо изучены, первое из них называется *уравнением* sin-*Гордон*[1], а второе — *уравнением Цицейки*. Характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон была описана в явном виде в [21], а характеристическая алгебра уравнения Цицейки — в [25]. В работах [33], [34] была построена другая система образующих для этих бесконечномерных алгебр Ли и было показано, что они изоморфны неотрицательным частям алгебр петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))^{\geqslant 0}$ и скрученных петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),\mu)^{\geqslant 0}$ соответственно. Приведем в явном виде эти системы образующих.

---

[1]Точнее, уравнением sin-Гордон более естественно называть уравнение $u_{xy} = \sin u$, которое связано с рассматриваемым нами уравнением комплексной заменой. Но поскольку нам удобнее работать именно с уравнением, содержащим экспоненты, мы позволим себе допустить подобную терминологическую вольность.

Для уравнений вида $u_{xy} = f(u)$ характеристическая алгебра порождена операторами $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}$ и оператором D_y полного дифференцирования в силу уравнения. Нетрудно проверить, что если $f(u) = e^u + e^{\alpha u}$, при $\alpha \neq 0, 1$, то $D_y = X_1 + X_2$, где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_n}, \quad X_2 = e^{\alpha u} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\alpha \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_n},$$

а $B_n(\mathbf{u}) = B_n(u_1, \dots, u_n) = e^{-u} D_x(e^u)$ — полный многочлен Белла.

Теорема 6.1. [33], [34] *Характеристическая алгебра $\chi_{sG} = \langle X_0, X_1, \dots, X_n, \dots \rangle$ уравнения* sin-*Гордон порождена образующими X_0, X_1, X_2:*

$$X_{3k+1} = -[X_1, X_{3k}], \quad X_{3k+2} = [X_2, X_{3k}], \quad X_{3k+3} = [X_1, X_{3k+2}], \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{6.1}$$

Характеристическая алгебра χ_{sG} является естественно градуированной: ее можно представить в виде $\oplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$, где $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$. В самом деле, пользуясь соотношениями (6.1) и полагая

$$\mathfrak{g}_0 = \langle X_0 \rangle, \quad \mathfrak{g}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle, \dots, \mathfrak{g}_{2k} = \langle X_{3k} \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2k+1} = \langle X_{3k+1}, X_{3k+2} \rangle, \dots,$$

получаем, что естественная градуировка базисного элемента X_n — это количество коммутаторов в его минимальном представлении образующими. Изображая это диаграммой (см. рис. 1), легко видеть, что средняя скорость роста этой характеристической алгебры

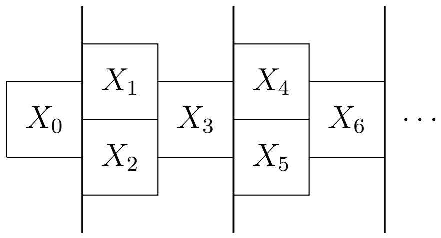

Рис. 1. Характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон

(т.е. увеличение размерности при добавлении одной градуированной компоненты) равна $\frac{3}{2}$.

Теорема 6.2. [33], [34] *Характеристическая алгебра $\chi_{Tz} = \langle X_0, X_1, \dots, X_n, \dots \rangle$ уравнения Цицейки порождена образующими X_0, X_1, X_2:*

$$X_{8k+1} = -[X_1, X_{8k}], \qquad X_{8k+2} = \frac{1}{2}[X_2, X_{8k}], \qquad X_{8k+3} = [X_1, X_{8k+2}], \quad X_{8k+4} = [X_1, X_{8k+3}],$$

$$X_{8k+5} = -\frac{1}{3}[X_1, X_{8k+4}], \quad X_{8k+6} = -\frac{1}{2}[X_1, X_{8k+5}], \quad X_{8k+7} = [X_2, X_{8k+5}], \quad X_{8k+8} = [X_1, X_{8k+7}],$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Представляя структуру этой алгебры в виде диаграммы (см. рис. 2), нетрудно заметить, что скорость ее роста равна $\frac{4}{3}$.

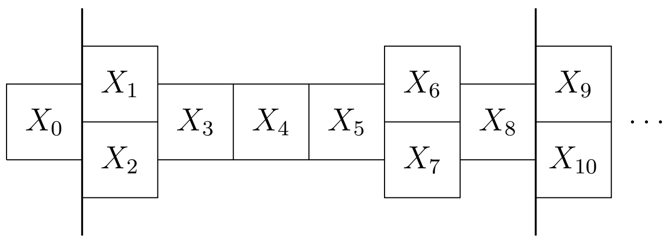

Рис. 2. Характеристическая алгебра уравнения Цицейки

Перейдем теперь к изучению характеристических алгебр для экспоненциальных систем, соответствующих аффинным матрицам Картана ранга 2 (такие матрицы имеют размер 3×3). Матрице Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$ отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - w_2 - w_3), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_1 - w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - w_2 - w_3$, $v = -w_1 + 2w_2 - w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - e^v - e^{-u-v}, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - e^{-u-v}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.2) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_3 = -e^{-u-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - \mathbf{v}) \left(\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial}{\partial v_n} \right).$$

Теорема 6.3. *Характеристическая алгебра* $\chi_{A_2^{(1)}} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ *системы (6.2) порождена образующими* $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3*:*

$$X_{8k+1} = [X_1, X_{8k-1}], \quad X_{8k+2} = -[X_2, X_{8k}], \quad X_{8k+3} = [X_3, X_{8k-1}], \quad X_{8k+4} = [X_1, X_{8k+2}],$$
$$X_{8k+5} = [X_1, X_{8k+3}], \quad X_{8k+6} = [X_2, X_{8k+3}], \quad X_{8k+7} = [X_2, X_{8k+5}], \quad X_{8k+8} = [X_1, X_{8k+6}],$$

где $X_{-1} = -2Y_0 + Y_0'$, $X_0 = -Y_0 + 2Y_0'$ *и* $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.2) равна $\frac{8}{3}$.

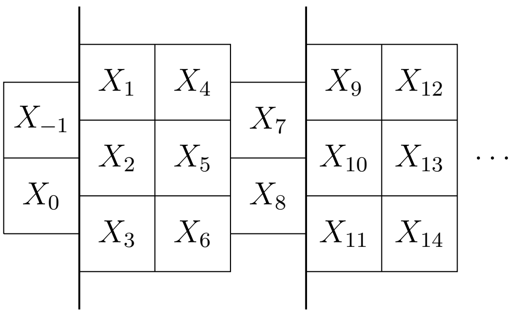

Рис. 3. Характеристическая алгебра системы $A_2^{(1)}$

Для доказательства нам потребуются следующие две простые леммы (первая из которых восходит к А.Б. Шабату). Пусть

$$D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + v_1\frac{\partial}{\partial v} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + v_2\frac{\partial}{\partial v_2} + \dots$$

(мы сохраним с целью упрощения формул обозначение D за оператором более общего вида, чем в параграфе 3).

Лемма 6.1. *Если для дифференциального оператора*

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(P_n(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2\dots)\frac{\partial}{\partial u_n} + Q_n(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2\dots)\frac{\partial}{\partial v_n}\right),$$

где P_n и Q_n — многочлены, выполнено соотношение $[D, X] = 0$, то $X = 0$.

Следующая лемма обобщает лемму 5.2 из параграфа 5.

Лемма 6.2. *Пусть $f = f(u_1, v_1, u_2, v_2\dots)$ — функция, зависящая от конечного числа переменных, а c — произвольная константа. Тогда для любых постоянных α и β уравнение*

$$(D + \alpha u_1 + \beta v_1)f = c$$

не имеет решений при $c \neq 0$ и имеет лишь тривиальное решение $f \equiv 0$ при $c = 0$.

Доказательство. Поскольку $[Y_0, D_y] = [Y_0, X_1 + X_2 + X_3] = X_1 - X_3$, оператор $X_1 - X_3$ принадлежит характеристической алгебре. Далее, $[Y_0', X_1 - X_3] = X_3$, откуда следует, что X_3 (а, следовательно и X_1) также лежат в характеристической алгебре. Поэтому

$$X_2 = D_y - X_1 - X_3 \in \chi_{A_2^{(1)}}.$$

Таким образом, характеристическая алгебра порождается элементами Y_0, Y_0', X_1, X_2 и X_3.

Из тождества Якоби вытекает, что все высшие коммутаторы выражаются как линейные комбинации коммутаторов вида $[A, [B, [C, [\dots]]]]$, где $A, B, C, \dots$ — образующие. Таким образом, достаточно рассматривать лишь коммутаторы такого вида. Далее доказательство аналогично доказательству теорем 6.1 и 6.2 из статьи [34] и проводится индукцией по k, где k — количество периодически повторяющихся групп по 8 элементов (см. рис. 3). Сперва, выписывая коммутационные соотношения образующих и их коммутаторов с элементами Y_0, Y_0' и D, при помощи леммы 6.1 можно показать, что все среди коммутаторов естественной градуировки $2, 3$ нетривиальны лишь элементы $X_4, X_5, \dots, X_8$. Независимость всех элементов $X_1, X_2, \dots, X_8$ доказывается от противного при помощи лемм 6.1, 6.2. Это завершает базу индукции.

Шаг индукции основан на двух замечаниях. Во-первых, из коммутационных соотношений внутри одной группы $X_{8k+1}, X_{8k+2}, \dots, X_{8k+8}$ следуют аналогичные коммутационные соотношения в следующей группе. Отсюда при помощи леммы 6.1 можно вывести тривиальность тех коммутаторов, которые не приведены в таблицы. Во-вторых, независимость остальных выводится из доказанной на предыдущем шаге независимости при помощи последовательного добавления новых элементов (с использованием лемм 6.1, 6.2), что завершает шаг индукции. □

Перейдем теперь к изучению характеристических алгебр систем, соответствующих другим аффинным алгебрам Ли. Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $B_2^{(2)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-2w_1 + 2w_2 - 2w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - w_2$, $v = -2w_1 + 2w_2 - 2w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - e^v, \\ v_{xy} = -2e^u + 2e^v - 2e^{-u-v}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.3) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_3 = -2e^{-u-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.4. *Характеристическая алгебра $\chi_{B_2^{(2)}} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ системы (6.3) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$\begin{array}{lll} X_{15k+1} = -[X_1, X_{15k-1}], & X_{15k+2} = [X_2, X_{15k}], & X_{15k+3} = -[X_3, X_{15k}], \\ X_{15k+4} = [X_1, X_{15k+2}], & X_{15k+5} = [X_2, X_{15k+3}], & X_{15k+6} = [X_1, X_{15k+4}], \\ X_{15k+7} = [X_1, X_{15k+5}], & X_{15k+8} = [X_3, X_{15k+5}], & X_{15k+9} = [X_1, X_{15k+7}], \\ X_{15k+10} = [X_1, X_{15k+8}], & X_{15k+11} = [X_1, X_{15k+10}], & X_{15k+12} = [X_2, X_{15k+9}], \\ X_{15k+13} = [X_2, X_{15k+10}], & X_{15k+14} = [X_1, X_{15k+13}], & X_{15k+15} = [X_3, X_{15k+12}], \end{array}$$

где $X_{-1} = Y_0 - Y_0'$, $X_0 = -Y_0'$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.3) равна $\frac{5}{2}$.

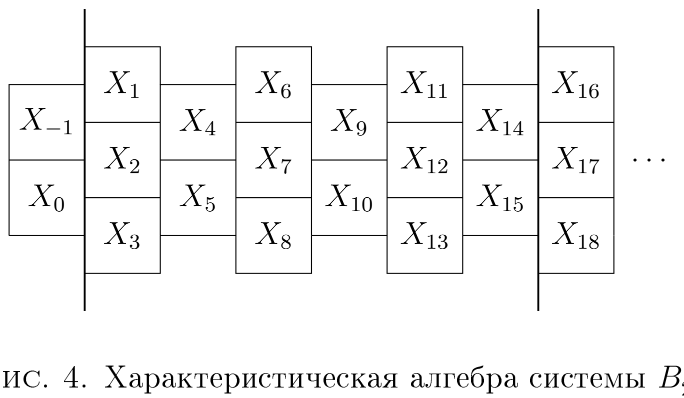

Рис. 4. Характеристическая алгебра системы $B_2^{(2)}$

Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $\tilde{B}_2^{(2)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - 2w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - 2w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - 2w_2$, $v = -w_1 + 2w_2 - 2w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - 2e^v, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - 2e^{-\frac{u}{2}-v}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.4) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-2\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_3 = -2e^{-\frac{u}{2}-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} \left(-\frac{\mathbf{u}}{2} - \mathbf{v} \right) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.5. *Характеристическая алгебра $\chi_{\tilde{B}_2^{(2)}} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ системы (6.4) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$\begin{aligned}
X_{24k+1} &= -\frac{1}{2}[X_1, X_{24k-1}], & X_{24k+2} &= 2[X_2, X_{24k}], & X_{24k+3} &= -2[X_3, X_{24k}], \\
X_{24k+4} &= [X_1, X_{24k+2}], & X_{24k+5} &= [X_2, X_{24k+3}], & X_{24k+6} &= [X_1, X_{24k+5}], \\
X_{24k+7} &= [X_2, X_{24k+4}], & X_{24k+8} &= [X_3, X_{24k+5}], & X_{24k+9} &= [X_1, X_{24k+8}], \\
X_{24k+10} &= [X_2, X_{24k+6}], & X_{24k+11} &= [X_2, X_{24k+9}], & X_{24k+12} &= [X_3, X_{24k+10}], \\
X_{24k+13} &= [X_2, X_{24k+12}], & X_{24k+14} &= [X_3, X_{24k+12}], & X_{24k+15} &= [X_1, X_{24k+13}], \\
X_{24k+16} &= [X_2, X_{24k+14}], & X_{24k+17} &= [X_3, X_{24k+14}], & X_{24k+18} &= [X_1, X_{24k+16}], \\
X_{24k+19} &= [X_3, X_{24k+16}], & X_{24k+20} &= [X_1, X_{24k+19}], & X_{24k+21} &= [X_2, X_{24k+18}], \\
X_{24k+22} &= [X_2, X_{24k+19}], & X_{24k+23} &= [X_1, X_{24k+22}], & X_{24k+24} &= [X_3, X_{24k+21}],
\end{aligned}$$

где $X_{-1} = 2Y_0 - Y_0'$, $X_0 = -\frac{1}{2}Y_0'$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.4) равна $\frac{12}{5}$.

Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

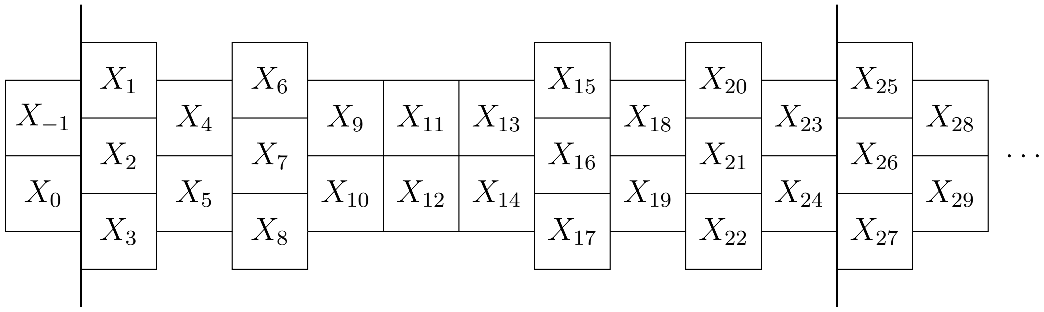

Рис. 5. Характеристическая алгебра системы $\tilde{B}_2^{(2)}$

аффинной алгебры Ли $C_2^{(1)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - 2w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-2w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - 2w_2$, $v = -w_1 + 2w_2 - w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - 2e^v, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - e^{-u-2v}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.5) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-2\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_3 = -e^{-u-2v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.6. *Характеристическая алгебра $\chi_{C_2^{(1)}} = \langle X_0, X_1, \dots, X_n, \dots \rangle$ системы (6.5) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$\begin{aligned} &X_{10k+1} = [X_1, X_{10k}], && X_{10k+2} = -[X_2, X_{10k-1}], && X_{10k+3} = [X_3, X_{10k}], \\ &X_{10k+4} = [X_1, X_{10k+2}], && X_{10k+5} = [X_2, X_{10k+3}], && X_{10k+6} = [X_1, X_{10k+5}], \\ &X_{10k+7} = [X_2, X_{10k+4}], && X_{10k+8} = [X_2, X_{10k+5}], && X_{10k+9} = [X_1, X_{10k+8}], \\ &X_{10k+10} = [X_2, X_{10k+6}], \end{aligned}$$

где $X_{-1} = Y_0' - 2Y_0$, $X_0 = Y_0' - Y_0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.5) равна $\frac{5}{2}$.

Доказательство теорем 6.4–6.6 проводится аналогично доказательству теоремы 6.3.

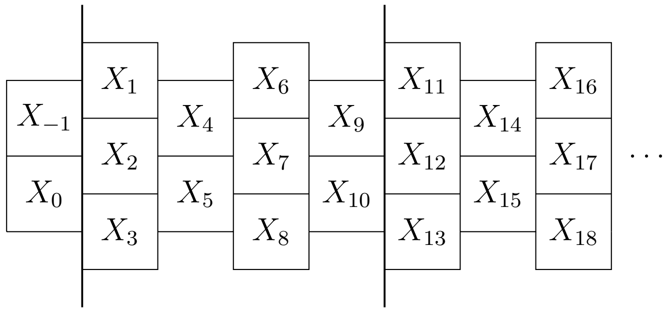

Рис. 6. Характеристическая алгебра системы $C_2^{(1)}$

7. Характеристические алгебры и симметрии

Хорошо известно (см., например, [31]), что каждое из уравнений sin-Гордон и Цицейки обладает бесконечной иерархией высших симметрий. Сформулируем соответствующие результаты.

Теорема 7.1. [31] *Уравнение $u_{xy} = e^u + e^{-u}$ имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий $u_t = F_k(u_1, u_2, u_3, \dots)$, где $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ и*

$$F_{2k+1} = L^k(u_1), \quad L = (D + u_1)(D - u_1 + D^{-1}u_2).$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, u_2, u_3, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий $F_1, F_3, F_5, \dots$.

Теорема 7.2. [31] *Уравнение $u_{xy} = e^u + e^{-2u}$ имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий*

$$u_t = F_{6k+1}(u_1, u_2, u_3, \dots) \quad и \quad u_t = F_{6k+5}(u_1, u_2, u_3, \dots),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ и

$$F_{6k+1} = L^k(u_1), \quad F_{6k+5} = L^k\left(u_5 + 5(u_2 - u_1^2)u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5\right),$$
$$L = (D - u_1 - 2u_1D^{-1}u_1)(D - u_1)D(D + u_1)(D^2 + u_1D - 2u_1^2 + 2u_1D^{-1}u_2).$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, u_2, u_3, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий F_{6k+1}, F_{6k+5}.

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, в обоих случаях структура симметрий оказывается связанной со структурой естественно градуированных компонент соответствующих характеристических алгебр: для уравнения sin-Гордон наблюдается периодичность с периодом 2, а для уравнения Цицейки — с периодом 6 (симметрии пронумерованы в соответствии с их градуировкой). Во-вторых, несмотря на то, что операторы рекурсии L в каждом из случаев содержат псевдодифференциальные компоненты D^{-1}, симметрии устроены таким образом, что при применении к ним оператора L нелокальность пропадает.

Подобная связь между иерархией симметрий и структурой естественно градуированных компонент соответствующей характеристической алгебры наблюдается и для экспоненциальных систем ранга 2.

Теорема 7.3. *Экспоненциальная система (6.2), соответствующая матрице Картана аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$, имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий*

$$u_t = F_{3k+1}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \qquad v_t = G_{3k+1}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots),$$
$$u_t = F_{3k+2}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \qquad v_t = G_{3k+2}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots),$$

где

$$\begin{pmatrix} F_{3k+1} \\ G_{3k+1} \end{pmatrix} = L^k \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_{3k+2} \\ G_{3k+2} \end{pmatrix} = L^k \begin{pmatrix} u_2 + 2v_2 + u_1^2 + 2u_1 v_1 \\ -2u_2 - v_2 - v_1^2 - 2u_1 v_1 \end{pmatrix},$$

а оператор L задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} L = &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} D^3 + 2 \begin{pmatrix} u_1 + v_1 & u_1 \\ -v_1 & -u_1 - v_1 \end{pmatrix} D^2 \\ &+ \left(\begin{pmatrix} u_2 + v_2 & u_2 \\ -v_2 & -u_2 - v_2 \end{pmatrix} - \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right) D - \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} D^{-1} \begin{pmatrix} B & C \\ B & C \end{pmatrix} D \\ &+ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_2 + 2v_2 + 2u_1 v_1 + u_1^2 & 0 \\ 0 & v_2 + 2u_2 + 2u_1 v_1 + v_1^2 \end{pmatrix} D^{-1} \begin{pmatrix} -2u_1 - v_1 & -u_1 - 2v_1 \\ 2u_1 + v_1 & u_1 + 2v_1 \end{pmatrix} D, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$A = u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2, \quad B = \frac{2}{3} u_1^2 - \frac{1}{3} v_1^2 + \frac{2}{3} u_1 v_1 + v_2, \quad C = \frac{1}{3} u_1^2 - \frac{2}{3} v_1^2 - \frac{2}{3} u_1 v_1 - u_2.$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$, $v_t = G(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий (F_{3k+1}, G_{3k+1}), (F_{3k+2}, G_{3k+2}).

Доказательство. Для удобства введем обозначения

$$X = e^{-u} X_1, \quad Y = e^{-v} X_2, \quad Z = e^{u+v} X_3.$$

Нетрудно проверить, что имеют место соотношения

$$(D + u_1) X = X D, \quad (D + v_1) Y = Y D, \quad (D - u_1 - v_1) Z = Z D \tag{7.2}$$

и что уравнения $u_t = F$, $v_t = G$ задают симметрию системы (6.2) если и только если выполнены следующие условия:

$$X D \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F \\ -F \end{pmatrix}, \quad Y D \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \\ 2G \end{pmatrix}, \quad Z D \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F + G \\ F + G \end{pmatrix}.$$

Пусть пара однородных (по градуировке) многочленов $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ одной степени задает симметрию системы (6.2). Тогда, пользуясь соотношениями (7.2), можно показать, что функции

$$F = XZY\tilde{F} \quad \text{и} \quad G = YXZ\tilde{G} \tag{7.3}$$

удовлетворяют условиям (7.3), т.е. тоже задают симметрию системы (6.2). Поскольку применение каждого из операторов X, Y и Z к однородному многочлену понижает его градуировку на единицу, градуировка симметрии (F, G) будет меньше градуировки $\tilde{F}, \tilde{G}$ на 3. Прямой проверкой можно убедиться, что единственными (с точностью до умножения на константу) симметриями первого и второго порядка для системы (6.2) являются

$$u_t = F_1, \quad v_t = G_1 \quad \text{и} \quad u_t = F_2, \quad v_t = G_2$$

соответственно. Аналогично, нетрудно показать, что система (6.2) не имеет симметрий третьего порядка, откуда вытекает, что она также не может иметь симметрий порядка $3k$, где $k \in \mathbb{N}$. Далее, путем довольно громоздких вычислений с использованием равенств (7.2) можно обратить формулы (7.3):

$$\begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot L \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

где оператор L определен формулой (7.1). Таким образом, каждая из симметрий (F_1, G_1) и (F_2, G_2) однозначно (с точностью до умножения на константу) порождает последовательность симметрий в градуировках $3k+1$ и $3k+2$ соответственно. □

Похожим образом выглядит структура симметрий и для систем (6.3)–(6.5). Компьютерный эксперимент показывает, у системы (6.3) есть по одной симметрии в градуировках $1, 3, 5, 7$, а в градуировках $2, 4, 6$ симметрий нет (мы не приводим здесь явных выражений для симметрий ввиду их громоздкости). Нетрудно построить операторы, подобные (7.3), которые переводят симметрии в симметрии и понижают градуировку на 6. Отсюда, в частности, следует, что система (6.3) не имеет симметрий в четных градуировках.

Система (6.5) имеет по одной симметрии в градуировках $1, 3, 5, 7$ и не имеет симметрий в градуировках $2, 4, 6$. Поскольку для этой системы существует оператор, который переводит симметрии в симметрии и понимает градуировку на 4, отсюда вытекает, что у нее нет симметрий в четных градуировках. Для системы (6.4) нам удалось найти симметрии в градуировках $1, 3, 7$ и показать, что их нет в градуировках $2, 4, 5, 6$. Для этой системы существует оператор, переводящий симметрии в симметрии, который понижает градуировку на 10. Нетрудно заметить, что эти результаты полностью повторяют структуру характеристических алгебр для соответствующих систем (см. рис. 3–6). Описанные выше наблюдения позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 7.1. *Характеристическая алгебра экспоненциальной системы, соответствующей матрице Картана произвольной аффинной алгебры Ли, имеет линейный рост, причем средняя скорость ее роста не превосходит размера $r + 1$ соответствующей матрицы Картана (где r — ранг этой матрицы). Естественно градуированная структура характеристической алгебры такой системы периодична с некоторым периодом $m \in \mathbb{N}$. Такая система обладает бесконечной иерархией однородных по градуировке симметрий, которая состоит из конечного числа последовательностей. Все элементы каждой такой последовательности имеют вид $L^k(\mathbf{F})$, где L — некий линейный оператор, $k = 1, 2, \ldots$ и $\mathbf{F} = (F^1, \ldots, F^r)$ — затравочная симметрия, которая имеет порядок, меньший m. Любая симметрия, полиномиально зависящая от x-производных динамических переменных, является линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) описанных выше симметрий.*

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.В. Жиберу, О.В. Капцову, М.В. Павлову, В.В. Соколову, Е.В. Ферапонтову и И.Т. Хабибуллину за полезные обсуждения, которые, во многом, способствовали написанию данной статьи. Работа второго автора (параграфы 6, 7) выполнена за счет средств гранта РНФ №20-11-20214.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт. Уфа: БФАН СССР (1981).
2. А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. **51**:1, 10-22 (1982).
3. А.Н. Лезнов. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве* // ТМФ. **42**:3, 343–349 (1980).
4. V.E. Adler, I.T. Habibullin. *Integrable boundary conditions for the Toda lattice* // J. Phys. A: Math. Gen. **28**:23, 67116129 (1995).
5. B. Gürel, I. Habibullin. *Boundary conditions for two-dimensional integrable chains* // Phys. Lett. A. **233**:3-4, 68-72 (1997).
6. И.Т. Хабибуллин. *Обрывы цепочки Тоды и проблема редукций* // ТМФ. **143**:1, 22–48 (2005).
7. R.S. Ward. *Discrete Toda field equations* // Phys. Lett. A. **199**:1-2, 45–48 (1995).
8. A. Doliwa. *Geometric discretisation of the Toda system* // Phys. Lett. A. **234**:3, 187–192 (1997).
9. И.Т. Хабибуллин. *Дискретные цепочки серии C* // ТМФ. **146**:2, 208–221 (2006).

10. С.В. Смирнов. *Полудискретные цепочки Тоды* // ТМФ. **172**:3, 387–404 (2012).
11. I. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva. *Cartan matrices and integrable lattice Toda field equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **44**:46, 465202 (2011).
12. R. Garifullin, I. Habibullin, M. Yangubaeva. *Affine and finite Lie algebras and integrable Toda field equations on discrete time-space* // SIGMA. **8**:062 (2012).
13. С.В. Смирнов. *Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды* // ТМФ. **182**:5, 228–253 (2015).
14. D.K. Demskoi, D.T. Tran. *Darboux integrability of determinant and equations for principal minors* // Nonlinearity. **29**:7, 1973–1991 (2016).
15. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Discrete exponential type systems on a quad graph, corresponding to the affine Lie algebras $A_{N-1}^{(1)}$* // J. Phys. A: Math. Theor. **52**:36, 365202 (2019).
16. I. Habibullin, A. Khakimova. *Integrable boundary conditions for the Hirota-Miwa equation and Lie algebras* // J. Nonlinear Math. Phys. **27**:3, 393–413 (2020).
17. I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, A.U. Sakieva. *Integrability conditions for two-dimensional Toda-like equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **53**:39, 395203 (2020).
18. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Ann. Fac. Sci. Toulouse. **1**, 31–78, 439–464 (1899).
19. А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат. *Уравнения типа Лиувилля* // Докл. АН СССР. **249**:1, 26–29 (1979).
20. I.T. Habibullin. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // SIGMA. **1**:023 (2005).
21. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина. *О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$* // Фундамент. и прикл. матем. **12**:7, 65–78 (2006).
22. И.Т. Хабибуллин, А. Пекан. *Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей* // ТМФ. **151**:3, 413–423 (2007).
23. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **3**:2, 173-184 (2010).
24. Н.А. Желтухина, А.У. Сакиева, И.Т. Хабибуллин. *Характеристическая алгебра Ли и интегрируемые по Дарбу дискретные цепочки* // Уфимск. матем. журн. **2**:4, 39–51 (2010).
25. А.У. Сакиева. *Характеристическое кольцо Ли уравнения Жибера-–Шабата-–Цицейки* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 155-160 (2012).
26. М. Гюрсес, А.В. Жибер, И.Т. Хабибуллин. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений* // Уфимск. матем. журн. **4**:1, 53–62 (2012).
27. А.В. Жибер, С.Н. Камаева. *Построение точных решений уравнения синус-Гордона на основе его характеристического кольца Ли* // Уфимск. матем. журн. **8**:3, 49–58 (2016).
28. I. Habibullin, M. Poptsova. *Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic Lie rings* // SIGMA. **13**:073 (2017).
29. М.Н. Попцова, И.Т. Хабибуллин. *Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью* // Уфимск. матем. журн. **10**:3, 89–109 (2018).
30. И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова. *О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли–Райнхарта* // ТМФ. **203**:1, 161–173 (2020).
31. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения.* 2 изд., испр. и доп., М., «Юрайт» (2018).
32. А.В. Жибер, А.Б. Шабат. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой* // Докл. АН СССР. **247**:5, 1103–1107 (1979).
33. Д.В. Миллионщиков. *Характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки* // УМН. **72**:6, 203-204 (2017).
34. D. Millionshchikov. *Lie Algebras of Slow Growth and Klein–Gordon PDE* // Algebras and Representation Theory. **21**:5, 1037–1069 (2018).
35. G. Rinehart. *Differential forms for general commutative algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 195–222 (1963).
36. В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. *Полиномиальные алгебры Ли* // Функц. анализ и его прил. **36**:4, 18–34 (2002).

37. Д.В. Миллионщиков. *Полиномиальные алгебры Ли и рост их конечно порожденных подалгебр Ли* // Тр. МИАН. **302**, 316–333 (2018).
38. В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. **121**:2, 271–284 (1999).
39. В.Г. Кац. *Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **32**:5, 1323–1367 (1968).
40. O. Mathieu. *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth* // Invent. Math. **108**, 455-519 (1990).
41. G.R. Krause, T.H. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand–Kirillov dimension*, AMS Providence, R.I. (2000).
42. I.M. Gelfand, A.A. Kirillov. *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie* // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **31**, 5–19 (1966).
43. Дж. Риордан. *Комбинаторные тождества.* М.: Наука. 1982.

Дмитрий Владимирович Миллионщиков,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия

РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина,
Ленинский пр-т, д. 65,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: millionshchikov.d@gubkin.ru

Сергей Валерьевич Смирнов,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: ssmirnov@higeom.math.msu.su

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 74-85.

УДК 517.544, 517.538.7, 517.984.54

Памяти Алексея Борисовича Шабата
и Алексея Федоровича Леонтьева

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В.Ю. НОВОКШЕНОВ

Аннотация. Рассмотрены две задачи комплексного анализа, разрабатывавшиеся в Уфе в 1970-х годах. Это задача Римана о скачке кусочно-аналитической функции на контуре и задача интерполяции целой функции на счетном множестве точек в комплексной плоскости. Прослежено развитие этих задач в последующие годы и показано, что они имеют много общего. Первая из них служит эквивалентом обратной задачи рассеяния, применяемой для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Вторая задача является естественным обобщением формулы Лагранжа для нахождения полинома, принимающего заданные значения на конечном множестве точек. Показано, что обе задачи могут быть объединены обобщением задачи Римана на случай «дискретного контура», на котором происходит «скачок» аналитической функции. В такой формулировке рассмотрена дискретная матричная задача Римана, применяемая ныне во многих задачах для точно решаемых разностных уравнений и оценки спектра случайных матриц. В статье показано, как дискретная матричная задача Римана доставляет способ интегрирования нелинейных разностных уравнений математической физики, таких как разностные уравнения Пенлеве. С другой стороны продемонстрировано, как задание вычетов мероморфной матрицы-функции на счетном множестве в $\mathbb{C}$ с точкой накопления в бесконечности по сути сводится к задаче интерполяции целых функций. Указано другое приложение решений этой задачи, связанное с вычислением детерминантов Фредгольма, применяемых в комбинаторике и теории представления групп.

Ключевые слова: Задача Римана, обратная задача рассеяния, целые функции, интерполяция, каноническое произведение, разностные уравнения Пенлеве, детерминант Фредгольма, асимптотические разложения.

Mathematics Subject Classification: 30D30, 30E10, 33C10, 33E17, 34M50, 37K60

1. Введение

Алексей Борисович Шабат придумал метод задачи Римана как эквивалент метода обратной задачи рассеяния в Уфе в 1975 году [7], [8]. Его идея опиралась на адекватное описание аналитических свойств матричной Ψ-функции, которая удовлетворяет задаче рассеяния

$$\frac{d\Psi}{dx} = (i\lambda A + V(x))\,\Psi, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$\Psi(x,\lambda) \to \begin{cases} e^{i\lambda A x}, & x \to +\infty, \\ e^{i\lambda A x} S(\lambda), & x \to -\infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

V.Yu. Novokshenov, Discrete Riemann-Hilbert problem and interpolation of entire functions.

© Новокшенов В.Ю. 2021.

Поступила 28 марта 2021 г.

где $\Psi \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$,

$$\begin{gathered} A = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \\ V(x) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}), \quad V_{jj} = 0, \quad V_{jk} \in L_1(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Обратная задача рассеяния (ОЗР) состоит в восстановлении матрицы $\Psi(x, \lambda)$, при всех $x, \lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям (1.1) и (1.2), по заданной *матрице рассеяния* $S(\lambda)$ и постоянной матрице A. Тем самым восстанавливается потенциал $V(x)$ в уравнении (1.1).

Более точно, введем банахову алгебру Винера

$$\mathcal{W} = \left\{ f \,\Big|\, f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}) \right\}$$

и ее две подалгебры $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ f(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \right\}, \quad \mathcal{W}_2 = \left\{ f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \right\},$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{W}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{f}(x) \right\| dx.$$

Нетрудно доказать [8], что матрица рассеяния $S(\lambda)$ уравнения (1.1) с условиями (1) обладает свойствами

$$\begin{gathered} 1 - S \in \mathcal{W}, \\ 1 - \det_j S \in \mathcal{W}_1, \quad 1 - \det_j S^{-1} \in \mathcal{W}_2, \end{gathered}$$

где $\det_j S$ - j-й главный минор матрицы S, $j = 1, 2, \ldots, n$. Эти свойства позволяют однозначно перейти от матрицы S к *матрице скачка* Q, определяющей задачу Римана:

$$\begin{gathered} S = N_1 M_1^{-1} = N_2 M_2^{-1}, \\ Q = M_2 M_1^{-1} = N_2 N_2^{-1}, \\ \mathrm{diag}\, M_1 = \{\det_1 S, \ldots, \det_n S\}, \quad \mathrm{diag}\, N_2 = \{\det_1 S^{-1}, \ldots, \det_n S^{-1}\}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где M_1, N_2 - верхнетреугольные матрицы, а M_2, N_1- нижнетреугольные.

Теорема 1.1. [7, 8] *Пусть разрешима следующая задача Римана:*

1) $\Phi_\pm(x, \lambda) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *аналитические в верхней (+) и нижней (-) полуплоскости по* λ,

$$I - \Phi_+ \in \mathcal{W}_1, \quad I - \Phi_- \in \mathcal{W}_2, \quad \det \Phi_\pm = 1,$$

2) $\Phi_\pm(x, \lambda) \to I$ *при* $\lambda \to \infty, \quad \mathrm{Im}\,\lambda \gtrless 0$,
3) $\Phi_-(x, \lambda) = \Phi_+(x, \lambda) Q(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$, *где* $Q(x, \lambda) = e^{-ix\lambda A} Q(\lambda) e^{-ix\lambda A}$,

тогда функции

$$\Psi_1(x, \lambda) = \Phi_+(x, \lambda + i0) e^{ix\lambda A}, \quad \Psi_2(x, \lambda) = \Phi_-(x, \lambda - i0) e^{ix\lambda A} \tag{1.5}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) с потенциалом

$$V(x) = \lim_{\lambda \to \infty} i\lambda [\Phi_+, A] \Phi_+^{-1}(x, \lambda)$$

и условию рассеяния (1.2) с матрицей S*, определяемой формулами (1).*

В теории солитонов Ψ-функция и потенциал V зависят, как правило, от дополнительной независимой переменной t, а (1.1) дополняется еще одним уравнением вида

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left(i\lambda^n A + \lambda^{n-1} V_{n-1}(x, t) + \ldots + V(x, t) \right) \Psi.$$

Условие совместности этого уравнения с (1.1) (пара Лакса) доставляет нелинейное уравнение с частными производными на функцию $V(x,t)$, а задача рассеяния (1.1), (1.2) играет роль «преобразования Фурье» для нахождения его решения [2].

Теорема 1.1 А.Б. Шабата оказалась чрезвычайно полезна для теории солитонов, подобно тому как Фурье-анализ полезен для линейных дифференциальных уравнений. В частности, тот факт, что в задаче Римана переменные x, t и потенциал $V(x,t)$ фигурируют в качестве параметров, сильно облегчило асимптотический анализ решений нелинейного уравнения, которому удовлетворяет $V(x,t)$. В дальнейшем формулировка задачи Римана была распространена на другие точно решаемые нелинейные уравнения, в том числе различные эволюционные уравнения с двумя пространственными переменными, разностные уравнения, системы уравнений классической механики и т.д. В настоящее время метод обратной задачи зачастую формулируется только в виде той или иной задачи Римана.

Другой большой тематикой, разрабатывавшейся в Уфе в 1970-е годы, была теория целых функций и, в частности, задача интерполяции этих функций в различных пространствах. В 1976 году вышла монография Алексея Федоровича Леонтьева [4], в которой рассматривались различные аспекты теории рядов Дирихле, уравнений в свертках и другие классические вопросы теории целых функций. Еще в 1948 году А.Ф. Леонтьев впервые рассмотрел задачу интерполяции в пространстве целых функций конечного ненулевого порядка, которая получила впоследствии название задачи свободной интерполяции. Термин «свободная интерполяция» связан с тем, что на значения интерполирующей функции, принадлежащей данному пространству функций, накладываются наименьшие ограничения, которым обязательно должна удовлетворять любая функция из этого пространства.

Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции F данного класса, принимающей в заданных точках $\{a_n\}$ — узлах интерполяции — заданные значения $\{b_n\}$

$$F(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

В работе [5] А.Ф. Леонтьев сформулировал задачу свободной интерполяции так: определить, каким условиям должна удовлетворять последовательность различных точек $\{a_n\}$ комплексной плоскости для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln r} \leqslant \rho, \quad \rho > 0,$$

можно было построить целую функцию $F(z)$ из класса $[\rho, \infty]$, удовлетворяющую равенствам (1.6). Класс $[\rho,\infty]$ состоит из целых функций, имеющих при данном уточненном порядке ρ нормальный или минимальный тип.

Функция из класса $[\rho,\infty]$ строится с помощью обобщенного ряда Лагранжа

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n\, \Phi(z)\omega(z)}{(z-a_n)\Phi'(a_n)\omega(a_n)}, \tag{1.7}$$

где $\omega(z)$ целая функция порядка не больше ρ и

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)}, \quad P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{q_n}$$

— каноническая функция последовательности $\{a_n\}$, а q_n — последовательность натуральных чисел, обеспечивающая сходимость ряда (1.7) в пространстве $[\rho,\infty]$). А.Ф. Леонтьев доказал следующую теорему.

Теорема 1.2. [5] *Для того чтобы задача (1.6) была разрешима в пространстве* $[\rho,\infty]$, $\rho > 0$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln \frac{1}{\Phi'(a_n)} \leqslant \rho.$$

Две задачи комплексного анализа, рассмотренные выше, не имеют, казалось бы, никакой связи между собой. Так казалось в течение почти тридцати лет, пока в 2000-х годах в работах Алексея

Михайловича Бородина и Андрея Юрьевича Окунькова не появилась дискретная версия задачи Римана [9], [10], [11]. С одной стороны, как и классическая задача Римана на контуре в Теореме 1.1, она обслуживала решение некоторого нелинейного уравнения. С другой стороны, как в Теореме 1.2, она очень напоминала задачу о свободной интерполяции целой функции на счетном множестве узлов.

Следует отметить специфику задач Римана для дискретного случая. Здесь задача сопряжения граничных значений на непрерывном контуре в комплексной плоскости заменяется заданием вычетов мероморфной функции на дискретном множестве точек. В теории солитонов аналогом этой задачи служит восстановление собственных функций по дискретному спектру заданного оператора, что эквивалентно решению задачи Римана с конечным числом нулей $\det \Psi_\pm$ в соответствующих областях аналитичности. В дискретном случае происходит вырождение сингулярной части Ψ-функции на счетном числе точек. Ниже в §2 этот подход будет проиллюстрирован на примере интегрирования дискретного уравнения Пенлеве второго типа и вычисления детерминанта Фредгольма одного интегрального оператора, возникающего в теории случайных матриц.

В заключительном §3 обсуждается разрешимость дискретной матричной задачи Римана. Оказывается, что эта задача эквивалентна интерполяции целой функции на счетном множестве узлов. Интерполяционный ряд Лагранжа (1.7) модифицируется таким образом, чтобы обслужить случай матричных коэффициентов и условие сопряжения на счетном числе узлов. В качестве иллюстрации вычисляется интерполяционный ряд для одного точного решения дискретной матричной задачи Римана.

2. Дискретная задача Римана

Следуя работам А.М. Бородина [10], [11], определим дискретную матричную задачу Римана (ДМЗР) следующим образом.

Пусть Σ – некоторое счетное множество точек на комплексной плоскости $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющее единственную предельную точку на бесконечности. Пусть $H(x)$ – нильпотентная матричная функция на Σ, $H : \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, $H^2(x) = 0$.

Будем говорить, что матричнозначная функция $Y : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ с простыми полюсами в точках $x \in \Sigma$ является решением *дискретной задачи Римана* (Σ, H), если выполняются следующие условия:

1° $Y(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и имеет простые полюсы в точках Σ,

2° $\mathrm{Res}_{\lambda=x} Y(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to x} \left(Y(\lambda)H(x)\right), \quad x \in \Sigma,$

3° $Y(\lambda) \to I$ при $\lambda \to \infty$.

Также как и выше, $H(\lambda)$ называется *матрицей скачка*.

Заметим, что условие 3° означает, что функция $Y(\lambda)$ имеет существенную особенность на бесконечности. В самом деле, функция с полюсами, накапливающимися к бесконечности, не может иметь регулярную асимптотику. Для того, чтобы условие было корректным, нужно потребовать, например, равномерную асимптотику на последовательности окружностей $|\lambda| = a_k$, $a_k \to +\infty$. Кроме того, будем предполагать, что существует последовательность расширяющихся контуров, таких что расстояние от них до множества Σ отграничено от нуля, и мы будем требовать, чтобы решение $Y(\lambda)$ имело нужную асимптотику на этих контурах.

Вопрос о существовании решений матричных задач Римана, как классической (Теорема 1.1), так и дискретной $1^\circ - 3^\circ$, достаточно сложен [12], [13]. Мы рассмотрим его ниже в §3. Напротив, единственность этих решений доказывается достаточно просто.

Теорема 2.1. *В условиях Теоремы 1.1 решение задачи Римана $\Phi_\pm(x, \lambda)$ единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения $\Phi_\pm(x, \lambda)$ и $\chi_\pm(x, \lambda)$. Рассмотрим матричные функции $\Phi_+(x, \lambda)\chi_+^{-1}(x, \lambda)$ и $\Phi_-(x, \lambda)\chi_-^{-1}(x, \lambda)$. Эти функции в силу условия 1) аналитичны по λ соответственно в верхней и нижней полуплоскости, а на вещественной оси совпадают в силу условия 3). На бесконечности они стремятся к единичной матрице по условию 2). Следовательно, по теореме Лиувилля они тождественно равны единице, то есть $\Phi_\pm(x, \lambda) = \chi_\pm(x, \lambda)$. □

Доказательство единственности решения ДМЗР несколько сложнее, но также основано на теореме Лиувилля.

Теорема 2.2. [10] *Решение задачи Римана $Y(\lambda)$, удовлетворяющей условиям $1^\circ - 3^\circ$, единственно.*

Доказательство. Докажем сначала, что матрица $Y(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)$ аналитична в окрестности точки x. В силу условия 1° имеем

$$Y(\lambda)=\frac{A(x)}{\lambda-x}+B(x)+O(\lambda-x),\quad \lambda\to x,$$

$$\operatorname{Res}_{\lambda=x}Y(\lambda)=A(x),\quad Y(\lambda)H(x)=\frac{A(x)H(x)}{\lambda-x}+B(x)H(x)+O(\lambda-x).$$

Тогда из условия 2° $\operatorname{Res}_{\lambda=x}Y(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to x}\left(Y(\lambda)H(x)\right)$ следует

$$A(x)H(x)=0,\quad A(x)=\lim_{\lambda\to x}\left(Y(\lambda)H(x)\right)=B(x)H(x). \tag{2.1}$$

Отсюда, учитывая условие $H^2(x)=0$, получим

$$Y(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)=B(x)+O(1), \tag{2.2}$$

что аналитично вблизи x.

Предположим, что $Y_1(\lambda)$ и $Y_2(\lambda)$ - два различных решения ДМЗР $1^\circ - 3^\circ$. Тогда матрица

$$\begin{aligned}Y_1(\lambda)Y_2^{-1}(\lambda)=&Y_1(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)^{-1}Y_2^{-1}(\lambda)\\=&Y_1(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\left(Y_2(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.3}$$

аналитична в $\mathbb{C}$, поскольку x - любая точка из Σ.

Из условия 3° функция $Y_1(\lambda)Y_2^{-1}(\lambda)\to I$ при $\lambda\to\infty$, тогда по теореме Лиувилля эта функция тождественно равна единичной матрице. □

Приведем примеры применения ДМЗР в нелинейных задачах математической физики.

Начнем с вывода пары Лакса для разностного нелинейного уравнения, которое решается с помощью ДМЗР. Для этого, также как и в непрерывном случае А.Б. Шабата, нужно получить два линейных матричных уравнения по переменной λ и x соответственно. Условием совместности этой пары Лакса будет искомое нелинейное уравнение [14], [17].

Обозначим

$$\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}+\frac{1}{2}=\left\{\dots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots\right\}=\mathbb{Z}'_+\cup\mathbb{Z}'_-,$$

где $\mathbb{Z}'_+=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots\right\}$ и $\mathbb{Z}'_-=\left\{\dots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.

Рассмотрим построение пары Лакса для задачи 1° – 3° в частном случае $N=2$ и $\Sigma=\Sigma_k$, где

$$\Sigma_k=\{k,k+1,k+2,\dots\},\quad k\in\mathbb{Z}',$$

$$H(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -\frac{\varkappa^{2x}}{\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & x\in\mathbb{Z}'_+,\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{\varkappa^{-2x}}{\Gamma^2\left(-x+\frac{1}{2}\right)} & 0\end{pmatrix}, & x\in\mathbb{Z}'_-.\end{cases} \tag{2.4}$$

Следуя [11] и [6], докажем, что для любого $n\in\mathbb{Z}_k$ существует постоянная нильпотентная матрица A_n,

$$A_n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\\ r_n & -p_n\end{pmatrix},\quad p_n^2=-r_nq_n, \tag{2.5}$$

и функции a_n, b_n, $a_n b_n = 1$, такие что

$$Y_{n+1}(\lambda) = \left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right) Y_n(\lambda), \tag{2.6}$$

$$Y_n(\lambda - 1) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda - \frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} Y_{n+1}(\lambda). \tag{2.7}$$

Действительно, поскольку H не зависит от n, мы видим, что $Y_n(\lambda)$ и $Y_{n+1}(\lambda)$ удовлетворяют одному и тому же условию скачка на Σ_n. Однако, Y_{n+1} имеет лишний полюс в точке $\{n\} = \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n$. Следовательно, отношение $Y_{n+1}Y_n^{-1}$ имеет один полюс в точке $\lambda = n$. Обозначая вычет в этой точке через A_n, мы заключаем, что функция

$$Y_{n+1}(\lambda)Y_n^{-1}(\lambda) - \frac{A_n}{\lambda - n}$$

является целой. Вычисляя асимптотику в окрестности $\lambda = \infty$, получаем по теореме Лиувилля, что эта функция тождественно равна I, что доказывает первое уравнение. Далее, из того, что $\det Y_n \equiv \det Y_{n+1} \equiv 1$, следует $\det(I + A_n/(\lambda - n)) \equiv 1$. Отсюда заключаем, что A_n нильпотентна.

Вывод уравнения (2.7) несколько сложнее. Из условия 3° следует, что

$$Y_n(\lambda) = I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty, \tag{2.8}$$

с некоторыми константами $\alpha_n, \dots, \delta_n$.

Разделим обе части уравнения (2.7) слева на матрицу $Y_{n+1}(\lambda)$ и докажем, что его левая часть является полиномом по λ. В силу (2.8) асимптотика при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1}\right) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} \lambda^{-1}\right) + O(\lambda^{-1}) \\ &\qquad = \varkappa^{-1} \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} + \alpha_n - \alpha_{n+1} & -\beta_{n+1} \\ \gamma_n & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Обозначим $a_n = -\varkappa^{-1}\beta_{n+1}$, $b_n = -\varkappa^{-1}\gamma_n$, $c_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Тогда из теоремы Лиувилля следует, что выражение (2) равно

$$\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение покажем, что $c_n = p_n$ и $a_n b_n = 1$. Второе равенство следует из того факта, что определитель $Y_n(\lambda)$ равен 1. Чтобы доказать, что $c_n = p_n$, подставим (2.6) в только что доказанное соотношение (2.7). Получаем

$$\begin{aligned} &Y_n(\lambda - 1) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda - \frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} \left(I + (\lambda - n)^{-1} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix}\right) Y_n(\lambda). \end{aligned}$$

Сравнивая асимптотику матричных элементов $(\,\cdot\,)_{11}$ в этом равенстве, заключаем, что $c_n = p_n$. Тем самым доказана справедливость уравнений пары Лакса (2.6) и (2.7).

Теорема 2.3. *Условием совместности уравнений пары Лакса (2.6) и (2.7) является дискретное уравнение Пенлеве второго типа (dPII)*

$$v_{n+1} + v_{n-1} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) v_n}{\varkappa(v_n^2 - 1)}, \tag{2.10}$$

где $v_n^2 = \varkappa^{-1} a_n r_n$.

Доказательство. Сдвигая λ на 1 в (2.7) и подставляя правую часть (2.7) в правую часть (2.6), получаем

$$Y_{n+1}(\lambda) = \left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_{n+1}(\lambda+1)\begin{pmatrix} \varkappa(\lambda+\frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, сдвигая n и λ на 1 в (2.6) и (2.7) и подставляя правую часть (2.6) в правую часть (2.7), получаем

$$Y_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix}\left(I + \frac{A_{n+1}}{\lambda - n}\right) \cdot Y_{n+1}(\lambda+1)\begin{pmatrix} \varkappa(\lambda+\frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти два соотношения, получим условие совместности для пары Лакса (2.6), (2.7)

$$\left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix}\left(I + \frac{A_{n+1}}{\lambda - n}\right). \tag{2.11}$$

Из матричного уравнения (2.11) легко получить скалярные уравнения на переменные p_n и r_n. А именно, вычисление асимптотики элементов $(\,\cdot\,)_{12}$ и $(\,\cdot\,)_{21}$ в равенстве (2.11) при $\lambda \to \infty$ дает соотношения

$$\begin{cases} a_n = a_{n+1} + \varkappa^{-1} q_{n+1}, \quad b_n = b_{n+1} + \varkappa^{-1} r_n, \\ a_n r_n = -b_{n+1} q_{n+1}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Вычеты в простом полюсе в $\lambda = n$ в равенстве (2.11) имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(n + \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(n + \frac{1}{2} - p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ r_{n+1} & -p_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Матричный элемент $(\,\cdot\,)_{22}$ этого равенства совпадает с последним равенством (2.12), а элемент $(\,\cdot\,)_{12}$ дает

$$a_n p_n = \varkappa^{-1}(\lambda + \tfrac{1}{2} - p_{n+1}) q_{n+1} - a_{n+1} p_{n+1}.$$

Умножая обе части на b_{n+1}, получаем (напомним, что $a_{n+1} b_{n+1} = 1$)

$$b_{n+1} a_n p_n = -\varkappa^{-1}(\lambda + \tfrac{1}{2} - p_{n+1}) a_n r_n - p_{n+1}. \tag{2.13}$$

Обозначим

$$s_n = a_n r_n,$$

тогда, умножая первое соотношение (2.12) на b_{n+1}, мы видим, что $a_n b_{n+1} = 1 - \varkappa^{-1} s_n$. Подставляя это выражение в (2.13), получаем

$$(p_n + p_{n+1})(s_n - \varkappa) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) s_n,$$

Используя нильпотентность матрицы A_n (2.5), имеем

$$p_{n+1}^2 = -q_{n+1} r_{n+1} = (-b_{n+1} q_{n+1})(a_{n+1} r_{n+1}) = s_n s_{n+1}.$$

Тем самым, для любого $n \in \mathbb{Z}_k$ получается система скалярных уравнений

$$\begin{cases} (p_n + p_{n+1})(s_n - \varkappa) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) s_n, \\ p_{n+1}^2 = s_n s_{n+1}. \end{cases}$$

Из этой системы легко исключить переменную p_n, а именно, полагая

$$s_n = \varkappa v_n^2,$$

получим скалярное разностное уравнение (2.10). □

Отметим, что в работах [16], [18] дискретное уравнение Пенлеве dPII выведено из симметрийных соображений без использования техники ДМЗР.

Другим примером применения ДМЗР служит вычисление детерминантов Фредгольма интегральных операторов, связанных с теорией представлений групп и задачами комбинаторики. Таким оператором является интегральный оператор с бесселевым ядром [13], [19]

$$Q(x,y)=\varkappa\frac{J_{x-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{y+\frac{1}{2}}(2\varkappa)-J_{y-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{x+\frac{1}{2}}(2\varkappa)}{x-y}, \tag{2.14}$$

где $\varkappa$ - параметр, а J_ν - это J-функция Бесселя.

Положим $x,y\in\mathbb{Z}'=\left\{\dots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots\right\}$ и обозначим

$$\Sigma_k=\{k,k+1,k+2\dots\}\,,\quad k\in\mathbb{Z}'.$$

Определим Q_k как сужение оператора Q на $\ell_2(\Sigma_k)$

$$Q_kf(x)=\sum_{y=k}^{\infty}Q(x,y)f(y),\quad f\in\ell_2(\Sigma_k).$$

Оператор Q_k является ядерным и положительным [11], поэтому существует его определитель Фредгольма

$$D_k=\det(1-Q_k),\quad D_k\neq 0.$$

Положим $R_s=Q_k(1-Q_k)^{-1}$. Этот оператор выражается из решения следующей ДМЗР [11]:

(a) $Y(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ и имеет простые полюсы в точках Σ,

(b) $\mathrm{Res}_{\lambda=x}Y(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to x}\left(Y(\lambda)H(x)\right),\quad x\in\Sigma_k,\quad H^2(x)=0,$

(c) $\det Y(\lambda)\equiv 1$,

где матрица скачка H определяется формулой (2.4). Заметим, что задача $1^\circ-3^\circ$ отличается от задачи (a) - (c) условием нормировки (c), то есть не требуется как в 3° ограниченности решения $Y(\lambda)$ на бесконечности.

Пусть существует решение ДМЗР (a) - (c) в виде

$$Y(\lambda)=\begin{pmatrix}\phi & \hat\phi\\ \psi & \hat\psi\end{pmatrix},$$

тогда ядро оператора R_k представляется в виде

$$R_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\phi(x)\psi(y)-\phi(y)\psi(x)}{x-y}, & x\neq y,\\ \psi(x)\hat\psi(x)-\phi(x)\hat\phi(x), & x=y.\end{cases} \tag{2.15}$$

Оказывается [11], что ДМЗР (a) - (c) допускает явное решение

$$Y(\lambda)=\sqrt{\varkappa}\begin{pmatrix}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa)\\ -J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varkappa^{-\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) & 0\\ 0 & \varkappa^{\lambda}\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

причем

$$1+R_k=\frac{\det(1-Q_{k+1})}{\det(1-Q_k)}=\frac{D_{k+1}}{D_k}.$$

Теорема 2.4. [9] *Пусть $k\in\mathbb{Z}'$ и v_k - решение дискретного уравнения Пенлеве (2.10) с начальными условиями*

$$v_{-\frac{1}{2}}=-1,\quad v_{\frac{1}{2}}=\frac{I_1(2\varkappa)}{I_0(2\varkappa)},$$

где I_0 и I_1 - это I-функции Бесселя. Тогда при всех $k\geq\frac{1}{2}$ справедливо соотношение

$$v_k^2=1-\frac{D_kD_{k+2}}{D_{k+1}^2}.$$

3. Существование решения ДМЗР и задача интерполяции

Учитывая приложения ДМЗР, упомянутые в §2, упростим задачу поиска мероморфной функции, удовлетворяющей условиям $1^\circ - 3^\circ$. Рассмотрим множество простых полюсов $x_n \in \Sigma$, распределенных в $\mathbb{C}$ с условиями

$$0 < \operatorname{Re} x_1 \leqslant \operatorname{Re} x_2 \leqslant \dots, \quad x_n = \frac{n+\alpha}{\sigma} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

причем $x_0 = 0$ и $x_{-n} = -x_n$.

Определим каноническое произведение в виде

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{x_n^2}\right) \tag{3.2}$$

с индикатрисой роста

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\Phi\left(re^{i\theta}\right)|}{r} = \pi\sigma|\sin\theta|.$$

Условия (3.1) заведомо удовлетворяют Теореме 1.2 об узлах интерполяции, поскольку предел, указанный там, равен нулю при $a_n = x_n$. Поэтому существует интерполяция целой функции $F(\lambda)$ с узлами в точках x_n. В данном случае, однако, можно применить более простую теорему ([3], гл. II, теорема 2.6.5)

Теорема 3.1. *Пусть $F(\lambda)$ - целая функция с условием*

$$|F(\mu + i\nu)| \leqslant |\mu|^{\alpha+1}\delta(|\mu|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\nu|}, \quad \epsilon \to 0, \quad \delta(\mu) \to 0, \quad \mu \to \infty, \tag{3.3}$$

а последовательность x_n удовлетворяет условию (3.1). Тогда

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_n)}{\Phi'(x_n)} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda - x_n}.$$

Используем Теорему 3.1 для конструкции решения ДМЗР по заданной матрице скачка.

Предположим, что узлы x_n решения ДМЗР $1^\circ - 3^\circ$ удовлетворяют условиям (3.1), и определим каноническое произведение формулой (3.2). Пусть элементы матриц $B(\lambda)$ и $H(\lambda)$ являются целыми функциями и удовлетворяют оценкам (3.3)

$$|B_{ij}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{\alpha+1}\delta(|\lambda|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\operatorname{Im}\lambda|},$$
$$|H_{ij}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{\alpha+1}\delta(|\lambda|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad \delta(|\lambda|) \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

По теореме 3.1 существует решение интерполяционной задачи

$$Y(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A(x_n)}{\lambda - x_n} + B(x_n)\right) \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi'(x_n)(\lambda - x_n)}, \tag{3.4}$$

где $A(x)$ имеет порядок роста не более $\pi\sigma$.

Очевидно, что $Y(\lambda)$ является мероморфной матрицей, имеющей простые полюсы в узлах $x_n = x$ с рядом Лорана

$$Y(\lambda) = \frac{A(x)}{\lambda - x} + \left(A(x)\frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)} + B(x)\right) + O(\lambda - x), \quad \lambda \to x.$$

Из этого разложения следует условие скачка 2° в виде

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=x} Y(\lambda) = A(x) = \lim_{\lambda\to x} Y(\lambda)H(\lambda) = \lim_{\lambda\to x} \left(A(x)\frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)} + B(x)\right) H(\lambda).$$

Для того, чтобы согласовать это равенство с (2.1), применим условие нильпотентности матрицы $H(\lambda)$

$$A(x)(I - \phi H(x)) = B(x)H(x), \quad (I - \phi H(x))(I + \phi H(x)) = I, \quad \phi = \frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)}.$$

Умножая справа первое равенство на $(I + \phi H(x))$ и вновь применяя нильпотентность $H(x)$, получим

$$A(x) = B(x)H(x). \tag{3.5}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Существует решение $Y(\lambda)$ ДМЗР 1°, 2° (без условия нормировки 3°) при распределении узлов скачка (3.1) в классе целых функций $Y(\lambda)\Phi(\lambda)$ конечного порядка.*

Как указано в теореме 2.2, решение ДМЗР единственно при выполнении всех трех условий $1^\circ - 3^\circ$. Поэтому следует найти способ достижения условия нормировки на бесконечности 3°. Заменим для простоты условие нормировки 3° условием (c) $\det Y(\lambda) = 1$, которое фигурирует в ДМЗР (a) - (c). Для этого снова воспользуемся нильпотентностью главных членов ряда Лорана (3.4).

Согласно (3.4) и (3.5) в каждом узле $\lambda = x$ ряд Лорана имеет вид

$$Y(\lambda) = \left(\frac{A(x)}{\lambda - x} + B(x) + O(\lambda - x)\right) = B(x)\left(\frac{H(x)}{\lambda - x} + I + O(\lambda - x)\right).$$

Поскольку $H^2(x) = 0$ имеем

$$\left(\frac{H(x)}{\lambda - x} + I\right)\left(-\frac{H(x)}{\lambda - x} + I\right) = I,$$

то есть матрица $I + H(x)/(\lambda - x)$ невырождена и $\det Y(\lambda) = \det B(x)$ при $\lambda = x$.

Разделим обе части формулы (3.4) на скалярный множитель $\Phi(\lambda)$ - каноническое произведение (3.2). Сходимость ряда от этого не пострадает, он по-прежнему будет представлять мероморфную функцию с полюсами в точках $\lambda = x_n$

$$\tilde{Y}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(x_n) + B(x_n)(\lambda - x_n)}{\Phi'(x_n)(\lambda - x_n)}. \tag{3.6}$$

Тогда эта функция ограничена на бесконечности,

$$\det \tilde{Y}(\lambda) = \det \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B(x_n)}{\Phi'(x_n)}, \quad \lambda \to \infty. \tag{3.7}$$

Условие (b) теперь превращается в систему уравнений

$$A(x_n) = \Phi'(x_n) \sum_{k \neq n} \frac{B(x_k)H(x_n)}{\Phi'(x_k)(x_k - x_n)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Тем самым, разрешимость ДМЗР (a) - (c) следует из разрешимости системы уравнений (3.7) и (3.8) на матрицы $A(x_n)$ и $B(x_n)$.

В качестве примера рассмотрим применение интерполяционного ряда (3.6) для точного решения ДМЗР (a) - (c) (2.16)

$$Y(\lambda) = \sqrt{\varkappa}\begin{pmatrix} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) \\ -J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa^{-\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \varkappa^{\lambda}\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

Заметим, что условие нормировки (c) $\det Y(\lambda) = 1$ следует из известных формул для гамма функции и функций Бесселя [1]

$$J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) + J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) = \frac{\cos\pi\lambda}{\pi\varkappa},$$
$$\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\pi\lambda}.$$

Теорема 3.3. *Пусть матрица $Y(\lambda)$ является решением ДМЗР (a) - (c), заданным формулой (2.16). Тогда его матричные элементы представимы в виде рядов интерполяции с узлами*

$x_n = n,\ n \in \mathbb{Z}$

$$Y_{11}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{n + \lambda - \frac{1}{2}},$$
$$Y_{12}(\lambda) = -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{n - \lambda - \frac{1}{2}}.$$

Матричные элементы Y_{21} и Y_{22} имеют аналогичное представление.

Доказательство. Согласно (2.16) матричные элементы имею вид

$$Y_{11}(\lambda) = \varkappa^{-\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa), \quad Y_{12}(\lambda) = \varkappa^{\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa). \tag{3.9}$$

Заметим, что в задаче (a) - (c) условие скачка задано в точках $x \in \mathbb{Z}'$, то есть $\lambda = x$ отвечает полуцелым значениям, $\lambda \pm \frac{1}{2} = n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Воспользуемся известным рядом Неймана по функциям Бесселя с целым значком ([1], гл. 7.15, формула (10))

$$\Gamma(\zeta - \mu) J_\zeta(2\varkappa) = \Gamma(\mu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\Gamma(\zeta - \mu + n)}{\Gamma(\zeta + n + 1) n!} \varkappa^{\zeta - \mu + n} J_{n+\mu}(2\varkappa).$$

Полагая $\mu = 0$ и пользуясь соотношением $\Gamma(\zeta + n + 1) = (\zeta + n)\Gamma(\zeta + n)$, последний ряд можно переписать в виде

$$\Gamma(\zeta) J_\zeta(2\varkappa) = \varkappa^\zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{\zeta + n}.$$

Переходя к переменной $\lambda - \frac{1}{2} = \zeta$ и снова используя формулу $\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$, получаем первую формулу (3.3). Вторая формула (3.3) получается заменой $\lambda + \frac{1}{2} = \zeta$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* Т.2, М.: Наука. 1974.
2. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов и метод обратной задачи.* М.:, Наука. 1980.
3. И.И. Ибрагимов. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* М.: Наука. 1971.
4. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.:, Наука. 1976.
5. А.Ф. Леонтьев. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // ДАН СССР. **61**:5, 785–787 (1948).
6. В.Ю. Новокшенов. *Дискретные интегрируемые уравнения и специальные функции* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 119–131 (2017).
7. А.Б. Шабат. *Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений* // Функц. анализ и его прилож. **9**:3, 75–78 (1975).
8. А.Б. Шабат. *Обратная задача рассеяния* // Дифференц. уравнения. **15**:10, 1824–1834 (1979).
9. A. Borodin, A. Okounkov. *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants* // Integral Equations Operator Theory. **37**:4, 386–396 (2000).
10. A. Borodin. *Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations* // Duke Math. J. **117**:3, 1–54 (2003).
11. A. Borodin. *Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations* // Ann. Math. **160**:3, 1141–1182 (2004).
12. K. Clancey, I. Gohberg. *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, Operator Theory: Advances and Applications, **3**, Birkhauser Verlag, Basel (1981).
13. P. Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach* // Courant Lecture Notes, New York Univ. (1999).

14. A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Kapaev, V.Yu. Novokshenov. *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach* // Math. Surveys and Monographs, V.128, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2006).
15. F.D. Gakhov. *Boundary value problems.* Dover Publications, New York (1990).
16. B. Grammaticos, F.W. Nijhof, A. Ramani. *Discrete Painlevé equations, The Painlevé property* // CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 413–516 (1999).
17. A.R. Its. *The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems* // Notices of the Amer. Math. Soc. **50**:11, 1389–1400 (2003).
18. H. Sakai. *Rational Surfaces Associated with Affine Root Systems and Geometry of the Painlevé Equations* // Comm. Math. Phys. **220**:1, 165–229 (2001).
19. C.A. Tracy, H. Widom. *Random unitary matrices, permutations and Painlevé* // Comm. Math. Phys. **207**:3, 665–685 (1999).

Виктор Юрьевич Новокшенов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `novik53@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 86-103.

УДК 517.957

*Посвящается светлой памяти Алексея Борисовича Шабата –
одного из главных создателей современной теории
классических интегрируемых систем*

КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АКНС ИЕРАРХИИ

А.О. СМИРНОВ, В.Б. МАТВЕЕВ

Аннотация. Нелинейные нелокальные модели существуют во многих областях физики. Наиболее известными из них являются модели, обладающие $\mathcal{PT}$-симметрией. Кроме $\mathcal{PT}$-симметричных моделей активно исследуются нелокальные модели с обратным временем и/или координатой. Другие виды нелокальностей встречаются намного реже. Как правило, в работах, посвященых нелинейным нелокальным уравнениям, рассматриваются солитонные или квази-рациональные решения одного из этих уравнений. В представленной нами работе рассмотрены нелокальные симметрии, которым удовлетворяют все уравнения из иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура. На основании свойств решений, удовлетворяющих нелокальным редукциям уравнений из иерархии АКНС, предложена модификация тэта-функциональной формулы для функции Бейкера-Ахиезера. Найдены условия на параметры спектральных кривых, ассоциированных с многофазными решениями, не имеющих экспоненциального роста на бесконечности. Показано, что при выполнении данных условий происходит разделение переменных. Большинство утверждений нашей работы является верным и для солитонных и квази-рациональных решений, поскольку они являются предельными случаями многофазных.

Ключевые слова: уравнение НШ, иерархия АКНС, нелокальное уравнение, PT симметрия, конечнозонное решение, спектральная кривая, тэта функция.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 35Q55, 35Q60

Введение

Нелинейные нелокальные модели возникают во многих областях физики. Наиболее известными из них являются модели, обладающие $\mathcal{PT}$-симметрией. Для общего представления о роли $\mathcal{PT}$-симметрии в широком круге физических задач, связанных со спектральной теорией неэрмитовых операторов с вещественными спектрами, ее проявлениями в теории нелинейных волн в различных физических средах и, в частности, в теории нелокальных интегрируемых систем, можно рекомендовать обзор [1] и недавнюю книгу [2].

После появления работ Абловица и Муcслимани [3]– [8] резко увеличилось внимание к решениям нелокальных интегрируемых нелинейных уравнения (см., например, [9]– [30]). Как правило, в этих работах для построения решений авторы использовали преобразование Дарбу или метод Хироты. Естественно, встал вопрос о возможности построения решений нелокальных интегрируемых уравнений методом конечнозонного интегрирования. Первые наши результаты по теории конечнозонных решений нелокальных интегрируемых

A.O. Smirnov, V.B. Matveev, Finite-gap solutions of nonlocal equations in Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy.

© Смирнов А.О., Матвеев В.Б. 2021.

Исследования были выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-01-00734) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № FSRF-2020-0004).

Поступила 15 марта 2021 г.

уравнений из АКНС иерархии были опубликованы в работах [31]– [33]. В настоящей работе мы подводим итоги наших исследований по данной теме.

Представленная работа состоит из пяти разделов. В первым разделе, следуя [34], [35], мы выводим уравнения из АКНС иерархии и анализируем их симметрии. Второй раздел посвящен предлагаемой нами модификации функции Бейкера-Ахиезера. За основу взята функция Бейкера-Ахиезера для классических вариантов нелинейного уравнения Шредингера [36]– [38]. В заключение второго раздела приводятся формулы для конечнозонных решений, соответствующих предложенной нами функции Бейкера-Ахиезера. В разделе 3 исследованы свойства конечнозонных решений, построенных по трем классам спектральных кривых с антиголоморфной инволюцией. В общем случае конечнозонные решения, построенные по спектральным кривым с антиголоморной инволюцией, имеют экспоненциальный рост/убывание при стремлении значений независимых аргументов к положительной/отрицательной бесконечности. В связи с этим на спектральные кривые наложено дополнительное условие в виде наличия голоморфной инволюции. В разделах 4 и 5 показано, как наличие данной голоморфной инволюции влияет на параметры построенных в разделе 2 конечнозонных решений нелокальных уравнений АКНС иерархии. В частности, в разделе 5 показано, что наличие голоморфной инволюции приводит к разделению переменных: каждая тэта-функция конечнозонного решения является суммой, составленной из произведений двух тэта-функций меньшей размерности. В аргументе одной из меньших тэта-функций будут присутствовать времена с нечетным индексом $t_1, t_3, \ldots$, в аргументе второй – переменная x и времена с четным индексом $t_2, t_4, \ldots$. Также в разделе 5 приведены примеры выражающихся через одномерные тэта-функции двухзонных решений нелокальных уравнений АКНС иерархии.

1. Уравнения из АКНС иерархии

Хорошо известно, что уравнения из АКНС иерархии [39] получаются как результат совместного рассмотрения уравнений

$$\begin{cases}\Psi_x = \mathfrak{U}\Psi, \\ \Psi_{t_k} = \mathfrak{V}_k\Psi,\end{cases} \tag{1.1}$$

где (см., например, [34], [35])

$$\mathfrak{U} := \lambda J + \mathfrak{U}^0, \quad \mathfrak{V}_1 := 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, \quad \mathfrak{V}_{k+1} := 2\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, \quad k \geqslant 1, \tag{1.2}$$

$$J := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U}^0 := \begin{pmatrix} 0 & ip \\ -iq & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{V}_k^0 = \begin{pmatrix} -i^k F_k(p,q) & i^{k-1}H_k(p,q) \\ i^{k-1}G_k(p,q) & i^k F_k(p,q) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Из уравнения

$$(\Psi_x)_{t_k} = (\Psi_{t_k})_x$$

вытекают следующие рекуррентные соотношения на функции $F_k(p,q)$, $H_k(p,q)$ и $G_k(p,q)$:

$$\begin{gathered} H_1(p,q) = -p_x, \qquad G_1(p,q) = -q_x, \\ (F_k(p,q))_x = -pG_k(p,q) - qH_k(p,q), \\ H_{k+1}(p,q) = 2pF_k(p,q) + (H_k(p,q))_x\,, \\ G_{k+1}(p,q) = -2qF_k(p,q) - (G_k(p,q))_x\,. \end{gathered}$$

В частности,

$$\begin{aligned} &F_1(p,q) = pq, \quad H_2(p,q) = 2p^2q - p_{xx}, \\ &G_2(p,q) = -2q^2p + q_{xx}, \quad F_2(p,q) = p_xq - pq_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3(p,q) &= 6pqp_x - p_{xxx}, \quad G_3(p,q) = 6pqq_x - q_{xxx},\\
F_3(p,q) &= pq_{xx} + qp_{xx} - p_xq_x - 3p^2q^2,\\
H_4(p,q) &= -6p^3q^2 + 6qp_x^2 + 4pp_xq_x + 8pqp_{xx} + 2p^2q_{xx} - p_{xxxx},\\
G_4(p,q) &= 6p^2q^3 - 6pq_x^2 - 4qp_xq_x - 8pqq_{xx} - 2q^2p_{xx} + q_{xxxx},\\
F_4(p,q) &= -6pq^2p_x + 6p^2qq_x - q_xp_{xx} + p_xq_{xx} + qp_{xxx} - pq_{xxx},\\
H_5(p,q) &= -30p^2q^2p_x + 10p_x^2q_x + 20qp_xp_{xx} + 10pq_xp_{xx}\\
&\quad + 10pp_xq_{xx} + 10pqp_{xxx} - p_{xxxxx},\\
G_5(p,q) &= -30p^2q^2q_x + 10p_xq_x^2 + 10qq_xp_{xx} + 10qp_xq_{xx}\\
&\quad + 20pq_xq_{xx} + 10pqq_{xxx} - q_{xxxxx},\\
F_5(p,q) &= 10p^3q^3 - 5q^2p_x^2 - 5p^2q_x^2 - 10pq^2p_{xx} - 10p^2qq_{xx} + p_{xx}q_{xx}\\
&\quad - q_xp_{xxx} - p_xq_{xxx} + qp_{xxxx} + pq_{xxxx}.
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что функции $F_k(p,q)$, $H_k(p,q)$ и $G_k(p,q)$ обладают следующими свойствами [34], [35]

$$\begin{gathered}
F_k(q,p) = (-1)^{k-1}F_k(p,q), \quad F_k(-p,-q) = F_k(p,q),\\
G_{k+1}(p,q) = (-1)^kH_{k+1}(q,p), \quad H_{k+1}(-p,-q) = -H_{k+1}(p,q)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

и

$$\begin{aligned}
F_k\left(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}\right) &= (-1)^{k-1} \left.F_k(p,q)\right|_{x=-x},\\
G_k\left(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}\right) &= (-1)^{k} \left.G_k(p,q)\right|_{x=-x},\\
H_k\left(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}\right) &= (-1)^{k} \left.H_k(p,q)\right|_{x=-x}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Следствием условий совместности также являются интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения АКНС иерархии, которые имеют вид

$$p_{t_k} = -i^kH_{k+1}(p,q), \quad q_{t_k} = -i^kG_{k+1}(p,q)$$

или

$$p_{t_k} + i^kH_{k+1}(p,q) = 0, \quad q_{t_k} + (-i)^kH_{k+1}(q,p) = 0. \tag{1.7}$$

В наших обозначениях классические интегрируемые нелинейные уравнения имеют следующий вид:

1. фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера
$$ip_{t_1} - H_2(p,-p^*) = 0;$$
2. дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера
$$ip_{t_1} - H_2(p,p^*) = 0;$$
3. действительное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза
$$p_{t_2} - H_3(p,\pm p) = 0;$$
4. уравнение Лакшманана-Порсециана-Даниеля ([40–42], $t = -t_3$)
$$ip_t - H_4(p,-p^*) = 0.$$

2. Функция Бейкера-Ахиезера для нелокальных уравнений

Сделаем в уравнениях (1.2) замену спектрального параметра $\lambda \to i\lambda$:

$$\mathfrak{U} := i\lambda J + \mathfrak{U}^0, \quad \mathfrak{V}_1 := 2i\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, \quad \mathfrak{V}_{k+1} := 2i\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, \quad k \geqslant 1. \tag{2.1}$$

Нетрудно понять, что условия совместности пар Лакса (1.1) при этом не изменятся, хотя поменяются условия вещественности, а также редукции, содержащие операцию комплексного сопряжения.

Следуя [36], [37] (см. также [34], [35], [43]– [45]) зададим гиперэллиптическую кривую $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$ рода g

$$\Gamma: \quad \chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+2}(\lambda - \lambda_j) \equiv \lambda^{2g+2} + \sum_{j=1}^{2g+2} \chi_j \lambda^{2g+2-j}, \quad \chi_j \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Выберем на Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем на Γ также нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$d\mathcal{U}_j = \sum_{k=1}^{g} c_{jk}\lambda^{g-k}\frac{d\lambda}{\chi}, \tag{2.3}$$

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g \tag{2.4}$$

с матрицей периодов

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \qquad B^t = B, \quad \mathrm{Im}(B) > 0. \tag{2.5}$$

Построим по матрице периодов g-мерную тэта-функцию с характеристиками $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^g$ [46]– [51]:

$$\begin{gathered} \Theta[\boldsymbol{\eta}^t; \boldsymbol{\zeta}^t](\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta})^t B(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta}) + 2\pi i(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta})^t(\mathbf{p}+\boldsymbol{\zeta})\}, \\ \Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}), \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$, суммирование проходит по целочисленной g-мерной решетке.

Определим также на Γ нормированные абелевы интегралы второго — $\Omega_j(\mathcal{P})$ и третьего — $\omega_0(\mathcal{P})$, рода с асимптотикой в бесконечно удаленных точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\oint_{a_k} d\Omega_j = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, \qquad k = 1, \dots, g,$$

$$\Omega_j(\mathcal{P}) = \pm\left((2i)^{j-1}\lambda^j - K_j + O\left(\lambda^{-1}\right)\right), \qquad \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm, \tag{2.7}$$

$$\omega_0(\mathcal{P}) = \mp\left(\ln\lambda - \ln K_0 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right), \qquad \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm, \tag{2.8}$$

$$\chi = \pm\left(\lambda^{g+1} + O\left(\lambda^g\right)\right), \qquad \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm.$$

Обозначим через $2\pi i\mathbf{V}^j$ векторы b-периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_j(\mathcal{P})$.

Следуя [36], [37] и [38], зададим однозначную от точки $\mathcal{P} \in \Gamma$ векторную функцию Бейкера-Ахиезера

$$\Psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) \\ \phi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{x} = (x, t_1, t_2, \dots)^t$,

$$\psi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = r_1(\mathbf{x})\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0)}\exp\left\{\Omega(\mathcal{P},\mathbf{x})\right\},$$
$$\phi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = r_2(\mathbf{x})\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0)}\exp\left\{\omega_0(\mathcal{P}) + \Omega(\mathcal{P},\mathbf{x}))\right\}.$$

Здесь r_j – нормирующие множители, $\mathbf{\Delta}$ — вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки $\mathcal{P}_\infty^-$ и $\mathcal{P}_\infty^+$, и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\mathbf{\Delta} = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^1 x + \sum_{j\geq 1}\mathbf{V}^{j+1}t_j,$$
$$\Omega(\mathcal{P},\mathbf{x}) = x\Omega_1(\mathcal{P}) + \sum_{j\geq 1} t_j\Omega_{j+1}(\mathcal{P}),$$

$\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{C}^g$ – вектор, задающий начальную фазу.

Нормирующие множители

$$r_1(\mathbf{x}) = \rho_1\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^+) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))}\exp\left\{K_1 x + \sum_{j\geq 1}K_{j+1}t_j\right\},$$
$$r_2(\mathbf{x}) = K_0\rho_2\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^-) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^-) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Delta})}\exp\left\{-K_1 x - \sum_{j\geq 1}K_{j+1}t_j\right\},$$

находим из асимптотики вектор-функции (2.9) в окрестности бесконечно удаленных точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\psi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = \left(\rho_1 + \sum_{j\geq 1}\alpha_j^+(\mathbf{x})\lambda^{-j}\right)\exp\left\{x\lambda + \sum_{j\geq 1}t_j(2i)^j\lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+,$$
$$\phi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\left(s_2(\mathbf{x}) + \sum_{j\geq 1}\beta_j^+(\mathbf{x})\lambda^{-j}\right)\exp\left\{x\lambda + \sum_{j\geq 1}t_j(2i)^j\lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+,$$
$$\psi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = \left(s_1(\mathbf{x}) + \sum_{j\geq 1}\alpha_j^-(\mathbf{x})\lambda^{-j}\right)\exp\left\{-x\lambda - \sum_{j\geq 1}t_j(2i)^j\lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^-,$$
$$\phi(\mathcal{P},\mathbf{x}) = \lambda\left(\rho_2 + \sum_{j\geq 1}\beta_j^-(\mathbf{x})\lambda^{-j}\right)\exp\left\{-x\lambda - \sum_{j\geq 1}t_j(2i)^j\lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^-.$$

Теорема 2.1. *Алгебро-геометрические решения уравнений АКНС иерархии, построенные по функции Бейкера-Ахиезера (2.9), имеют вид*

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \frac{2iA\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))}\exp\{2\Phi(\mathbf{x})\}, \\ q(\mathbf{x}) &= \frac{2i\rho_2 K_0^2}{A\rho_1}\frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))}\exp\{-2\Phi(\mathbf{x})\}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$A = \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) - \mathbf{Z}_0)}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = K_1 x + \sum_{j\geq 1}K_{j+1}t_j.$$

3. Алгебро-геометрические решения, построенные по спектральной кривой с антиинволюцией

Пусть канонический базис циклов преобразуется при антиголоморфной инволюции
$$\tau_a : (\chi, \lambda) \to (\chi^*, \lambda^*) \tag{3.1}$$
по следующим формулам ($\sigma_a = \pm 1$)
$$\tau_a \mathbf{a} = \sigma_a \mathbf{a}, \quad \tau_a \mathbf{b} = -\sigma_a(\mathbf{b} + K\mathbf{a}). \tag{3.2}$$

Введем обозначения
$$\mathcal{A}_{jm} = \oint_{a_j} \lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi}, \quad \mathcal{B}_{jm} = \oint_{b_j} \lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi}.$$
Тогда матрица коэффициентов нормированных голоморфных дифференциалов (2.3) и матрица периодов (2.5) равны
$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}^t)^{-1}, \quad B = \mathcal{B}\mathcal{C}^t = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}.$$

Из уравнения
$$\int_{\tau\ell} d\omega = \int_\ell \tau d\omega,$$
где ℓ есть произвольный путь на Γ, а $d\omega$ – произвольный абелев дифференциал, следует, что
$$(\mathcal{A}_{jm})^* = \oint_{a_j}\left(\lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi}\right)^* = \oint_{a_j}\tau_a\left(\lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi}\right)$$
$$= \oint_{\tau_a a_j}\lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi} = \sigma_a\oint_{a_j}\lambda^{g-m}\frac{d\lambda}{\chi} = \sigma_a\mathcal{A}_{jm}.$$
Следовательно, $\mathcal{A}^* = \sigma_a\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}^* = \sigma_a\mathcal{C}$. Поступая аналогично с интегралами по b-циклам, получаем
$$\mathcal{B}^* = -\sigma_a(\mathcal{B} + K\mathcal{A}) \quad \text{или} \quad B^* = -B - K$$
и
$$\mathrm{Re}(B) = -\frac{1}{2}K. \tag{3.3}$$

Обобщая эти формулы на произвольный путь ℓ, имеем
$$\left(\int_\ell d\mathcal{U}\right)^* = \sigma_a\int_{\tau_a\ell} d\mathcal{U}. \tag{3.4}$$

Из билинейных соотношений Римана (см., например, [38], [46], [49]) следует, что
$$V_j^k = \operatorname*{Res}_{\mathcal{P}_\infty^+}(\mathcal{U}_j(\mathcal{P})d\Omega_k) - \operatorname*{Res}_{\mathcal{P}_\infty^-}(\mathcal{U}_j(\mathcal{P})d\Omega_k) = \frac{-2^k i^{k-1}}{(k-1)!}\left.\frac{\partial^k\mathcal{U}_j}{\partial\xi_+^k}\right|_{\xi_+=0}.$$
Соответственно,
$$\left(\mathbf{V}^k\right)^* = (-1)^{k-1}\sigma_a\mathbf{V}^k. \tag{3.5}$$

Из равенств $(\Omega_j(\mathcal{P}))^* = (-1)^{j-1}\Omega_j(\tau_a\mathcal{P})$ и $\tau_a\mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm$ следует, что
$$K_j^* = (-1)^{j-1}K_j \quad \text{и} \quad \Phi^*(\mathbf{x}) = -\Phi(\widehat{J}\mathbf{x}),$$
где $\widehat{J}_{km} = (-1)^k\delta_{km}$.

Рассмотрим 4 типа спектральных кривых с инволюцией (3.1), (3.2).

1. Все точки ветвления не лежат на действительной оси, $\mathrm{Im}(\lambda_{2g+2}) \neq 0$, $\sigma_a = -1$, $\mathrm{Re}(B) \neq 0$ при $g > 1$, (например, рис. 1).
2. Только часть точек ветвления не лежит на действительной оси, $\sigma_a = -1$, $\mathrm{Re}(B) \neq 0$ при $g > 1$, (например, рис. 2).

3. Все точки ветвления лежат на действительной оси: $\mathrm{Im}(\lambda_j)=0$, $\sigma_a=-1$, $\mathrm{Re}(B)=0$ (рис. 3).
4. Все точки ветвления лежат на действительной оси: $\mathrm{Im}(\lambda_j)=0$, $\sigma_a=1$, $\mathrm{Re}(B)=0$ (рис. 4).

Во всех четырех случаях будем считать, что

$$\Omega_j(\mathcal{P})=\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\Omega_j,\qquad \omega_0(\mathcal{P})=\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0,\qquad \mathcal{U}(\mathcal{P})=\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\mathcal{U}.$$

Следовательно, во всех четырех случаях выполняются условия

$$\Omega_j(\tau_0\mathcal{P})=-\Omega_j(\mathcal{P}),\quad \omega_0(\tau_0\mathcal{P})=-\omega_0(\mathcal{P}),\quad \mathcal{U}(\tau_0\mathcal{P})=-\mathcal{U}(\mathcal{P}),$$
$$\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)=-\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-)\quad \text{и}\quad \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)=\frac{1}{2}\Delta,$$

где τ_0 есть гиперэллиптическая инволюция, $\tau_0:(\chi,\lambda)\to(-\chi,\lambda)$.

В **случае 1** выполняется условие $\tau_a\mathcal{P}_{2g+2}=\mathcal{P}_{2g+1}$. Поэтому из уравнения (3.4) и соотношения $\tau_a\mathcal{P}_\infty^\pm=\mathcal{P}_\infty^\pm$ вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^*&=\left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^+} d\mathcal{U}\right)^*=\sigma_a\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_\infty^+} d\mathcal{U}=\sigma_a\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U}+\sigma_a\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+),\\(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^*&=\left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^-} d\mathcal{U}\right)^*=\sigma_a\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_\infty^-} d\mathcal{U}=\sigma_a\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U}+\sigma_a\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-).\end{aligned}\tag{3.6}$$

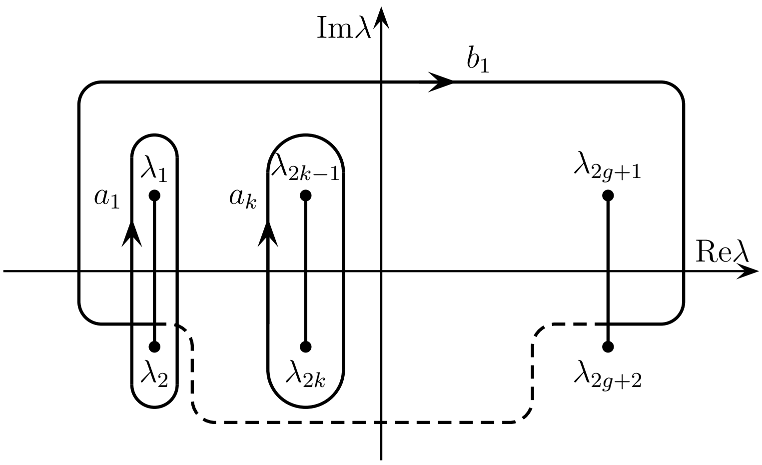

Рис. 1. Случай 1

Заметим, что пути интегрирования в уравнениях (3.6) принадлежат разным листам двулистной поверхности Γ. Поэтому в случае 1

$$\Delta^*=-\sigma_a\sum_{k=1}^{g}\int_{a_k} d\mathcal{U}+\sigma_a\Delta=\mathbf{e}-\Delta\quad \text{или}\quad \mathrm{Re}(\Delta)=\frac{1}{2}\mathbf{e},$$

где $e_j=1$, $j=1,\dots,g$.

Также в данном случае выполняется равенство

$$(\omega_0(\mathcal{P}))^*=\left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0\right)^*=\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}}\tau_a(d\omega_0)=\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\tau_a\mathcal{P}} d\omega_0=\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0+\omega_0(\tau_a\mathcal{P}),$$

где путь интегрирования, соединяющий точки $\mathcal{P}_{2g+1}$ и $\mathcal{P}_{2g+2}$, не пересекает базисные циклы. Вычисляя интеграл $\displaystyle\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0$, получаем

$$\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{g}\int_{a_k} d\omega_0 + 2\pi i \operatorname*{Res}_{\mathcal{P}_\infty^+}(d\omega_0)\right) = -\pi i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\ln K_0) &= \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}(\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*)\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}\int_{\tau_a\mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n\in\{0;1;-1\}\end{aligned}$$

или $K_0^2 = -|K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу $\mathbf{Z}_0$ так, что выполняется условие

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + B\mathbf{M} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{M},\mathbf{N}\in\mathbb{Z}^g, \quad \mathbf{N} = -(\mathrm{Re}B)\mathbf{M}, \tag{3.7}$$

имеем

$$\begin{aligned}p^*(\mathbf{x}) &= \frac{-2iA^*\rho_1^*}{\rho_2^*}\frac{\Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x}) + \Delta - \mathbf{e})}{\Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x}))}e^{-2\Phi(\widehat{J}\mathbf{x})}\\ &= -e^{\pi i\mathbf{M}^t\mathbf{e}}\left|\frac{A\rho_1}{K_0\rho_2}\right|^2 e^{2\pi\mathbf{M}^t\mathrm{Im}\Delta}q(\widehat{J}\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Таким образом, при $|\rho_2| = \left|A\rho_1K_0^{-1}\exp\{\pi\mathbf{M}^t\mathrm{Im}\Delta\}\right|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям $\mathrm{Im}(\lambda_j)\neq 0$, $\sigma_a = -1$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = \sigma p^*(\widehat{J}\mathbf{x})$, где

$$\sigma = -\exp\{\pi i\mathbf{M}^t\mathbf{e}\}. \tag{3.8}$$

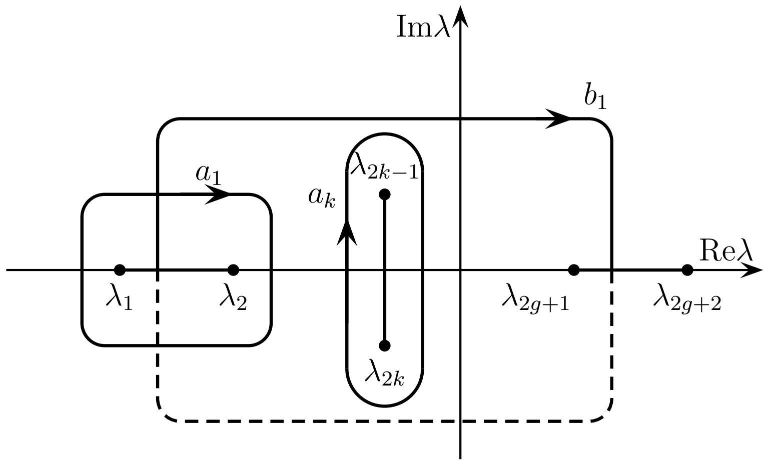

Рис. 2. Случай 2

В **случае 2** существуют отличные от нуля диагональные элементы матрицы K. Из формулы

$$\Theta^*(p|B) = \Theta(p^* + \mathbf{d}|B),$$

где $(\mathbf{d})_j = K_{jj}/2$, вытекает что спектральная кривая данного типа не может быть использована для построения нелокальных редукций многофазных решений из иерархии АКНС.

В **случае 3** выполняется условие $\tau_a\mathcal{P}_{2g+2}=\mathcal{P}_{2g+2}$, и поэтому
$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^* = -\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+), \quad (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^* = -\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) \quad \text{и} \quad \Delta^* = -\Delta,$$
и
$$(\omega_0(\mathcal{P}))^* = \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0\right)^* = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} \tau_a(d\omega_0) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\tau_a\mathcal{P}} d\omega_0 = \omega_0(\tau_a\mathcal{P}).$$

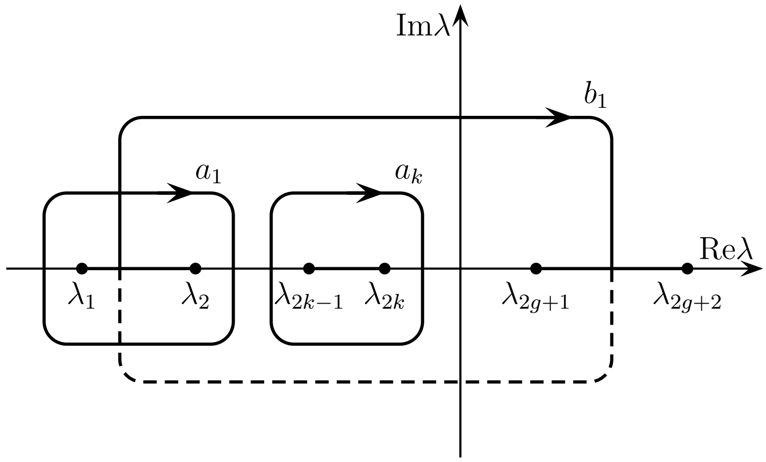

Рис. 3. Случай 3

Соответственно,
$$\mathrm{Im}(\ln K_0) = \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}(\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*) = \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}\int_{\tau_a\mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \pi n, \quad n\in\{0;1;-1\}$$
или $K_0^2 = |K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу $\mathbf{Z}_0$ так, что выполняется условие
$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + B\mathbf{M}, \quad \mathbf{M}\in\mathbb{Z}^g, \tag{3.9}$$
имеем
$$\begin{aligned} p^*(\mathbf{x}) &= \frac{-2iA^*\rho_1^*}{\rho_2^*}\frac{\Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)-\mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x})+\Delta)}{\Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)-\mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x}))}e^{-2\Phi(\widehat{J}\mathbf{x})} \\ &= \left|\frac{A\rho_1}{K_0\rho_2}\right|^2 e^{2\pi\mathbf{M}^t\mathrm{Im}\Delta}q(\widehat{J}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, при $|\rho_2| = \left|A\rho_1K_0^{-1}\exp\{\pi\mathbf{M}^t\mathrm{Im}\Delta\}\right|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям, $\mathrm{Re}(B)=0$, $\mathrm{Im}(\lambda_j)=0$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x})$.

Для **случая 4** снова выполняется условие $\tau_a\mathcal{P}_{2g+2}=\mathcal{P}_{2g+2}$, но поскольку $\sigma_a=1$, то
$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+), \quad (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) \quad \text{и} \quad \Delta^* = \Delta.$$

Аналогично случаю 3 выполняются равенства
$$(\omega_0(\mathcal{P}))^* = \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0\right)^* = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} \tau_a(d\omega_0) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\tau_a\mathcal{P}} d\omega_0 = \omega_0(\tau_a\mathcal{P})$$
и
$$\mathrm{Im}(\ln K_0) = \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}(\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*) = \frac{1}{2i}\lim_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^+}\int_{\tau_a\mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \pi n, \quad n\in\{0;1;-1\}$$

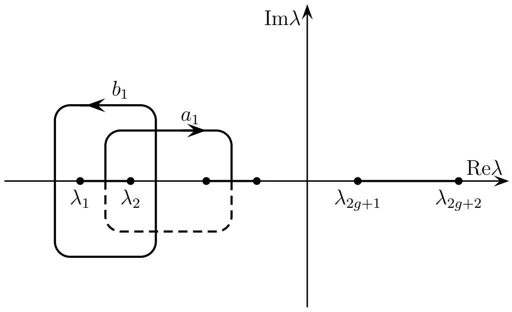

Рис. 4. Случай 4

или $K_0^2 = |K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу $\mathbf{Z}_0$ так, что выполняется условие

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = -(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0) + \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^g, \tag{3.10}$$

имеем

$$p^*(\mathbf{x}) = \frac{-2iA^*\rho_1^*}{\rho_2^*} \frac{\Theta(\mathbf{N} - (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + U(\widehat{J}\mathbf{x}) + \Delta))}{\Theta(\mathbf{N} - (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + U(\widehat{J}\mathbf{x})))} e^{-2\Phi(\widehat{J}\mathbf{x})} = \left|\frac{A\rho_1}{K_0\rho_2}\right|^2 q(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Таким образом, при $|\rho_2| = \left|A\rho_1 K_0^{-1}\right|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям $\mathrm{Im}(\lambda_{2g+2}) = 0$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x})$.

4. Решения, построенные по спектральной кривой с голоморфной инволюцией

К сожалению, алгебро-геометрические решения (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой (2.2), обладающей инволюцией (3.1), (3.2) при $K_{2j-1} \neq 0$ имеют экспоненциальный рост по соответствующим переменным. Этого можно избежать, если использовать гиперэллиптические кривые с голоморфной инволюцией

$$\tau_h : (\chi, \lambda) \to (\chi, -\lambda). \tag{4.1}$$

Легко видеть, что во всех четырех рассмотренных случаях базисы циклов преобразуются по правилу

$$\tau_h \mathbf{a} = S\mathbf{a}, \quad \tau_h \mathbf{b} = Q\mathbf{a} + R\mathbf{b}, \quad \tau_h \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm,$$

где (см., например, [38], [52])

$$SR^t = I \quad \text{и} \quad QR^t = RQ^t.$$

Вычисляя периоды голоморфных дифференциалов $d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) = d\mathcal{U}_j(\tau_h\mathcal{P})$, имеем

$$\int_{a_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) = \int_{\tau_h a_k} d\mathcal{U}_j = \sum_{m=1}^{g} S_{km} \int_{a_m} d\mathcal{U}_j = S_{kj},$$

$$\int_{a_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) = \sum_{m=1}^{g} c_{jm} \int_{a_k} \tau_h \left(\lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi}\right) = \sum_{m=1}^{g} c_{jm} (-1)^{g+1-m} \mathcal{A}_{km} = (\mathcal{A}J\mathcal{C}^t)_{kj},$$

где

$$J_{mn} = (-1)^{g+1-m} \delta_{mn}. \tag{4.2}$$

Соответственно, $d\widehat{\mathcal{U}} = S^t d\mathcal{U}$, а матрицы S и J подобны,

$$S = (\mathcal{C}^t)^{-1} J\mathcal{C}^t \quad \text{и} \quad S^t = \mathcal{C}J\mathcal{C}^{-1}.$$

Поскольку $R=(S^t)^{-1}$ и $S^2=I$, то $R=S^t$.

Интегрируя голоморфные дифференциалы по b-циклам, имеем

$$\int_{b_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P})=\int_{\tau_h b_k} d\mathcal{U}_j=\sum_{m=1}^{g}\left(Q_{km}\int_{a_m} d\mathcal{U}_j+R_{km}\int_{b_m} d\mathcal{U}_j\right)=(Q+RB)_{kj},$$
$$\int_{b_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P})=\sum_{m=1}^{g}(S^t)_{jm}\int_{b_k} d\mathcal{U}_m=(BS)_{kj},$$

или

$$BS=Q+RB. \tag{4.3}$$

Транспонируя равенство (4.3), имеем

$$S^tB=Q^t+BR^t \quad \text{или} \quad RB=Q^t+BS.$$

Следовательно, $Q^t=-Q$. Вычисляя действительную часть равенства (4.3), получаем

$$Q=(\mathrm{Re}B)S-S^t(\mathrm{Re}B)$$

и

$$S^tQ=S^t(\mathrm{Re}B)S-(\mathrm{Re}B)=Q^tS.$$

Заметим, что из асимптотики функции $\chi(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленных точек следует, что:

- если g – нечетное, то $\tau_h\mathcal{P}_\infty^\pm=\mathcal{P}_\infty^\pm$,
- если g – четное, то $\tau_h\mathcal{P}_\infty^\pm=\mathcal{P}_\infty^\mp$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S^t\Delta =&2\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^\pm} S^t d\mathcal{U}=2\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^\pm}\tau_h d\mathcal{U}=2\int_{\mathcal{P}_1}^{\tau_h\mathcal{P}_\infty^\pm} d\mathcal{U}\\ =&2\int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U}+2\mathcal{U}(\tau_h\mathcal{P}_\infty^+)=(-1)^{g+1}\Delta-2\mathcal{U}(\mathcal{P}_1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Введем обозначения: $\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P})=\Omega_j(\tau_h\mathcal{P})$. Эти интегралы обладают следующим свойствами:

$$\int_{a_k} d\widehat{\Omega}_j=\int_{\tau_h a_k} d\Omega_j=\sum_{m=1}^{g} S_{km}\int_{a_m} d\Omega_j=0,$$
$$\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P})=\pm\left((2i)^{j-1}(-\lambda)^j-K_j+O\left(\lambda^{-1}\right)\right),\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^\pm.$$

Поскольку абелев интеграл $\mu_j(\mathcal{P})=\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P})-(-1)^j\Omega_j(\mathcal{P})$ не имеет особенностей и имеет нулевые a-периоды, то он является постоянной величиной. Из асимптотики $\mu_j(\mathcal{P})$ в бесконечно удаленных точках

$$\mu_j(\mathcal{P})=\mp\left((-1)^j-1\right)K_j+O\left(\lambda^{-1}\right),\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^\pm$$

следует, что $\mu_j(\mathcal{P})\equiv 0$, $\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P})\equiv(-1)^j\Omega_j(\mathcal{P})$, $K_{2j-1}=0$.

Таким образом, многофазные решения (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой (2.2) с инволюциями (3.1), (4.1) не имеют экспоненциального роста.

Вычисляя b-периоды абелевых интегралов второго рода, получаем

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathbf{V}}^j)_k&=\frac{1}{2\pi i}\int_{b_k} d\widehat{\Omega}_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_h b_k} d\Omega_j\\ &=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{g}\left(Q_{km}\int_{a_m} d\Omega_j+R_{km}\int_{b_m} d\Omega_j\right)=(R\mathbf{V}^j)_k,\end{aligned}$$

$$(\widehat{\mathbf{V}}^j)_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_k} d\widehat{\Omega}_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{b_k} d\Omega_j = (-1)^j(\mathbf{V}^j)_k.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{V}^j$ являются собственными векторами матрицы R: $R\mathbf{V}^j = (-1)^j\mathbf{V}^j$ или

$$S^t\mathbf{V}^j = (-1)^j\mathbf{V}^j. \tag{4.5}$$

Однофазные решения нелокальных уравнений из АКНС иерархии были рассмотрены нами в работах [31]– [33]. Поэтому далее мы будем считать, что $g > 1$.

В **случае 1** выполняется равенство $\mathrm{Re}(B_{jk}) = (\delta_{jk} - 1)/2$, а элементы матриц преобразования циклов при инволюции τ_h равны:

$$\begin{aligned} &S_{1k} = (-1)^g, \quad S_{jk} = (-1)^{g+1}\delta_{j,g+2-k}, \quad j = 2,\ldots,g, \quad k = 1,\ldots,g,\\ &Q_{jk} = (-1)^g(\delta_{j1} - \delta_{1k}), \quad j,k = 1,\ldots,g,\\ &(S^tQ)_{jk} = 1 - \delta_{j1}\delta_{1k}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

В частности, при $g = 2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

а при $g = 3$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Из уравнений (4.4), (4.6) и условия вещественности вектора Δ следует, что

$$S^t\Delta = (-1)^{g+1}\left(\Delta + (B - I)\mathbf{e}_1\right),$$

где $\mathbf{e}_1^t = (1, 0, \ldots, 0)$.

Можно показать, что при четном g условие (3.7) выполняется только для $\mathbf{M} \in 2\mathbb{Z}^g$. Следовательно, при четном g решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = -p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Вместе с тем, при нечетном g существуют начальные фазы $\mathbf{Z}_0$ для обоих видов редукций:

$$q(\mathbf{x}) = \pm p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

В **случае 3** элементы матрицы S определяются формулой (4.6), а также выполняются равенства:

$$\mathrm{Re}(B_{jk}) = 0, \quad Q_{jk} = 0, \quad S^t\Delta = (-1)^{g+1}\left(\Delta + B\mathbf{e}_1\right).$$

Нетрудно показать, что в случае 3 при любом $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$ и при начальной фазе $\mathbf{Z}_0$, удовлетворяющей условию (3.9), решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

В **случае 4**

$$\mathrm{Re}(B_{jk}) = 0, \quad Q_{jk} = 0, \quad S_{jk} = (-1)^g\delta_{j,g+1-k}, \quad j,k = 1,\ldots,g, \tag{4.7}$$

$$S^t\Delta = (-1)^{g+1}\left(\Delta - \mathbf{e}\right),$$

и при любом $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^g$ и при начальной фазе $\mathbf{Z}_0$, удовлетворяющей условию (3.10), решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5. Редукция алгебро-геометрического решения к тэта-функциям меньшей размерности

5.1. Общие положения. Из уравнения (4.3) следует, что матрица периодов B удовлетворяет уравнению

$$B = S^t B S - S^t Q. \tag{5.1}$$

Следуя [52], рассмотрим матрицу T, $T_{jk} \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющую условию

$$S = T J T^{-1}, \tag{5.2}$$

где матрица J определяется формулой (4.2).

В первом и третьем случаях, когда матрица S определяется условиями (4.6), из уравнения (5.2) вытекают следующие ограничения на элементы матрицы T:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=2}^{g} T_{mk} = \left((-1)^{k-1} - 1\right) T_{1k}, \\ &T_{g+2-j,k} = (-1)^k T_{jk}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Зафиксируем элементы первой строки матрицы T:

$$T_{1k} = 1, \quad k = 1, \dots, g.$$

Остальные элементы матрицы T определим следующим образом. Если $g = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} &T_{j,2k} = -\delta_{j,m+k} - \delta_{j,m+2-k}, \\ &T_{j,2k-1} = \delta_{j,m+k} - \delta_{j,m+2-k}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Если $g = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, то $T_{j1} = 0$,

$$\begin{aligned} &T_{j,2k} = -\delta_{j,m+1+k} - \delta_{j,m+2-k}, \\ &T_{j,2k+1} = \delta_{j,m+1+k} - \delta_{j,m+2-k}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Из свойств определителя следует, что $\det T = (-2)^m$.

В четвертом случае ограничения на элементы матрицы T имеют вид

$$T_{g+1-j,k} = (-1)^{k-1} T_{jk}.$$

Определим элементы матрицы T следующим образом. Если $g = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} &T_{jk} = 1 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2(m+1-j), \\ &T_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad 1 < j \leqslant m, \quad 2(m+1-j) < k \leqslant 2m, \quad m \neq 1, \\ &T_{jk} = (-1)^{k-1} \quad \text{при} \quad m < j \leqslant 2m, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2(j-m), \\ &T_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad m < j < 2m, \quad 2(j-m) < k \leqslant 2m, \quad m \neq 1. \end{aligned}$$

Если $g = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} &T_{jk} = 1 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2(m-j)+3, \\ &T_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad 1 < j \leqslant m, \quad 2(m-j)+3 < k \leqslant 2m+1, \quad m \neq 1, \\ &T_{jk} = (-1)^{k-1} \quad \text{при} \quad m < j \leqslant 2m+1, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2(j-m)-1, \\ &T_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad m < j < 2m+1, \quad 2(j-m) \leqslant k \leqslant 2m+1. \end{aligned}$$

В этом случае также выполняется равенство $\det T = (-2)^m$.

Введем обозначения

$$\widetilde{B} = T^t (i\mathrm{Im} B) T, \quad \widetilde{A} = T^t (\mathrm{Re} B) T, \quad \widetilde{\mathbf{V}}^j = T^t \mathbf{V}^j.$$

Из уравнений (4.5), (5.1) и (5.2) вытекают следующие соотношения

$$\widetilde{B} = J \widetilde{B} J, \quad J \widetilde{\mathbf{V}}^j = (-1)^j \widetilde{\mathbf{V}}^j, \quad (\widetilde{A})_{jk} \in \mathbb{Z}. \tag{5.3}$$

Заменяя порядок суммирования в формуле многомерной тэта-функции с матрицей B, получаем (см. [52])

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^g(T)} e^{-\pi i \boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k})(\widetilde{A}-D)\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k})}\Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k});\boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t\mathbf{p}|\widetilde{B}+D),$$

где суммирование $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^g(T)$ означает конечную сумму по $\mathbf{k}$: $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^g$, $0\leqslant T^{-1}\mathbf{k}<1$, D – диагональная матрица, $D_{jj}=\widetilde{A}_{jj}$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k})=T^{-1}\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k})=(\widetilde{A}-D)\boldsymbol{\eta}(k)$. Число слагаемых в сумме равно $|\det T|$. При этом, поскольку выполняются соотношения (5.3), матрица $\widetilde{B}$ имеет блочную структуру и тэта-функция

$$\Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k});\boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t\mathbf{p}|\widetilde{B}+D)$$

может быть представлена в виде произведений двух тэта-функций меньшей размерности. Таккже из соотношений (5.3) следует, что в аргументе одной из тэта-функций будут присутствовать времена с нечетным индексом $t_1,t_3,\ldots$, во втором – переменная x и времена с четным индексом $t_2,t_4,\ldots$

В заключение раздела приведем примеры представления двухфазных решений нелокальных уравнений из АКНС иерахии через одномерные тэта-функции.

5.2. Двухфазное решение. Случай 1. Вычисления, проведенные для спектральной кривой

$$\chi^2=(\lambda^2+c^2)\left(\lambda^4-2(a^2-b^2)\lambda^2+(a^2+b^2)^2\right),\quad a,b,c\in\mathbb{R}, \tag{5.4}$$

дают следующие формулы

$$B=\begin{pmatrix}2i\beta_1 & i\beta_1-1/2\\ i\beta_1-1/2 & i\beta_2\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}1/2-i\beta_1\\ 1/2+i\delta_2\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{V}^{2j-1}=\begin{pmatrix}0\\ iv_{2j-1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}^{2j}=\begin{pmatrix}2v_{2j}\\ v_{2j}\end{pmatrix},$$

где $\beta_j,\delta_j,v_j\in\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}2i\beta_1 & 0\\ 0 & 4i\beta_2-2i\beta_1\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix},$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}^{2j-1}=\begin{pmatrix}0\\ -2iv_{2j-1}\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathbf{V}}^{2j}=\begin{pmatrix}2v_{2j}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}) &= \Theta\left(\mathbf{Z}+\mathbf{V}^1x+\sum_{j\geq1}\mathbf{V}^{j+1}t_j+s\Delta\,\middle|\,B\right)\\ &=\theta[0;0](p_1|2i\beta_1)\theta[0;0](p_2|4i\beta_2-2i\beta_1)+\theta[1/2;1/2](p_1|2i\beta_1)\theta[1/2;1/2](p_2|4i\beta_2-2i\beta_1),\end{aligned}$$

где $s\in\{-1;0;1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)-\mathbf{Z}_0\equiv\mathbf{Z}=(z_1,z_2)^t\in\mathbb{R}^2$,

$$p_1=z_1+2\sum_{j\geq1}v_{2j}t_{2j-1}+s\left(\frac{1}{2}-i\beta_1\right),$$
$$p_2=z_1-2z_2-2iv_1x-2i\sum_{j\geq1}v_{2j+1}t_{2j}-s\left(\frac{1}{2}+i\beta_1+2i\delta_2\right),$$

допускает следующие редукции

$$f_0^*(\mathbf{x})=f_0(\widehat{J}\mathbf{x}),\quad f_1^*(\mathbf{x})=f_{-1}(\widehat{J}\mathbf{x}),\quad f_{-1}^*(\mathbf{x})=f_1(\widehat{J}\mathbf{x}). \tag{5.5}$$

Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.4), при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = -p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5.3. Двухфазное решение. Случай 3. Вычисления, проведенные для спектральной кривой

$$\chi^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

дают следующие формулы

$$B = \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & i\beta_1 \\ i\beta_1 & i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -i\beta_1 \\ i\delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ v_{2j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j, \delta_j, v_j \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & 0 \\ 0 & 4i\beta_2 - 2i\beta_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{V}}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}) =& \Theta\left(\mathbf{Z} + \mathbf{V}^1 x + \sum_{j\ge 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j + s\Delta \middle| B\right) \\ =& \theta[0;0](p_1|2i\beta_1)\theta[0;0](p_2|4i\beta_2 - 2i\beta_1) + \theta[1/2;0](p_1|2i\beta_1)\theta[1/2;0](p_2|4i\beta_2 - 2i\beta_1), \end{aligned}$$

где $s \in \{-1; 0; 1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 \equiv \mathbf{Z} = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 = z_1 + 2\sum_{j\ge 1} v_{2j} t_{2j-1} - is\beta_1,$$

$$p_2 = z_1 - 2z_2 - 2iv_1 x - 2i\sum_{j\ge 1} v_{2j+1} t_{2j} - is\left(\beta_1 + 2\delta_2\right),$$

допускает редукции (5.5). Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.6) , при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5.4. Двухфазное решение. Случай 4. Вычисления, проведенные для спектральной кривой (5.6) дают следующие формулы

$$B = \begin{pmatrix} i\beta_2 & i\beta_1 \\ i\beta_1 & i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 - \delta_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j-1} = \begin{pmatrix} -v_{2j-1} \\ v_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j} = \begin{pmatrix} iv_{2j} \\ iv_{2j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j, \delta_j, v_j \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 2i(\beta_2 + \beta_1) & 0 \\ 0 & 2i(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{V}}^{2j} = \begin{pmatrix} 2iv_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}) =& \Theta\left(\mathbf{Z} + \mathbf{V}^1 x + \sum_{j\ge 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j + s\Delta \middle| B\right) \\ =& \theta[0;0](p_1|2i(\beta_2 + \beta_1))\theta[0;0](p_2|2i(\beta_2 - \beta_1)) \\ &+ \theta[1/2;0](p_1|2i(\beta_2 + \beta_1))\theta[1/2;0](p_2|2i(\beta_2 - \beta_1)), \end{aligned}$$

где $s \in \{-1; 0; 1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 \equiv i\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z} = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 = iz_1 + iz_2 + 2i \sum_{j \geq 1} v_{2j} t_{2j-1} + s,$$

$$p_2 = iz_1 - iz_2 - 2v_1 x - 2 \sum_{j \geq 1} v_{2j+1} t_{2j} + s\,(1 - 2\delta_2)\,,$$

допускает редукции (5.5). Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.6) при втором выборе базиса циклов, для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ также удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Заключительные замечания

Для построения решений только одного из нелокальных уравнений из АКНС иерархии можно взять любое решение локальных уравнений АКНС иерархии, удовлетворяющее условиям

$$p(-x, 0, 0, \dots) = p(x, 0, 0, \dots),$$

$$q^*(\mathbf{x}) = \sigma p(\mathbf{x}), \quad x, t_k \in \mathbb{R}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Тогда, в частности, функции

$$p(x, t, iT_2, T_3, iT_4, \dots), \quad q(x, t, iT_2, T_3, iT_4, \dots), \quad T_k \in \mathbb{R}$$

будут решениями $\mathcal{PT}$-симметричного нелинейного уравнения Шредингера

$$q^*(\mathbf{x}) = \sigma p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Заметим, что именно таким условиям удовлетворяют волны-убийцы, построенные в работах [27], [29]. Вместе с тем, функции

$$p(x, T_1, iT_2, t, iT_4, \dots), \quad q(x, T_1, iT_2, t, iT_4, \dots), \quad T_k \in \mathbb{R}$$

будут являться решениями $\mathcal{PT}$-симметричного уравнения Лакшманана-Порсециана-Даниеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Konotop, J. Yang, D. Zezulin. *Nonlinear waves in PT-symmetric systems* // Rev. Modern Phys. **88**, 035002, (2016).
2. D. Christodoulides, J. Yang, editors. *Parity-time symmetry and its applications.* V. 280 of Springer Tracts in Modern Physics. Springer. 2018.
3. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation* // Phys. Rev. Let. **110**, 064105 (2013).
4. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable discrete PT symmetric model* // Phys. Rev. E. **90**:3, 032912 (2014).
5. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation*// Nonlinearity. **29**:3, 915–946 (2016).
6. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable nonlocal nonlinear equations* // Stud. Appl. Math. **139**:1, 7–59 (2017).
7. T.P. Horikis, M.J. Ablowitz. *Rogue waves in nonlocal media* // Phys. Rev. E. **95**:4, 042211 (2017).
8. M.J. Ablowitz, B.F. Feng, X.D. Luo, Z.H. Musslimani. *Reverse space-time nonlocal Sine-Gordon/Sinh-Gordon equations with nonzero boundary conditions* // Stud. Appl. Math. (2018).
9. V.S. Gerdjikov, G.G. Grahovski, R.I. Ivanov. *The N-wave equations with PT symmetry* // Theor. Math. Phys. **188**:3, 1305–1321 (2016).
10. D.Y. Liu, W.R. Sun. *Rational solutions for the nonlocal sixth-order nonlinear Schrödinger equation* // Appl. Math. Lett. **84**, 63–69 (2018).

11. H.Q. Zhang, M. Gao. *Rational soliton solutions in the parity-time-symmetric nonlocal coupled nonlinear Schrödinger equations* // Comm. Nonlin. Sci. and Num. Sim. **63**, 253–260 (2018).
12. Z.X. Zhou. *Darboux transformations and global solutions for a nonlocal derivative nonlinear Schrodinger equation* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **62**, 480–488 (2018).
13. Y. Cao, B. Malomed, J. He. *Two (2+1)-dimensional integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equations: Breather, rational and semi-rational solutions* // Chaos, Solitons and Fractals. **114**, 99–107 (2018).
14. B. Yang, Y. Chen. *Reductions of Darboux transformations for the PT-symmetric nonlocal Davey–Stewartson equations* // Appl. Math. Lett. **82**, 43–49 (2018).
15. Z.J. Yang, S.M. Zhang, X.L. Li, Z.G. Pang. *Variable sinh-Gaussian solitons in nonlocal nonlinear Schrodinger equation* // Appl. Math. Lett. **82**, 64–70 (2018).
16. K. Manikandan, Priya N. Vishnu, M. Senthilvelan, R. Sankaranarayanan. *Deformation of dark solitons in a PT-invariant variable coefficients nonlocal nonlinear Schrodinger equation* // Chaos. **28**:8, 083103 (2018).
17. J. Rao, Y. Zhang, A. Fokas, J. He. *Rogue waves of the nonlocal Davey-Stewartson I equation* // Nonlinearity. **31**:9, 4090–4107 (2018).
18. X.Y. Tang, Z.F. Liang, X.Z. Hao. *Nonlinear waves of a nonlocal modified KdV equation in the atmospheric and oceanic dynamical system* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **60**, 62–71 (2018).
19. K. Chen, X. Deng, S. Lou, D.J. Zhang. *Solutions of nonlocal equations reduced from the AKNS hierarchy* // Stud. Appl. Math. **141**:1, 113–141 (2018).
20. W. Liu, X. Li. *General soliton solutions to a (2+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrodinger equation with zero and nonzero boundary conditions* // Nonlinear Dynamics. **93**:2, 721–731 (2018).
21. P. Vinayagam, R. Radha, U. Al Khawaja, L. Ling. *New classes of solutions in the coupled PT symmetric nonlocal nonlinear Schrodinger equations with four wave mixing* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **59**, 387–395 (2018).
22. Y. Cao, J. Rao, D. Mihalache, J. He. *Semi-rational solutions for the (2+1)-dimensional nonlocal Fokas system* // Appl. Math. Lett. **80**, 27–34 (2018).
23. C. Qian, J. Rao, D. Mihalache, J. He. *Rational and semi-rational solutions of the y-nonlocal Davey–Stewartson I equation* // Computers and Mathematics with Applications. **75**:9, 3317–3330 (2018).
24. M. Gurses, A. Pekcan. *Nonlocal modified KdV equations and their soliton solutions by Hirota method* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **67**, 427–448 (2019).
25. Q. Zhang, Y. Zhang, R. Ye. *Exact solutions of nonlocal Fokas-Lenells equation* // Appl. Math. Lett. **98**, 336–343 (2019).
26. V.S. Gerdjikov. *On the integrability of Ablowitz-Ladik models with local and nonlocal reductions* // Journal of Physics: Conference Series. **1205**:1, 012015 (2019).
27. B. Yang, J. Yang. *Rogue waves in the nonlocal PT-symmetric nonlinear Schrödinger equation* // Lett. Math. Phys. **109**, 945–973 (2019).
28. J. Yang. *General n-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations* // Phys. Lett. A. **383**, 328–337 (2019).
29. B. Yang, J. Yang. *On general rogue waves in the parity-time-symmetric nonlinear Schrodinger equation* // Preprint, arXiv:1903.06203, 19 pp. (2019).
30. Y. Yang, T. Suzuki, X. Cheng. *Darboux transformations and exact solutions for the integrable nonlocal Lakshmanan-Porsezian-Daniel equation* // Appl. Math. Lett. **99**, 105998 (2020).
31. A.O. Smirnov, E.E. Aman. *The simplest oscillating solutions of nonlocal nonlinear models* // Journal of Physics: Conference Series. **1399**:2, 022020 (2019).
32. A.O. Smirnov, E.E. Aman. *One-phase elliptic solutions of the nonlocal nonlinear equations from AKNS hierarchy and their spectral curves* // Journal of Physics: Conference Series. **1515**:3, 032080 (2020).
33. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Multiphase solutions of nonlocal symmetric reductions of equations of the AKNS hierarchy: general analysis and simplest examples* // Theor. Math. Phys. **204**:3, 1154–1165 (2020).

34. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *AKNS hierarchy, MRW solutions, P_n breathers, and beyond* // J. Math. Phys. **59**:9, 091419 (2018).
35. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Two-phase periodic solutions to the AKNS hierarchy equations* // J. Math. Sci. **242**:5, 722–741 (2019).
36. A.R. Its, V.P. Kotlyarov. *On a class of solutions of the nonlinear Schrödinger equation* // Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Ser. A (Russian). **11**, 965–968 (1976).
37. V.P. Kotlyarov. *Periodic problem for the nonlinear Schrödinger equation* // Preprint, arXiv:1401.4445, 14pp. (2014).
38. E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its, V.B. Matveev. *Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations.* Springer Ser. Nonlinear Dynamics. Springer. 1994.
39. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems* // Studies in Appl. Math. **53**:4, 249–315 (1974).
40. M. Lakshmanan, K. Porsezian, M. Daniel. *Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain* // Phys. Lett. A. **133**:9, 483–488 (1988).
41. K. Porsezian, M. Daniel, M. Lakshmanan. *On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain* // J. Math. Phys. **33**, 1807–1816 (1992).
42. M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan. *On the integrable models of the higher order water wave equation* // Phys. Lett. A. **174**:3, 237–240 (1993).
43. A.O Smirnov. *Solution of a nonlinear Schrödinger equation in the form of two-phase freak waves* // Theor. Math. Phys. **173**:1, 1403–1416 (2012).
44. A.O Smirnov. *Periodic two-phase "rogue waves"* // Math. Notes. **94**:6, 897–907 (2013).
45. A.O Smirnov., S.G. Matveenko, S.K. Semenov, E.G. Semenova. *Three-phase freak waves* // SIGMA. **11**, 032 (2015).
46. B.A. Dubrovin. *Theta functions and non-linear equations.* Russ. Math. Surv. **36**:2, 11–92 (1981).
47. J.D. Fay. *Theta-functions on Riemann surfaces.* V. 352 of Lect. Notes in Math. Springer. 1973.
48. A. Krazer. *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Teubner, Leipzig. 1903.
49. H.F. Baker. *Abel's theorem and the allied theory including the theory of theta functions.* Cambridge. 1897.
50. D. Mumford. *Tata lectures on theta. I.* V. 28 of Progress in Math. Birkhäuser Boston Inc. Boston, MA. 1983.
51. D. Mumford. *Tata lectures on theta. II.* V. 43 of Progress in Math. Birkhäuser Boston Inc. Boston, MA. 1984.
52. A.O. Smirnov. *A matrix analogue of the Appell theorem and reduction of multidimensional Riemann theta-functions* // Math. USSR Sb. **61**:2, 379–388 (1988).

Александр Олегович Смирнов,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, 67А,
190000, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alsmir@guap.ru

Владимир Борисович Матвеев,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
Наб. р. Фонтанки, 27,
191023, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vladimir.matveev9@gmail.com

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 104-111.

УДК 517.925

ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ И АСИМПТОТИКИ СИММЕТРИЙНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

Б.И. СУЛЕЙМАНОВ, А.М. ШАВЛУКОВ

Аннотация. Представлено общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с рациональной правой частью, возникающего при построении асимптотик при больших значениях времени совместных решений уравнения Кортевега-де Вриза и стационарной части его высшей неавтономной симметрии. Эта симметрия определяется линейной комбинацией первой высшей автономной симметрии уравнения Кортевега-де Вриза и его классической симметрии Галилея. Данное общее решение зависит от произвольного параметра. По теореме о неявной функции оно локально находится из первого интеграла, явно выписанного в терминах гипергеометрических функций. Частный случай этого общего решения определяет автомодельные решения уравнений Уизема, найденные ранее Г.В. Потеминым в 1988 г. (В известных работах А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского начала 70-х годов было установлено, что эти решения уравнений Уизема в главном порядке описывают возникновение незатухающих осциллирующих волн в широком ряде задач с малой дисперсией.) Результат статьи вновь подтверждает эмпирическое правило: из интегрируемых уравнений в результате различных предельных переходов могут получаться лишь в том или ином смысле интегрируемые уравнения. Выдвигается общая гипотеза: интегрируемые обыкновенные дифференциальные уравнения, подобные рассматриваемому в статье, должны возникать и при описании асимптотик при больших временах других симметрийных решений эволюционных уравнений, допускающих применение метода обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: интегрируемость, уравнение Абеля, уравнение Кортевега-де Вриза, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 34M55, 35Q53

1. Предельные переходы в интегрируемых уравнениях

Согласно хорошо известному эмпирическому закону, при описании асимптотик решений интегрируемых дифференциальных уравнений, в результате разумных предельных переходов, могут фигурировать решения только тоже интегрируемых уравнений (но часто в ином смысле, отличном от смысла интегрируемости допредельных уравнений).

Например, всевозможными континуальными пределами таких интегрируемых дифференциально – разностных уравнений, как цепочки Вольтерра

$$(c_n)'_t = c_n(c_{n+1} - c_{n-1})$$

и Тоды

$$(z_n)''_{tt} = e^{z_{n+1}-z_n} - e^{z_{n+1}-z_n}$$

могут быть лишь в том или ином смысле интегрируемые дифференциальные уравнения. То же касается континуальных пределов интегрируемых цепочек, дискретным по двум независимым переменным. Часть из этих предельных переходов в настоящее время обоснована математически строго [1].

B.I. Suleimanov, A.M. Shavlukov, Integrable Abel equation and asymptotics of symmetry solutions of Korteweg-de Vries equation.

© Сулейманов Б.И, Шавлуков А.М. 2021.

Поступила 1 апреля 2021 г.

Замечание 1.1. *В первую очередь известность научным достижениям Р.И. Ямилова принесли работы, посвященные различным аспектам интегрируемости такого вида цепочек уравнений. В его статьях* [2]–[5] *приводятся, в частности, и конкретные примеры переходов от интегрируемых цепочек к их континуальным пределам.*

Один из простейших примеров предельного перехода от одного интегрируемого уравнения к другому представляет переход от интегрируемого методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ) с малой дисперсией ($\varepsilon \to 0$)

$$u'_t + uu'_x + \varepsilon^2 u'''_{xxx} = 0,$$

к уравнению Хопфа

$$u'_t + uu'_x = 0,$$

общее решение которого локально задается формулой

$$x - tu = F(u).$$

Это же уравнение Хопфа является бездиссипативным пределом при $\varepsilon \to 0$ уравнения Бюргерса

$$u'_t + uu'_x = \varepsilon^2 u''_{xx},$$

которое линеаризующей заменой Коула-Хопфа $u = -2\varepsilon^2 \Lambda'_x/\Lambda$ сводится к уравнению теплопроводности $\Lambda'_t = \varepsilon^2 \Lambda''_{xx}$.

Квазиклассическое приближение к решениям интегрируемого МОЗР нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с малой дисперсией

$$-i\varepsilon q'_t = \varepsilon^2 q''_{xx} + 2\delta|q|^2 q = 0 \qquad (\varepsilon \ll 1) \tag{1.1}$$

дает несколько более сложный пример подобного перехода: подстановка

$$q = \sqrt{h}\exp\left(i\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)$$

сводит (1.1) к системе двух вещественных эволюционных уравнений

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \qquad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - 2\delta h = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}},$$

бездисперсионный предел которой есть система

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \qquad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - 2\delta h \ = 0. \tag{1.2}$$

После дифференцирования второго уравнения системы (1.2) по переменной x и замены $v = 2\varphi'_x$ этот бездисперсионный предел принимает вид классической гидродинамической системы

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x - 4\delta h'_x = 0$$

(знаки постоянной δ определяют ее гиперболический и эллиптический варианты), решения которой преобразованием годографа

$$v(t,x), h(t,x) \to t(h,v), x(h,v)$$

выражаются через решения линейной системы уравнений

$$x'_h = vt'_h + 4\delta t'_v, \qquad x'_v = vt'_v - ht'_h.$$

И весьма любопытная трансформация смысла интегрируемости происходит [6]–[9] при переходе к бездисперсионным пределам пространственно многомерных интегрируемых МОЗР уравнений типа, например, уравнения Кадомцева–Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u'_t + uu'_x + \varepsilon^2 u'''_{xxx}\right) = u''_{yy}.$$

Интегрируемость [10] обобщенным методом годографа С.П. Царева [11], [12] гидродинамических уравнений Уизема, получающихся в результате усреднения интегрируемых МОЗР уравнений типа КдВ, НУШ и синус-Гордона, также является одним из подтверждений эмпирического закона, сформулированного в начале статьи.

Например, с помощью именно этого метода в сочетании с алгебро-геометрическим методом И.М. Кричевера [13] Г.В. Потеминым [14] были найдены в явном виде автомодельные решения уравнений Уизема, которые согласно известным результатам А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского [15], [16] задают в главном порядке поведение при $t \to \infty$ универсального специального решения уравнения КдВ

$$u'_t + uu'_x + u'''_{xxx} = 0, \tag{1.3}$$

с асимптотиками $u = -x^{\frac{1}{3}} + o(1)$ при $x \pm \infty$.

Замечание 1.2. *А.В. Гуревич и Л.П. Питаевский в* [16] *высказывали мнение, что система ОДУ, определяющая эти автомодельные решения уравнений Уизема, не может быть решена явно.*

Интегрируемые методом изомонодромных деформаций [17] обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) типа Пенлеве, часто фигурирующие при описании асимптотик при больших временах интегрируемых МОЗР уравнений, также являются примерами подобных предельных уравнений.

Замечание 1.3. *Среди многочисленных важных научных результатов А.Б. Шабату принадлежит и следующий: при описании асимптотики при больших временах начальной задачи общего положения для уравнения КдВ (1.3) в* [18] *и в разделе 8.3 его докторской диссертации* [19] *им приведен первый пример подобного перехода.*

Наряду с самими уравнениями Пенлеве в нелинейных задачах с малым параметром (в том числе тех, что описываются решениями интегрируемых уравнений) при описании различных резких переходных режимов универсальную роль играют и их высшие изомонодромные аналоги. Как сами уравнения Пенлеве, так и их высшие аналоги можно рассматривать в качестве своего рода нелинейных специальных функций волновых катастроф.

Общая теория таких нелинейных специальных функций, основы которой были заложены в работе А.В. Китаева [20] (одновременно и независимо один частный случай – высший аналог второго уравнения Пенлеве – рассматривался первым из авторов данной работы в [21]), на сегодняшний день активно развивается и находит многочисленные применения [22]–[50].

В частности, при описании в окрестности точки сборки решений бездисперсионных уравнений в главном по малому параметру ε порядке используется универсальное специальное решение Гуревича–Питаевского уравнения КдВ (1.3), о котором шла речь в абзаце над Замечанием 1.2. А как было установлено в [24], [26], это специальное решение одновременно удовлетворяет ОДУ

$$u''''_{xxxx} + \frac{5uu''_{xx}}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5(u^3 - tu + x)}{18} = 0, \tag{1.4}$$

являющимся первым высшим представителем иерархии изомонодромных аналогов первого уравнения Пенлеве из упомянутой статьи А.В. Китаева [20].

Замечание 1.4. *Это же* [26], [37] *решение ОДУ (1.4) возникает при описании континуальных пределов изомонодромных цепочек, которые в связи с задачами квантовой теории гравитации рассматривались в* [51], [52].

В.Р. Кудашев в [28] отметил следующее: после дифференцирования (1.4) по x получается стационарная часть неавтономной высшей симметрии уравнения КдВ (1.3), определяемая линейной комбинацией стационарных частей его классической симметрии Галилея $u'_{\tau_G} = 1 - tu'_x$ и его первой высшей автономной симметрии

$$u'_{\tau_5} = \left(u''''_{xxxx} + \frac{5u''_{xx}u}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x. \tag{1.5}$$

Из симметрийного характера ОДУ (1.4) и результатов статьи [53] вид упомянутых выше решений Г.В. Потемина автомодельных решений уравнений Уизема выводится очень просто [24], [26], [28]. Вообще, в последнюю четверть века различные свойства решений ОДУ (1.4) (и главным образом, конечно, специального решения Гуревича–Питаевкого) с самых разных точек зрения рассматривались во множестве работ – см., например, [30], [32]–[35], [37], [39]–[42], [54].

2. Интегрируемое уравнение Кудашева

Асимптотика при $t \to \infty$ универсального решения Гуревича–Питаевского вне зоны быстрых колебаний задается двумя корнями кубического уравнения сборки

$$u^3 - tu + x = 0, \tag{2.1}$$

а в области незатухающих колебаний зависит от медленной переменной $z = xt^{-\frac{3}{2}}$, быстрой фазы

$$\Phi = t^{\frac{7}{4}} f(z) + f_0(z) \tag{2.2}$$

и имеет вид

$$u = \sqrt{t}(v_0(z,\Phi) + t^{-\frac{7}{4}} v_1(z,\Phi) + t^{-\frac{7}{2}} v_2(z,\Phi) + \dots). \tag{2.3}$$

Это почти очевидным образом следует из вида

$$u = \sqrt{t} v(z) \tag{2.4}$$

решений уравнений сборки (2.1) и вида линеаризаций на фоне (2.4) уравнения КдВ (1.3) и ОДУ (1.4).

В.Р. Кудашев в конце прошлого века попробовал, не обращаясь к методу усреднения Уизема, просто искать совместное асимптотическое решение вида (2.3) уравнений (1.3) и (1.4). При этом он обнаружил, что функция $f(z)$, определяющая главный член быстрой фазы (2.2) формулой

$$R(z) = \frac{7f(z)}{4f'_z} - \frac{3z}{2},$$

связана с решением довольно простого ОДУ первого порядка

$$R'_z = \frac{486R^4 - 171R^2 + 9zR + 5}{9(54R^3 - 9R + z)(2R + 3z)}, \tag{2.5}$$

которое, очевидно, эквивалентно уравнению Абеля второго рода

$$(486R^4 - 171R^2 + 5 + 9Rz) z'_R = 972R^4 - 162R^2 + (1458R^3 - 225R)z + 27z^2. \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. *В терминах решений уравнения (2.5) нетрудно описать и решение более общего ОДУ*

$$r'_x = \frac{486r^4 - 171tr^2 + 9xr + 5t^2}{9(54r^3 - 9tr + x)(2tr + 3x)}. \tag{2.7}$$

В самом деле, при $t = 0$ ОДУ (2.7) сводится к ОДУ $r'_x = r/(3x)$ с общим решением $r = const \cdot x^{\frac{1}{3}}$. А при $t \neq 0$ решения ОДУ (2.5) и (2.7) связаны друг с другом растяжениями

$$r(t,x) = t^{\frac{1}{2}} R(z), \qquad z = xt^{-\frac{3}{2}}.$$

В [37] выписаны формулы, по которым в случае специального решения Гуревича–Питаевского решение $R(z)$ ОДУ (2.5) связано с автомодельными решениями уравнений Уизема из статьи Г.В. Потемина [14]. (Сам В.Р. Кудашев эти формулы знал, но при жизни так и не опубликовал.)

Однако после вывода В.Р. Кудашевым уравнения (2.6) сразу же возник естественный вопрос: согласно изложенному в разделе 1 данной статьи эвристическому закону это уравнение, несомненно, должно быть интегрируемым. Но каким образом?

Ниже приводится ответ на этот вопрос, найденный в прошлом году с помощью системы компьютерной алгебры Maple.

Оказывается, уравнение Кудашева (2.6) обладает первым интегралом, который явно записывается в терминах гипергеометрических функций ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;y) \equiv F(\alpha,\beta;\gamma;y)$. Этот интеграл имеет вид (I – произвольная постоянная)

$$I = \frac{997920i\sqrt{15}\left(F(-\frac{7}{6},-\frac{1}{6};\frac{2}{3};c_1)(a_1b_6+b_8) + \frac{12789F(-\frac{1}{6},\frac{5}{6};\frac{5}{3};c_1)a_1c_2}{220}\right)}{c_1^{\frac{1}{3}}\left(F(-\frac{5}{6},\frac{1}{6};\frac{4}{3};c_1)b_7 + 77711400F(\frac{1}{6},\frac{7}{6};\frac{7}{3};c_1)a_1(b_5+b_9)\right)},$$

где функции a_i, b_i, c_i задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
&a_1(R)=R^2-\frac{1}{3}, a_2(R)=R^4-\frac{25}{111}R^2+\frac{1}{1332}, a_3(R,z)=R^3-\frac{2R}{7}+\frac{z}{14},\\
&a_4(R)=R^6-\frac{55}{174}R^4+\frac{19}{1044}R^2-\frac{1}{6264}, a_5(R)=R^6-\frac{503}{3198}R^4+\frac{25}{6396}R^2-\frac{1}{115128},\\
&a_6(R)=R^2(3R^2-1), a_7(R)=-\frac{2665}{1421}R^6+\frac{2515}{8526}R^4-\frac{125}{17052}R^2+\frac{5}{306936},\\
&a_8(R)=\sqrt{3R^4-R^2}, a_9(R)=R^2-\frac{1}{24}, a_{10}(R)=660R^4-76R^2+1,\\
&a_{11}(R)=1980R^6-888R^4+79R^2-1,\\
&b_1(R,z)=2i\sqrt{15}a_8(R)(3R^2-1)+126R^4+9zR-36R^2,\\
&b_2(R)=\sqrt{21}(31968R^6-8532R^4+324R^2-1)+a_8(R)(-83160R^4+9576R^2-126),\\
&b_3(R)=-\frac{148\sqrt{21}a_2(R)a_8(R)a_9(R)}{1155}+R^8-\frac{74}{165}R^6+\frac{79R^4-R^2}{1980},\\
&b_4(R)=-\frac{533i\sqrt{35}a_1(R)a_5(R)}{1421}+5a_4(R)R^2, b_5(R)=a_1(R)R^2\left(3i\sqrt{35}a_5(R)+\frac{4263a_4(R)}{533}\right),\\
&b_6(R)=\frac{1}{220}\left(i\sqrt{35}a_6(R)^{\frac{3}{2}}a_{10}(R)+19188\sqrt{21}a_3(R)a_5(R)R-7308i\sqrt{15}a_1(R)a_4(R)R^2\right),\\
&b_7(R,z)=15120i\sqrt{15}a_6(R)^{\frac{3}{2}}a_{11}(R)-124338240R(i\sqrt{15}a_1(R)R(\sqrt{21}a_1(R)a_5(R)\\
&\qquad-\frac{1036a_2(R)a_8(R)a_9(R)}{533})-\frac{29841a_3(R,z)a_4(R)R^2}{533}+7\sqrt{21}a_3(R)a_5(R)a_8(R)),\\
&b_8(R,z)=\frac{444a_8(R)}{385}\left(3i\sqrt{35}a_1(R)^2a_2(R)a_9(R)-\frac{29841a_3(R,z)a_4(R)R}{148}\right),\\
&b_9(R)=a_8(R)\left(-\sqrt{21}a_1(R)a_5(R)-\frac{1421i\sqrt{15}a_4(R)R^2}{533}\right),\\
&c_1(R,z)=-\frac{2993760i\sqrt{15}a_1(R)b_3(R)}{b_1(R,z)b_2(R)},\\
&c_2(R)=a_8(R)b_4(R)+a_1(R)R^2\left(\sqrt{21}a_7(R)+i\sqrt{15}a_4(R)\right).
\end{aligned}
$$

В следующей таблице приводятся приближенно вычисленные значения I, соответствующие решениям пяти различных начальных задач для ОДУ (2.6).

Начальное условие	Приближенное значение I	Промежуток счета по R
$z(0)=0$	$0.0960605+0.1663816i$	$R\in[-10,10]$
$z(1)=0$	$0.0194046+0.0336097i$	$R\in[-11,11]$
$z(5)=7$	$0.0308202+0.0533821i$	$R\in[-1,15]$
$z(50)=75$	$0.03177193+0.05503056i$	$R\in[-1,60]$
$z(-0.57735)=0.3849$	$0.000591+0.0010237i$	$R\in[-10,0]$

Таблица 1: Приближенные значения I, соответствующие пяти различным начальным задачам.

3. Заключение

По мнению авторов статьи ее результат потенциально имеет не только частное значение. Возникает, например, предположение о том, что системы двух неавтономных ОДУ

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{(2A-1)(-288A^3+192A^2+24sA-27A-4s+4B)}{(A+2s)(-576A^3+504A^2-126A+48sA+8B-12s+9)}, \\ B'_s &= \left(36A+3s-54A^2-\frac{9}{2}\right)A'_s+\frac{108A^3-108A^2-6sA+6B+27A+4s}{2A+4s}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{(2A-1)(288A^3-192A^2+24sA+27A-4s-4B)}{(A-2s)(-576A^3+504A^2-126A-48sA+8B+12s+9)}, \\ B'_s &= (36A-3s-54A^2-\frac{9}{2})A'_s-\frac{108A^3-108A^2+6sA+6B+27A-4s}{2A-4s}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

рассматривавшиеся в публикациях Р.Н. Гарифуллина [44], [46], тоже должны иметь по два первых интеграла, которые можно явно выписать в терминах гипергеометрических функций. (Посредством решений систем ОДУ (3.1) и (3.2) описываются асимптотики при $t\to\infty$ вида

$$u=t(v_0(z,\Phi)+t^{-\frac{5}{4}}v_1(z,\Phi)+t^{-\frac{5}{2}}v_2(z,\Phi)+\dots),\quad \Phi=t^{\frac{5}{2}}f(s)+n(s)\quad \left(s=\frac{x}{t^2}\right)$$

совместных решений уравнения КдВ (1.3) и ОДУ пятого порядка

$$\left(u''''_{xxxx}+\frac{5u''_{xx}u}{3}+\frac{5(u'_x)^2}{6}+\frac{5u^3}{18}\right)'_x\pm\frac{2u+xu'_x-3t(u'''_{xxx}+uu'_x)}{6}=0,$$

определяемых двумя линейными комбинациями стационарных частей первой вышей неавтономной симметрии (1.5) и классической симметрии растяжения $u_{\tau_r}=2u+xu'_x-3t(u'''_{xxx}+uu'_x)$.)

Гипотеза: подобного вида асимптотики при больших временах совместных решений различных нелинейных интегрируемых МОЗР эволюционных уравнений с ОДУ типа высших Пенлеве, определяемых неавтономными симметриями и, более общо, инвариантными многообразиями этих эволюционных уравнений, также должны описываться интегрируемыми в схожем смысле ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.А. Калякин. *Об асимптотических переходах от дискретных моделей к непрерывным* // Теор. матем. физ. **76**:3, 323–327 (1988).
2. Р.И. Ямилов. *О классификации дискретных эволюционных уравнений* // Успехи мат. наук. **38**:6(234), 155–156 (1983).
3. D. Levi, P. Winternitz, R.I. Yamilov. *Symmetries of the continuous and discrete Krichever-Novikov equation* // SIGMA. **7**, 097 (2011).
4. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *On integrability of a discrete analogue of Kaup-Kupershmidt equation* // Уфимск. матем. журнал. **9**:3, 158–164 (2017).
5. Р.Н. Гарифуллин, Р.И. Ямилов. Об интегрируемости решеточных уравнений с двумя континуальными пределами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. **152**, 159–164 (2018).
6. V.E. Zakharov. *Dispersionless limit of integrable systems in 2 + 1 dimensions* // In: Singular Limits of Dispersive Waves, Ercolani, N.M. et al. (eds.), NY: Plenum Press, 1994, P. 165—174.
7. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova. *Hydrodynamic reductions of multi- dimensional dispersionless PDEs: the test for integrability* // J. Math. Phys. **45**:6, 2365–2377 (2004).
8. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova. *On integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems* // Comm. Math. Phys. **48**, 187–206 (2004).
9. E.V. Ferapontov, B. Kruglikov. *Dispersionless integrable systems in 3D and Einstein-Weyl geometry* // J. Diff. Geom. **97**, 215–254 (2014).
10. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков. *Гидродинамика слабо деформированнных солитоннных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория* // Успехи мат. наук. **44**:6(270), 29–98 (1989).
11. С.П. Царев. *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа* // Докл. АН СССР. **282**:3, 534–537 (1985).
12. С.П. Царев. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **54**:5, 1048–1068.

13. И.М. Кричевер. *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений* // Функц. анализ и его прил. **22**:3, 37–52 (1988).
14. Г.В. Потемин. *Алгебро-геометрическое построение автомодельных решений уравнений Уизема* // Успехи мат. наук. **43**:5(263), 211–212 (1988).
15. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский. *Опрокидывание простой волны в кинетике разреженной плазмы* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **60**:6, 2155–2174 (1971).
16. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский. *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **65**:2, 590–604 (1973).
17. А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая линамика», 2005.
18. А.Б. Шабат. *Об уравнении Кортевега–де Фриса* // Докл. АН СССР. **211**:6, 1310–1313 (1973).
19. А.Б. Шабат. *Операторы преобразования и нелинейные уравнения* //Диссертация ... д. ф. -м. н. Уфа: БГУ. 1974 г.
20. А.В. Китаев. *Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве* // Записки ЛОМИ. **187**, 53–74 (1991).
21. Б.И. Сулейманов. *Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустики* // Записки ЛОМИ. **187**, 110–128 (1991).
22. Б.И. Сулейманов. *О «нелинейном» обобщении специальных функций волновых катастроф, описываемых двукратными интегралами* // Мат. заметки. **52**:5, 102–106 (1992).
23. Б.И. Сулейманов, И.Т. Хабибуллин. *Симметрии уравнения Кадомцева—Петвиашвили, изомонодромные деформации и «нелинейные» обобщения специальных функций волновых катастроф* // Теор. матем. физ. **97**:2, 213–216 (1993).
24. Б.И. Сулейманов. *О решении уравнения Кортевега—де Вриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией* // Письма в ЖЭТФ. **58**:11, 606–610 (1993).
25. Б.И. Сулейманов. *О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик*// Теор. матем. физ. **98**:2, 198–206 (1994).
26. Б.И. Сулейманов. *Возникновение бездиссипативных ударных волн и «непертурбативная» квантовая теория гравитации* //Журн. Экс. и Теор. Физ. **105**:5, 1089–1099 (1994).
27. A.V. Kitaev. *Caustics in* $1+1$ *integrable systems* // J. Math. Phys. **35**:2, 2934–2954 (1994).
28. V.R. Kudashev. *KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equaton symmetry* // arXiv preprint putt-soll 9404002. (1994)-arxiv.org.
29. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах* // Письма в ЖЭТФ. **62**:4, 358–362 (1993).
30. V. Kudashev, B. Suleimanov. *A soft mechanism for generation the dissipationless shock waves* // Phys. Letters A. **221**:3, 4, 204–208 (1996). 1996.
31. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Малоамплитудные дисперсионные колебания на фоне приближения нелинейной геометрической оптики* // Теор. матем. физ. **118**:3, 413–422 (1999).
32. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн* // Прикл. мат. мех. **65**:3, 456–466 (2001).
33. B. Dubrovin. *On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: Universality of critical behaviour* // Comm. Math. Phys. **267**, 117–139 (2006).
34. T. Claeys, M. Vanlessen. *The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation* // Nonlinearity. **20**:5, 1163–1184 (2007).
35. T. Grava, C. Klein. *Numerical study of a multiscale expansion of the Korteweg–de Vries equation and Painlevé-II equation* // Proc. of the Royal Society A. **464**:2091, 733–757 (2008).
36. B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein. *On Universality of Critical Behavior in the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation, Elliptic Umbilic Catastrophe and the Tritronquée Solution to the Painlevé-I Equation* // J. Nonl. Science. **19**:1, 57–94 (2009).
37. R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov. *Phase Shift in the Whitham Zone for the Gurevich-Pitaevskii Special Solution of the Korteweg–de Vries Equation* // Phys. Lett. A. **374**:13, 14, 1420–1424 (2010). 2010.
38. Р.Н. Гарифуллин, Б.И. Сулейманов. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **137**:1, 149–165 (2010).
39. T. Claeys. *Asymptotics for a special solutions to the second member of the Painleve I hierarhy* // J. Phys. A. **43**:43, 434012. 18 pp. (2010).
40. T. Claeys, T. Grava. *Solitonic asymptotics for the Korteweg-de Vries equation in the small dispersion limit* // SIAM J. Math. Anal. **42**:5, 2132–2154 (2010).

41. T. Claeys. *Pole-free solutions of the first Painlevé Hierarchy and non-generic critical behavior for the KdV equation* // Physica D: Nonlinear Phenomena. **241**:23, 2226–2236 (2011).
42. T. Grava, A. Kapaev, C. Klein. *On the Tritronquée Solutions of* P_I^2 // Constr. Approx. **41**:3, 425–466 (2015).
43. B. Dubrovin, M. Elaeva. *On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity* // Russian J. Math. Phys. **19**:4, 449–460 (2012).
44. Р.Н. Гарифуллин. *Сдвиг фазы для совместного решения уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимск. матем. журн. **4**:2, 80–86 (2012). **4**:2, 52-61 (2012).]
45. M. Bertola, A. Tovbis. *Universality for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation at the Gradient Catastrophe Point: Rational Breathers and Poles of the Tritronquée Solution to Painlevé I* // Comm. Pure and Appl. Math. **66**, 678–752 (2013).
46. Р.Н. Гарифуллин. *О совместном решении уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимск. матем. журн. **8**:4, 53–62 (2016).
47. Б.И. Сулейманов. *Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае* // Письма в ЖЭТФ. **106**:6, 375–380 (2017).
48. Б.И. Сулейманов. *Об аналогах функций волновых катастроф, являющихся решениями нелинейных интегрируемых уравнений* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. **163**, 81–95 (2019).
49. D. Bilman, L. Ling, P.D. Miller. *Extreme superposition: rogue waves of infinite order and the Painlevé-III hierarchy* // Duke Math. J. **169**, 671–760 (2020).
50. V.E. Adler. *Nonautonomous symmetries of the KdV equation and step-like solutions*// J. of Nonlinear Math. Phys. **27**:3, 478–493 (2020).
51. E. Bresin, E. Marinari, G. Parisi. *A nonperturbative ambiguty free solution of a string model* // Phys. Lett. B. **242**:1, 35-38 (1990).
52. M. Douglas, N. Seiberg, S. Shenker. *Flow and unstability in quantum gravity* // Phys. Lett. B. **244**:3,4, 381–386 (1990).
53. В.Р. Кудашев, С.Е. Шарапов. *Наследование симметрий при усреднении уравнения КдФ по Уизему и гидродинамические симметрии уравнений Уизема* // Теор. матем. физ. **87**:1, 40–47 (1991).
54. Б.И. Сулейманов. *«Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы* // Функц. анализ и его прил. **48**:3, 520–62 (2014).

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `bisul@mail.ru`

Азамат Мавлетович Шавлуков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `aza3727@yandex.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 112-120.

DIFFERENTIAL SUBSTITUTIONS FOR NON-ABELIAN EQUATIONS OF KDV TYPE

V.E. ADLER

Abstract. The work is devoted to constructing differential substitutions connecting the non-Abelian KdV equation with other third-order evolution equations. One of the main results is the construction of a non-Abelian analog of the exponential Calogero–Degasperis equation in a rational form. Some generalizations of the Schwarzian KdV equation are also obtained. Equations and differential substitutions under study contain arbitrary non-Abelian parameters. The construction method is based on the auxiliary linear problem for KdV, in which the usual spectral parameter is replaced by a non-Abelian one. The wave function, corresponding to a fixed value of this parameter, also satisfies a certain evolution equation. Passing to the left and right logarithmic derivatives of the wave function leads one to two versions of the modified KdV equation. In addition, a gauge transformation of the original linear problem leads to a linear problem for one of these versions, mKdV-2. After that, the described procedure is repeated, and the resulting evolution equation for the wave function contains already two arbitrary non-Abelian parameters. For the logarithmic derivative, we obtain an analog of the Calogero–Degasperis equation, which is thus a second modification of the KdV equation. Combining the found Miura-type transformations with discrete symmetries makes it possible to obtain chains of Bäcklund transformations for the modified equations.

Keywords: non-Abelian equation, Lax pair, Miura transformation.

Mathematics Subject Classification: 35Q53, 37K30, 37K35

1. Introduction

Equations with non-commutative (for example, matrix) unknowns are an important object of study in the theory of integrable systems. One of the first examples was the non-Abelian Korteweg–de Vries equation (KdV)

$$u_t = u_{xxx} - 3uu_x - 3u_xu$$

and its modification (mKdV)

$$f_t = f_{xxx} - 3f^2f_x - 3f_xf^2. \tag{1.1}$$

The inverse scattering method, families of exact solutions, Hamiltonian structures and Darboux–Bäcklund transformations for these equations were studied in [1], [2], [3], [4], [5], [6] and other works. In [7], another version of mKdV was introduced

$$v_t = v_{xxx} + 3[v, v_{xx}] - 6vv_xv, \tag{1.2}$$

which is related with (1.1) by an implicit change [8]. Currently, non-Abelian analogs are found for a large number of various integrable models, including evolution and hyperbolic systems,

---

V.E. Adler, Differential substitutions for non-Abelian equations of KdV type.

© V.E. Adler. 2021.

The reported study was funded by RFBR and SC RA, project number 20-52-05015.

Submitted March 10, 2021.

3D equations, (semi)-discrete and ordinary differential equations. A deep, but still far from being complete, presentation of the subject is contained in the book [9]. A fairly wide family of nonlinear Schrödinger and Boussinesq type systems being polynomial and linear with respect to the derivatives was studied in [10], and in most cases there were two non-Abelian counterparts corresponding to one scalar system, like in the case of (1.1) and (1.2).

At the same time, there are many blank spots in the non-commutative theory, for example, no classification is known for integrable equations of the KdV type

$$u_t = u_{xxx} + F(x, u, u_x, u_{xx}). \tag{1.3}$$

In the scalar setting, such classification was obtained long ago in the framework of the symmetry approach [11], [12], but in the non-Abelian case we even do not know exactly which equations from the scalar list admit a generalization. In addition to the above equations, one can find in the literature non-Abelian analogs of the potential mKdV equation (pmKdV) and the Schwarzian KdV equation (SKdV), see, for instance, [9, Ch. 3.9] and [13], and the author does not know any other studies. Moreover, only homogeneous equations without parameters were studied. Meanwhile, recently it was observed [14] that equation (1.2) can be generalized by adding lower-order terms with an arbitrary non-Abelian constant, which is important while constructing a self-similar reduction and leads one to a new version of the non-Abelian Painlevé-II equation.

The purpose of this work is to enlarge the list of examples of type (1.3) by use of differential substitutions. A similar problem was posed in [15], where, however, no new equations were obtained.

Recall that from the point of view of substitutions, all scalar integrable equations (1.3) are divided into three subclasses [16]. One class includes the linearizable equations, the second one contains equations related to KdV, and the third class consists of one isolated Krichever–Novikov equation [17]

$$z_t = z_{xxx} - \frac{3(z_{xx}^2 - R(z))}{2z_x} + \alpha z_x, \quad R^{(5)}(z) = 0, \tag{1.4}$$

where R is a polynomial of degree 3 or 4 with simple roots; the case of multiple roots reduces to KdV. For equations related to KdV, the basic sequence of Miura type transformations is as follows:

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \tag{1.5}$$

$$\Big\uparrow \quad u = f_x + f^2 + \beta$$

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \beta)f_x, \tag{1.6}$$

$$\Big\uparrow \quad 2f = \frac{p_x + p^2 + \alpha}{p}$$

$$p_t = p_{xxx} - 3\frac{p_x p_{xx}}{p} + \frac{3p_x^3}{2p^2} - \frac{3}{2}\Big(p + \frac{\alpha}{p}\Big)^2 p_x - 6\beta p_x, \tag{1.7}$$

$$\Big\uparrow \quad 2p = \frac{\sqrt{w_x^2 + 4R(w)} - w_x}{w - \gamma},$$

$$w_t = w_{xxx} - \frac{3w_x(w_{xx} + 2R'(w))^2}{2(w_x^2 + 4R(w))} + 6(2w - \beta)w_x, \tag{1.8}$$

where $R(w) = (w^2 - \gamma^2)(w + \gamma + \alpha)$. This "tower of modifications" and several simpler substitutions like the introduction of a potential cover almost all equations related to KdV;

the only exception is equation (1.4) with one double root and it is related to KdV by a third-order substitution which can not be decomposed into simpler ones. Note that each modification adds an arbitrary parameter, which is important for obtaining equations of general form. In the non-Abelian setting, we can expect that some parameters may be non-scalar.

One of results of this paper is the non-Abelian analog of equation (1.7) which is the rational form of the Calogero–Degasperis equation [18], [19]. It is likely that equation (1.8), also introduced in [18], and equation (1.4) have no non-Abelian counterparts for generic polynomials R. However, there exist analogs for two degenerate cases of (1.4) corresponding to $R = z^2$ and $R = 1$.

The list of non-Abelian equations and substitutions presented in the next section does not pretend to be complete; it may well be that analogs of some other scalar equations can be added to this scheme. All substitutions can be verified by straightforward calculations. A more demonstrative proof based on the derivation of substitutions from auxiliary linear problems is given in Section 3.

It should be noted that the above tower of modifications for scalar equations can also be constructed based on the Bäcklund transformations, as shown by Yamilov [20], [21], see also [22], [23]. Unfortunately, this method does not work in the non-Abelian setting. However, the differential substitutions still can be used to generate the Bäcklund transformations; this is briefly discussed in Section 4.

2. Graph of substitutions

We will construct differential substitutions between the following equations:

$$u_t = u_{xxx} - 3uu_x - 3u_xu, \qquad \text{KdV}$$

$$w_t = w_{xxx} - 3w_x^2, \qquad \text{pKdV}$$

$$f_t = f_{xxx} - 3f^2f_x - 3f_xf^2 - 6\alpha f_x, \qquad \text{mKdV}_1(\alpha)$$

$$v_t = v_{xxx} + 3[v, v_{xx}] - 6vv_xv - 3(v_x + v^2)a - 3a(v_x - v^2), \qquad \text{mKdV}_2(a)$$

$$y_t = y_{xxx} - 3y_{xx}y^{-1}y_x - 3y_xa - 3yay^{-1}y_x, \qquad \text{pmKdV}(a)$$

$$p_t = (D - \operatorname{ad} p)\Big(p_{xx} - \frac{3}{2}(p_x + p^2 - a)p^{-1}(p_x - p^2 + a) + [p, p_x] - 2p^3 - 6\beta p\Big), \qquad \text{CD}(a, \beta)$$

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3}{2}D\big((q_x - c)q^{-1}(q_x + c)\big), \qquad \text{CD}_0(c)$$

$$z_t = z_{xxx} - \frac{3}{2}(z_{xx} - az + zb - c)z_x^{-1}(z_{xx} + az - zb + c) - 3az_x - 3z_xb. \qquad \text{SKdV}(a, b, c)$$

Here D denotes the derivative with respect to x, field variables $u, \dots, z$ and constants a, b, c belong to a free associative algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ with unit 1, and u^{-1} denote the inverse element for u. For the sake of clarity, one can assume that $\mathcal{A}$ is the algebra of matrices of some arbitrary fixed size. Equations $\text{mKdV}_1(\alpha)$ and $\text{CD}(a, \beta)$ also contain scalar constants $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. These parameters can be set to 0 by the Galilean transform, but we do not do this since they are involved in the substitutions and related Bäcklund transformations. In what follows, we identify α with $\alpha 1 \in \mathcal{A}$, which gives meaning for expressions like $u + \alpha$.

For each equation, the order of factors in monomials can be reversed by passing to the new operation of multiplication $a \circ b = ba$ on $\mathcal{A}$. The resulting equation will be called transposed by analogy with the matrix case. It is natural to regard it as equivalent to the original equation.

The above equations have the property of invariance with respect to the transposition, possibly up to some additional involutions like the sign change (in pmKdV, we apply $y \to y^{-1}$) or changing the parameters.

Remark 2.1. *In the scalar case, equation CD*(α,β) *coincides with (1.7), the rational form of Calogero–Degasperis equation. Passing to the exponents brings it and* $\mathrm{CD}_0(\gamma)$ *to the original form from* [18], [19]*:*

$$P_t = P_{xxx} - \frac{1}{2}P_x^3 - \frac{3}{2}(e^P + \alpha e^{-P})^2 P_x - 6\beta P_x, \qquad p = e^P,$$
$$Q_t = Q_{xxx} - \frac{1}{2}Q_x^3 - \frac{3\gamma^2}{2}e^{-2Q}Q_x, \qquad q = e^Q.$$

The same change transforms the scalar equation pmKdV(α) *to the usual polynomial form*

$$Y_t = Y_{xxx} - 2Y_x^3 - 6\alpha Y_x, \quad y = e^Y.$$

Remark 2.2. *Comparing the above equations for* Q *and* Y*, we see that* $\mathrm{CD}_0(0)$ *is actually another non-Abelian analog of pmKdV. This equation was studied in* [13]*. One more interesting analog of pmKdV on Jordan algebras was obtained in* [24, Eq. (2.4)]. *In contrast to* $\mathrm{CD}_0(0)$*, it involves the operator* M_q^{-1} *instead of* q^{-1}*, where* M_q *is the multiplication operator in the Jordan algebra. Since any associative algebra* $\mathcal{A}$ *turns into a Jordan algebra with respect to the operation* $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$*, such equation can be defined on* $\mathcal{A}$ *as well, if we allow expressions involving* $(L_q + R_q)^{-1}$*, where* L_q *and* R_q *are operators of the left and right multiplication in* $\mathcal{A}$*.*

Remark 2.3. *Scalar equation SKdV*(a,b,c) *is actually the degenerate case of Krichever–Novikov equation (1.4) with* $R = ((a-b)z+c)^2$*. The case* $R = 0$ *is the Schwarzian KdV equation, and we keep this name for the entire family of equations.*

The following proposition is the main result of the paper.

Proposition 2.1. *The above non-Abelian equations are related by substitutions*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pKdV} \to \mathrm{KdV}: && u = w_x, && (2.1)\\
&\mathrm{pmKdV}(\alpha) \to \mathrm{mKdV}_1(\alpha): && f = y_x y^{-1}, && (2.2)\\
&\mathrm{mKdV}_1(\alpha) \to \mathrm{KdV}: && u = f_x + f^2 + \alpha, && (2.3)\\
&\mathrm{pmKdV}(a) \to \mathrm{KdV}: && u = y_{xx}y^{-1} + yay^{-1}, && (2.4)\\
&\mathrm{pmKdV}(a) \to \mathrm{mKdV}_2(a): && v = y^{-1}y_x, && (2.5)\\
&\mathrm{SKdV}(a,\beta,0) \to \mathrm{CD}(a-\beta,\beta): && p = z_x z^{-1}, && (2.6)\\
&\mathrm{CD}(a-\beta,\beta) \to \mathrm{mKdV}_2(a): && v = -\tfrac{1}{2}(p_x + p^2 - a + \beta)p^{-1}, && (2.7)\\
&\mathrm{SKdV}(0,0,c) \to \mathrm{CD}_0(c): && q = z_x, && (2.8)\\
&\mathrm{CD}_0(c) \to \mathrm{mKdV}_2(0): && v = -\tfrac{1}{2}(q_x - c)q^{-1}, && (2.9)\\
&\mathrm{SKdV}(a,b,c) \to \mathrm{mKdV}_2(a): && v = -\tfrac{1}{2}(z_{xx} - az + zb - c)z_x^{-1}. && (2.10)
\end{aligned}$$

Schematically, these substitutions are shown in Figure 1. We note that the substitution (2.2) from pmKdV(a) is valid only for the scalar value of parameter $a = \alpha$, so the substitution (2.4) is more general than the composition of (2.2) and (2.3). Similarly, the substitutions (2.6) and (2.8) from SKdV(a,b,c) do not work for arbitrary (a,b,c), so the substitution (2.10) is more general than the compositions of (2.6) and (2.7) or of (2.8) and (2.9).

It is worth noting that if we consider the complete graph of substitutions for scalar equations (the sequence (1.8) $\to \cdots \to$ (1.5) from Introduction is a part of this graph) then the KdV

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{KdV} & \mathrm{pKdV} \arrow[l] & & & & \\
\mathrm{mKdV}_1(\alpha) \arrow[u] & \mathrm{pmKdV}(a) \arrow[ul] \arrow[l, "a=\alpha"'] \arrow[r] & \mathrm{mKdV}_2(a) & & \mathrm{mKdV}_2(0) & \\
& \mathrm{SKdV}(a,b,0) \arrow[ur] \arrow[r, "b=\beta"'] & \mathrm{CD}(a-\beta,\beta) \arrow[u] & & \mathrm{CD}_0(c) \arrow[u] & \mathrm{SKdV}(0,0,c) \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Substitutions chart

equation (1.5) turns out to be the only vertex without outgoing arrows except for the isolated Krichever–Novikov equation (1.4). In the scalar setting, we can say that all paths lead to KdV. This is not the case for non-Abelian equations, since the mKdV_2 equation also turns out to be an end-point vertex.

3. Derivation of substitutions from linear problems

The auxiliary linear equations for the non-Abelian KdV equation look same as in the scalar case:

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - (2u+4\lambda)\psi_x.$$

However, this can be generalized by replacing the scalar spectral parameter λ with a non-Abelian one:

$$\psi_{xx} = u\psi - \psi\Lambda, \quad \psi_t = u_x\psi - 2u\psi_x - 4\psi_x\Lambda, \tag{3.1}$$

where $\psi, \Lambda \in \mathcal{A}$. Indeed, here Λ acts on ψ as the operator of right multiplication R_Λ, and the coefficients u and u_x act as operators of left multiplication L_u and L_{u_x}. But, any operators of left and right multiplication commute: $R_aL_b = L_bR_a$, $a, b \in \mathcal{A}$, therefore R_Λ behaves exactly like the scalar coefficient λ when calculating the compatibility condition. It is clear that such a generalization is possible for any zero curvature representation $A_t = B_x + [B, A]$, where entries of the matrices A and B are elements of $\mathcal{A}$ depending on λ and field variables.

We use (3.1) as the starting point for deriving the substitutions from Proposition 2.1.

PmKdV equation. As in the scalar case, the Miura transform is constructed by a particular solution $\psi = y$ corresponding to a fixed value $\Lambda = a \in \mathcal{A}$:

$$y_{xx} = uy - ya, \quad y_t = u_xy - 2uy_x - 4y_xa. \tag{3.2}$$

From the first equation we find $u = y_{xx}y^{-1} + yay^{-1}$ and the elimination of u from the second equation yields pmKdV(a). Thus, pmKdV is the equation for the wave function of the Schrödinger operator, and substitution (2.4) is a rewriting of the original linear equation.

Equations mKdV_1 *and* mKdV_2. The next step in the scalar setting is to pass to the logarithmic derivative $f = y_x/y$. With non-commutative variables, this can be done in at least two ways, leading to different answers.

The substitution $f = y_xy^{-1}$ works only for $a = \alpha \in \mathbb{C}$. In this case, the first equation (3.2) gives the Miura transformation $u = f_x + f^2 + \alpha$ which is the substitution (2.3), and the second equation gives

$$y_t = (u_x - 2uf - 4\alpha f)y = Fy, \quad F = f_{xx} + [f, f_x] - 2f^3 - 6\alpha f. \tag{3.3}$$

From equations $y_x = fy$, $y_t = Fy$ it follows $f_t = (D - \mathrm{ad}\, f)(F)$, which coincides with $\mathrm{mKdV}_1(\alpha)$.

If we apply another change $v = y^{-1}y_x$, first equation (3.2) becomes $y^{-1}uy = v_x + v^2 + a$. By replacing u in the second equation, we obtain

$$y_t = y(y^{-1}u_xy - 2y^{-1}uyv - 4va) = yV, \quad V = v_{xx} + 2[v, v_x] - 2v^3 - 3av - 3va.$$

Equations $y_x = yv$ and $y_t = yV$ imply $v_t = (D + \operatorname{ad} v)(V)$, which coincides with $\mathrm{mKdV}_2(a)$.

Equation SKdV. The next step is to transform equations (3.1) into auxiliary linear problems for mKdV_2 in such a way that the potential u is replaced by v. To do this, it is enough to make the gauge transformation $\psi = y\varphi$ [8]. In other words, we define φ as the ratio of solutions for (3.1) and (3.2). A direct calculation leads us to equations

$$\varphi_{xx} = a\varphi - \varphi\Lambda - 2v\varphi_x, \quad \varphi_t = 4v(a\varphi - \varphi\Lambda) - 2(v_x + v^2 + a)\varphi_x - 4\varphi_x\Lambda, \tag{3.4}$$

where $\varphi, a, \Lambda \in \mathcal{A}$. By construction, the compatibility condition for this pair of equations is equivalent to $\mathrm{mKdV}_2(a)$. Now we can do what we did before with the pair (3.1): to write an equation for a particular solution $\varphi = z$ corresponding to the value $\Lambda = b$ and for its logarithmic derivative. So, let z satisfy the equations

$$z_{xx} = az - zb - 2vz_x, \quad z_t = 4v(az - zb) - 2(v_x + v^2 + a)z_x - 4z_xb. \tag{3.5}$$

We find v from the first equation and substitute it into the second one. After simple algebra, this leads to the $\mathrm{SKdV}(a, b, 0)$ equation

$$z_t = z_{xxx} - \frac{3}{2}(z_{xx} - az + zb)z_x^{-1}(z_{xx} + az - zb) - 3az_x - 3z_xb$$

and to the substitution $-2v = (z_{xx} - az + zb)z_x^{-1}$ which relates this equation with $\mathrm{mKdV}_2(a)$.

In this equation, it is easy to see that the transformation $z \to z + d$ leads us only to the replacement of the term $az - zb$ with $az - zb + c$, where $c = ad - db$. For arbitrary $a, b, d \in \mathcal{A}$, the element c is arbitrary as well, therefore the equation can be extended to the case of three parameters $\mathrm{SKdV}(a, b, c)$. This leads us to substitution (2.10).

Equations $CD(a, \beta)$ and $CD_0(c)$. Since equation $\mathrm{SKdV}(0, 0, c)$ contains only derivatives of z, it admits the substitution $z_x = p$ and we arrive at $\mathrm{CD}_0(c)$. For equation $\mathrm{SKdV}(a, b, 0)$, we can use the logarithmic derivative instead, assuming that one of parameters a or b is scalar. In contrast to the pmKdV equation for y, this equation is invariant with respect to the transposition and the interchange of parameters, so that both versions z_xz^{-1} and $z^{-1}z_x$ are on equal footing. For definiteness, let

$$p = z_xz^{-1}, \quad b = \beta \in \mathbb{C},$$

then equations (3.5) take the form

$$p_x + p^2 = a - \beta - 2vp, \quad z_tz^{-1} = 4v(a - \beta) - 2(v_x + v^2 + a + 2\beta)p. \tag{3.6}$$

The first equation is equivalent to the substitution (2.7), and the second equation becomes $z_t = Pz$ after eliminating v, with

$$P = p_{xx} - \frac{3}{2}(p_x + p^2 - a + \beta)p^{-1}(p_x - p^2 + a - \beta) + [p, p_x] - 2p^3 - 6\beta p.$$

This yields the equation $p_t = (D - \operatorname{ad} p)(P)$, which is $\mathrm{CD}(a - \beta, \beta)$.

4. Bäcklund transformations

Recall that the scalar tower of modifications (1.5)–(1.8) can be derived in an alternative way based on Bäcklund transformations [20, 21]. For the mKdV equation, the x-part of Bäcklund transformations is represented by the dressing chain [25]

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1} \tag{4.1}$$

generated by compositions of the Miura map and the change $f \to -f$ which leaves the mKdV equation invariant. Let us introduce a new variable p_n and rewrite (4.1) as the system

$$f_n + f_{n+1} = p_n, \quad f_n - f_{n+1} = \frac{p_{n,x} - \alpha_n + \alpha_{n+1}}{p_n},$$

then both f_n and f_{n+1} are easily expressed through p_n and $p_{n,x}$. This is the substitution (1.7)→(1.6), up to the values of parameters, and moreover, we obtain the chain for p_n

$$(p_n p_{n+1})_x = p_n p_{n+1}(p_n - p_{n+1}) + (\alpha_n - \alpha_{n+1})p_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})p_n. \tag{4.2}$$

The CD equation for p_n is obtained by applying the found substitutions to the result of differentiating the relation $p_n = f_n + f_{n+1}$ in virtue of the mKdV equations for f_n and f_{n+1}. Moreover, the invariance with respect to the shift $n \to n+1$ guarantees that p_{n+1} also satisfies the CD equation, so that the chain (4.2) defines the x-part of Bäcklund transformations for this equation.

This trick can be repeated once more by introducing the variable $w_n = p_n p_{n+1}$ and this leads us to the substitution (1.8)→(1.7). Further modification is not possible, since the chain equation for w_n does not have some functional structure required for this, see [21].

What about this procedure in the non-Abelian setting? One can easily see that chain (4.1) still works, since the form of the Miura map (2.3) is the same as for the scalar counterparts. Therefore, (4.1) defines the Bäcklund transformations for the non-Abelian $\mathrm{mKdV}_1(\alpha)$ equation. However, introducing the variable $p_n = f_n + f_{n+1}$ now gives nothing for the simple reason that the difference of non-Abelian squares $f_n^2 - f_{n+1}^2$ is not factorizable. Unfortunately, this nice scheme fails already at the first step.

Nevertheless, the chain of Bäcklund transformations for the non-Abelian CD equation can still be constructed, but for this we have to use the substitution (2.7) from CD to mKdV_2 and the change $p \to -p^t$ which leaves CD equation invariant. Hence it follows that there are two different substitutions between the $\mathrm{CD}(a-\beta, \beta)$ and the $\mathrm{mKdV}_2(a)$ equations:

$$-2v = p^{-1}(-p_x + p^2 - a + \beta) \qquad \text{and} \qquad -2v = (p_x + p^2 - a + \beta)p^{-1}.$$

In these substitutions, β can be changed, but a is fixed, since this parameter is contained in the target $\mathrm{mKdV}_2(a)$ equation. This gives rise to a sequence of substitutions

$$-2v_n = p_n^{-1}(-p_{n,x} + p_n^2 - a + \beta_n) = (p_{n+1,x} + p_{n+1}^2 - a + \beta_{n+1})p_{n+1}^{-1},$$

from which we obtain the chain

$$(p_n p_{n+1})_x = p_n(p_n - p_{n+1})p_{n+1} - (a - \beta_n)p_{n+1} + p_n(a - \beta_{n+1}). \tag{4.3}$$

By construction, it defines the x-part of Bäcklund transformations between equations $\mathrm{CD}(a - \beta_n, \beta_n)$. Of course, this remains true also for scalar variables, but note that the scalar version of (4.3) *differs from* (4.2): in one equation the signs of two linear terms coincide, and in the other they are opposite. This distinction is due to different methods which we used to construct the chains, and it turns out that one method admits a non-Abelian generalization, while the other does not.

In conclusion, we remark that Miura maps (2.3) and (2.7) admit non-local generalizations. Relations like (3.3), which were obtained under assupmtion $a = \alpha \in \mathbb{C}$, can be obtained also for $a \in \mathcal{A}$, at the expense of introducing an additional variable. Let $f = y_x y^{-1}$, $g = yay^{-1}$ then relations (3.2) imply

$$u = f_x + f^2 + g, \quad y_t = Fy, \quad F = f_{xx} + [f, f_x] - 2f^3 - 3fg - 3gf,$$

and we arrive to the following system for f and g:

$$f_t = (D - \operatorname{ad} f)(F) = f_{xxx} - 3(f^2+g)f_x - 3f_x(f^2+g), \quad g_t = [F, g], \quad g_x = [f, g].$$

The variable g can be viewed as a nonlocality defined by the latter equation which plays the role of a constraint. The invariance of all relations with respect to the change $(u, f, g) \to (u^t, -f^t, g^t)$ implies that there is also another Miura map $u = -f_x + f^2 + g$. The composition of these two substitutions gives rise to the dressing chain

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + g_n - g_{n-1}, \quad g_{n,x} = [f_n, g_n],$$

which defines the general Darboux transformations for the non-Abelian Schrödinger operator [6] and the x-part of Bäcklund transformations for the above system for f and g.

In a similar way, relations (3.6) obtained under assumption $b = \beta \in \mathbb{C}$ can be generalized for the case $b \in \mathcal{A}$, by introducing the additional variable $h = zbz^{-1}$. This leads to the system

$$p_t = (D - \operatorname{ad} p)(P), \quad h_t = [P, h], \quad h_x = [p, h],$$
$$P = p_{xx} - \frac{3}{2}(p_x + p^2 - a + h)p^{-1}(p_x - p^2 + a - h) + [p, p_x] - 2p^3 - 3ph - 3hp$$

and to the chain

$$(p_n p_{n+1})_x = p_n(p_n - p_{n+1})p_{n+1} - (a - h_n)p_{n+1} + p_n(a - h_{n+1}), \quad h_{n,x} = [p_n, h_n],$$

which defines the x-part of Bäcklund transformations for this system and the Darboux transformations for spectral problem (3.4).

REFERENCES

1. M. Wadati, T. Kamijo. *On the extension of inverse scattering method* // Prog. Theor. Phys. **52**, 397–414 (1974).
2. F. Calogero, A. Degasperis. *Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. II* // Il Nuovo Cim. **39B**:1, 1–54 (1977).
3. L. Martinez Alonso, E. Olmedilla. *Trace identities in the inverse scattering transform method associated with matrix Schrödinger operators* // J. Math. Phys. **23**:11, 2116–2121 (1982).
4. V.A. Marchenko. *Nonlinear equations and operator algebras.* Reidel, Boston (1988).
5. V.M. Goncharenko, A.P. Veselov. *Monodromy of the matrix Schrödinger equations and Darboux transformations* // J. Phys. A **31**:23, 5315–5326 (1998).
6. A.A. Suzko. *Intertwining technique for the matrix Schrödinger equation* // Phys. Lett. A **335**:2–3, 88–102 (2005).
7. F.A. Khalilov, E.Ya. Khruslov. *Matrix generalization of the modified Korteweg–de Vries equation* // Inverse Problems **6**:2, 193–204 (1990).
8. Q.P. Liu, C. Athorne. *Comment on 'Matrix generalization of the modified Korteweg–de Vries equation'* // Inverse Problems **7**:5, 783–785 (1991).
9. B.A. Kupershmidt. *KP or mKP. Noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems.* AMS, Providence, RI (2000).
10. V.E. Adler, V.V. Sokolov. *Non-Abelian evolution systems with conservation laws* // Math. Phys. Anal. Geom. **24**, 7 (2021).
11. S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. *Evolution equations with nontrivial conservation laws* // Funct. Anal. Appl. **16**:4, 317–319 (1982).
12. A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. *The symmetry approach to classification of integrable equations* // in "What is integrability?", ed. V.E. Zakharov, Springer-Verlag, 115–184 (1991).
13. S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. *Deformations of Jordan triple systems and integrable equations* // Theor. Math. Phys. **108**:3, 1160–1163 (1996).

14. V.E. Adler, V.V. Sokolov. *On matrix Painlevé II equations* // Theor. Math. Phys. **207**:2, 560–571 (2021).
15. S. Carillo, M.L. Schiavo, E. Porten, C. Schiebold. *A novel noncommutative KdV-type equation, its recursion operator, and solitons* // J. Math. Phys. **59**:4, 043501 (2018).
16. S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. *On Bäcklund transformations for integrable evolution equations* // Sov. Math. Dokl. **28**, 165–168 (1983).
17. I.M. Krichever, S.P. Novikov. *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations* // Russ. Math. Surveys **35**:6, 53–79 (1980).
18. F. Calogero, A. Degasperis. *Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform* // J. Math. Phys. **22**:1, 23–31 (1981).
19. A.S. Fokas. *A symmetry approach to exactly solvable evolution equations* // J. Math. Phys. **21**:6, 1318–1325 (1980).
20. R.I. Yamilov. *Invertible changes of variables generated by Bäcklund transformations* // Theor. Math. Phys. **85**:3, 1269–1275 (1990).
21. R.I. Yamilov. *On the construction of Miura type transformations by others of this kind* // Phys. Lett. A **173**:1, 53–57 (1993).
22. A.B. Borisov, S.A. Zykov. *The dressing chain of discrete symmetries and proliferation of nonlinear equations* // Theor. Math. Phys. **115**:2, 530–541 (1998).
23. S.Ya. Startsev. *Differential substitutions of the Miura transformation type* // Theor. Math. Phys. **116**:3, 1001–1010 (1998).
24. S.I. Svinolupov. *Jordan algebras and integrable systems* // Funct. Anal. Appl. **27**:4, 257–265 (1993).
25. A.P. Veselov, A.B. Shabat. *Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operators* // Funct. Anal. Appl. **27**:2, 81–96 (1993).

Vsevolod Eduardovich Adler,
L.D. Landau Institute for Theoretical Physics,
Akademika Semenova av., 1A,
142432, Chernogolovka, Moscow Region, Russia
E-mail: adler@itp.ac.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 121-140.

ON MKDV EQUATIONS RELATED TO KAC-MOODY ALGEBRAS $A_5^{(1)}$ AND $A_5^{(2)}$

V.S. GERDJIKOV

Abstract. We outline the derivation of the mKdV equations related to the Kac–Moody algebras $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$. First we formulate their Lax representations and provide details how they can be obtained from generic Lax operators related to the algebra $sl(6)$ by applying proper Mikhailov type reduction groups $\mathbb{Z}_h$. Here h is the Coxeter number of the relevant Kac–Moody algebra. Next we adapt Shabat's method for constructing the fundamental analytic solutions of the Lax operators L. Thus we are able to reduce the direct and inverse spectral problems for L to Riemann–Hilbert problems (RHP) on the union of $2h$ rays l_ν. They leave the origin of the complex λ-plane partitioning it into equal angles π/h. To each l_ν we associate a subalgebra $\mathfrak{g}_\nu$ which is a direct sum of $sl(2)$–subalgebras. In this way, to each regular solution of the RHP we can associate scattering data of L consisting of scattering matrices $T_\nu \in \mathcal{G}_\nu$ and their Gauss decompositions. The main result of the paper states how to find the minimal sets of scattering data $\mathcal{T}_k$, $k = 1, 2$, from T_0 and T_1 related to the rays l_0 and l_1. We prove that each of the minimal sets $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ allows one to reconstruct both the scattering matrices T_ν, $\nu = 0, 1, \dots 2h$ and the corresponding potentials of the Lax operators L.

Keywords: mKdV equations, Kac–Moody algebras, Lax operators, minimal sets of scattering data.

Mathematics Subject Classification:17B67, 35P25, 35Q15, 35Q53

1. Introduction

This paper is a continuation of a series of papers on Kax-Moody algebras and mKdV equations [14], [15], [16], [17], [18] and two recent papers [19], [13]. There we derived explicitly the system of mKdV equations related to several particular choices of Kac-Moody algebras, including some twisted ones like $D_4^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$, $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$.

The next natural steps to be considered are to develop the direct and inverse scattering method for the relevant Lax operators and to construct their reflectionless potentials and, as a consequence, soliton solutions to the mKdV systems. The methods for doing this have been already developed in [7], [20], [8], [21], [22], [23], [39]. This is why it will not be difficult to specify the construction of the fundamental analytic solutions (FAS) [32], [33] of the relevant Lax operators and to formulate the corresponding Riemann-Hilbert problem (RHP). In constructing the soliton solutions, the most effective method known to us is the dressing Zakharov-Shabat method [37], [38].

The structure of the paper is as follows. In Section 2 we outline preliminary known results about the structure of the Lax operators for the case of $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ Kac-Moody algebras and for the recursion operators, see [13]. Section 3 is devoted to the fundamental analytic solutions (FAS) and to the Riemann-Hilbert problems for both cases. In Section 4 we introduce the

---

V.S. Gerdjikov, On mKdV equations related to Kac-Moody algebras $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$.

© V.S. Gerdjikov. 2021.

The reported study by V.S. Gerdjikov was funded in part by the Bulgarian National Science Foundation under contract KP-06N42-2.

Submitted April 12, 2021.

minimal sets of scattering data and show by these set we can reconstruct both the potential and the sewing functions of the RHP. In the appendices we discuss some algebraic details of the structure of Kac-Moody algebras.

2. Preliminaries

2.1. Lax representations: $A_5^{(1)}$ case. We suppose that the readers are familiar with the theory of simple Lie algebras and Kac-Moody algebras, see [3], [24], [4] and their applications in the studies of integrable nonlinear evolution equations [5], [6]. Details about the bases and the gradings of the Kac-Moody algebras are given in the appendices. Here we consider a nonlinear evolution equation with a simplest nontrivial dispersion law, which is $f_{\rm mKdV}(\lambda) = \lambda^3 K$.

In this section, following our previous papers, we define the Lax pairs whose potentials are elements of the $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ algebras for the mKdV equations. They represent the third nontrivial member in the hierarchy of soliton equations related to these algebras. The results presented here are derived in [16], [14] for $A_5^{(1)}$ and in [13], [19] for $A_5^{(2)}$.

We consider a Lax pair that is polynomial in the spectral parameter λ:

$$\begin{aligned} L\psi &\equiv \left(i\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,t) - \lambda J \right)\psi = 0\,, \\ M\psi &\equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t} + V_0(x,t) + \lambda V_1(x,t) + \lambda^2 V_2(x,t) - \lambda^3 K \right)\psi = -\lambda^3 \psi K. \end{aligned} \tag{2.1}$$

The zero-curvature condition $[L\,, M] = 0$ leads to a polynomial of fourth order in λ, which has to vanish identically. The Kac-Moody algebra $A_5^{(1)}$ is graded by the Coxeter automorphism C_1, see Appendix A below) The basis we use reads as

$$\begin{aligned} &J_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} \epsilon_{j,j+s}\omega_1^{-k(j-1)} E_{j,j+s}, \qquad \epsilon_{j,j+s} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j+s \leqslant 6, \\ -1 & \text{if} \quad j+s > 6, \end{cases} \\ &\left[J_s^{(k)}, J_l^{(m)} \right] = \left(\omega_1^{-ms} - \omega_1^{-kl} \right) J_{s+l}^{(k+m)}, \qquad J_s^{(k)} J_p^{(m)} = \omega_1^{-sm} J_{s+p}^{(k+m)}, \\ &(J_s^{(k)})^{-1} = (J_s^{(k)})^{\dagger}. \end{aligned}$$

The potential coefficients of the Lax pair are defined as

$$\begin{aligned} Q(x,t) &= \sum_{j=1}^{5} q_j(x,t) J_j^{(0)}, \qquad V_1(x,t) = \sum_{l=1}^{6} v_l^{(1)}(x,t) J_l^{(1)}, \qquad J = J_0^{(1)}, \\ V_2(x,t) &= \sum_{l=1}^{6} v_l^{(2)}(x,t) J_l^{(2)}, \qquad V_0(x,t) = \sum_{l=1}^{5} v_l^{(0)}(x,t) J_l^{(0)}, \qquad K = J_0^{(3)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

The condition $[L, M] = 0$ leads us to a set of recurrent relations, see [20], [22], [9], which allow us to determine $V^{(k)}(x,t)$ in terms of the potential $Q(x,t)$ and its x-derivatives.

By using the choices for Q, J and K from (2.2) we get:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ -q_5 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ -q_4 & -q_5 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_3 & -q_4 & -q_5 & 0 & q_1 & q_2 \\ -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_5 & 0 & q_1 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \mathrm{diag}\,(1, \omega^5, \omega^4, \omega^3, \omega^2, \omega), \qquad K = \mathrm{diag}\,(1, -1, 1, -1, 1, -1),$$

where $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$. These equations admit the following Hamiltonian formulation:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta q_{6-i}}\right).$$

The Hamiltonian density is:

$$\begin{aligned} H =& -32\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_5}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)^2 \\ &+ 8\sqrt{3}\left(-2q_2q_3\frac{\partial q_1}{\partial x} + 2q_5^2\frac{\partial q_2}{\partial x} + (q_1q_2+q_4q_5)\frac{\partial q_3}{\partial x} + 2q_1^2\frac{\partial q_4}{\partial x} - 2q_3q_4\frac{\partial q_5}{\partial x}\right) \\ &+ 2q_3^4 - 24(q_1q_5+q_2q_4)q_3^2 + 16(q_1^3 - 3q_1q_4^2 - 3q_2^2q_5 + q_5^3)q_3 + 24(q_1q_2 - q_4q_5)^2. \end{aligned}$$

2.2. Lax representations: $A_5^{(2)}$ case. Here we formulate the main results of a recent paper [13], see also [11], [12], [14], [15], [18]. The grading used here is described in Appendix B. It uses the Coxeter automorphism C_2 and splits A_5 into 10 subspaces. The dispersion laws of the nonlinear evolution equation to $A_5^{(2)}$ are odd functions in λ; therefore, NLS-type equations here are not allowed. Thus, we are left with $f_{\mathrm{mKdV}}(\lambda) = \lambda^3 K$.

The Lax pair is of the form

$$\begin{aligned} L =& i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J, \\ M =& i\partial_t + V^{(0)}(x,t) + \lambda V^{(1)}(x,t) + \lambda^2 V^{(2)}(x,t) - \lambda^3 K, \end{aligned}$$

where

$$Q(x,t) \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad V^{(k)}(x,t) \in \mathfrak{g}^{(k)}, \quad K \in \mathfrak{g}^{(3)}, \quad J \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

Here we choose J and K as follows:

$$J = \mathrm{diag}\,(\omega_2^4, \omega_2^2, 1, 0, \omega_2^6, \omega_2^8), \qquad K = 20J^3,$$

where $\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{10}}$ and choose

$$Q = \sum_{j=1}^{3} q_j \mathcal{E}_j^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_3 & q_2 & -q_1 & -q_3 \\ -q_1 & 0 & q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_3 \\ -q_3 & -q_1 & 0 & q_2 & -q_3 & -q_1 \\ -q_2 & q_2 & -q_2 & 0 & q_2 & -q_2 \\ q_1 & q_3 & q_3 & -q_2 & 0 & -q_1 \\ q_3 & q_3 & q_1 & q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then we solve the recurrent relations obtaining the following result:

$$V_p^{\mathrm{f}} = \sum_{j=1}^{3} v_{p;j}\mathcal{E}_j^{(p)}, \qquad p = 2,1,0, \qquad V_1 = V_1^{\mathrm{f}} + v_{1;4}J,$$

and obtain explicit expressions for $v_{p;j}$ in terms of q_j and their x-derivatives, for details see [14], [13]. The equations of motion

$$\frac{\partial q_j}{\partial x} = \frac{\partial v_{0;j}}{\partial x}, \qquad j = 1,2,3,$$

can be cast in Hamiltonian form as follows:

$$\frac{\partial q_j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta q_j(x)} = \frac{\partial v_{0;j}}{\partial x}, \qquad j = 1,2,3,$$

where

$$
\begin{aligned}
H =&2\left\{(3\sqrt{5}+5)\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)^2 - 10\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2 - (3\sqrt{5}-5)\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)^2\right\} \\
&+ 20\left(c_2^- q_3^2 + c_2^+ q_1 q_3 - 2c_2^+ q_2^2\right)\frac{\partial q_1}{\partial x} - 20\left(c_2^- q_1 q_3 + c_2^+ q_1^2 - 2c_2^- q_2^2\right)\frac{\partial q_3}{\partial x} \\
&+ 40\left(-c_2^- q_3 + c_2^+ q_2\right) q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x} + 20 q_2^4 + 40 q_1 q_3 (q_3^2 - q_1^2) + 60(q_1^2 q_3^2 - q_2^2 q_3^2 - q_1^2 q_2^2)
\end{aligned}
$$

and

$$
c_2^+ = \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \qquad c_2^- = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}.
$$

Let us now repeat the calculations using the second type of grading, see equation (B.2). In this equation, potential takes diagonal form while J becomes the sum of admissible roots. We can do the grading using an alternative choice of the Coxeter automorphism given by (B.3), (B.4). This gives:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Q}(x,t) = i\sum_{j=1}^{3} u_j(x,t)\mathcal{E}_{jj}^+, \qquad \tilde{J} = \mathcal{E}_{21}^+ + \mathcal{E}_{32}^+ + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{43}^+ + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{15}^-, \\
&V^{(0)}(x,t) = \sum_{j=1}^{3} v_j^{(0)}\mathcal{E}_{jj}^+, \\
&V^{(1)}(x,t) = v_1^{(1)}\mathcal{E}_{21}^+ + v_2^{(1)}\mathcal{E}_{32}^+ + \frac{1}{2}v_3^{(1)}\mathcal{E}_{43}^+ + \frac{1}{2}v_4^{(1)}\mathcal{E}_{15}^-, \\
&V^{(2)}(x,t) = -v_1^{(2)}\mathcal{E}_{31}^+ - v_2^{(2)}\mathcal{E}_{42}^+ - \frac{1}{2}v_3^{(2)}\mathcal{E}_{14}^-, \\
&\tilde{K} = 5\tilde{J}^3,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

where

$$
\begin{aligned}
v_1^{(2)} &= -5i(u_1 + u_2 + u_3), \qquad v_2^{(2)} = -5iu_2, \qquad v_3^{(2)} = -5i(u_1 - u_2 - u_3), \\
v_1^{(1)} =&10\left(u_1 u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + v_4^{(1)}, \\
v_2^{(1)} =&5\left(u_3^2 - u_1^2 + u_1 u_2 + u_2 u_3 + \frac{\partial}{\partial x}(u_3 + u_2 - u_1)\right) + v_4^{(1)}, \\
v_3^{(1)} =&5\left(u_3^2 - u_2^2 - u_1^2 + u_1 u_2 + \frac{\partial}{\partial x}(u_3 + 2u_2 - u_1)\right) + v_4^{(1)}, \\
v_4^{(1)} =&2u_2^2 + 2u_1^2 - 3u_3^2 - 5u_1 u_2 + \frac{\partial}{\partial x}(5u_1 - 4u_2 - 3u_3).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

For $V^{(0)}(x,t)$ we find:

$$
\begin{aligned}
v_1^{(0)} =&i\left(-5\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 3u_1\frac{\partial}{\partial x}(3u_2 + u_3) - 2u_1^3 + 3u_1(u_2^2 + u_3^2)\right), \\
v_2^{(0)} =&i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(4u_2 + 3u_3) + 3u_2\frac{\partial u_3}{\partial x} - 9u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + 6u_3\frac{\partial u_3}{\partial x} - 2u_2^3 + 3u_2(u_1^2 + u_3^2)\right), \\
v_3^{(0)} =&i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_3 + 3u_2) - 6u_3\frac{\partial u_2}{\partial x} - 3u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - 3u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2u_3^3 + 3u_3(u_1^2 + u_2^2)\right).
\end{aligned}
$$

Finally, the set of mKdV equations takes the form:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(-5\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 3u_1\frac{\partial}{\partial x}(3u_2+u_3) - 2u_1^3 + 3u_1(u_2^2+u_3^2)\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(4u_2+3u_3) + 3u_2\frac{\partial u_3}{\partial x} - 9u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right.\\
&\left. + 6u_3\frac{\partial u_3}{\partial x} - 2u_2^3 + 3u_2(u_1^2+u_3^2)\right),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_3+3u_2) - 6u_3\frac{\partial u_2}{\partial x} - 3u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - 3u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2u_3^3 + 3u_3(u_1^2+u_2^2)\right).
\end{aligned}
$$

These equations acquire Hamiltonian form:

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u_i}\right) = \frac{\partial v_{0;i}}{\partial x},
$$

where the Hamiltonian is

$$
\begin{aligned}
H = \int_{-\infty}^{\infty} dx\Bigg(&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} u_i^4 + \frac{3}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i^2u_j^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\\
&- 2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(\frac{9}{2}u_1^2 - 3u_3^2\right)\\
&+ \frac{3}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x}(u_1^2+u_2^2) - 3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Using the second type of grading is in fact equivalent to the first one. One can check that the two types of gradings are related by a similarity transformations of the form:

$$
w_0^{-1}\tilde{Q}w_0 = Q, \qquad w_0^{-1}\tilde{J}w_0 = J. \qquad w_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \omega_2^{-4} & \omega_2^{-2} & 1 & 0 & \omega_2^{4} & \omega_2^{2} \\ \omega_2^{2} & \omega_2^{-4} & 1 & 0 & \omega_2^{-2} & \omega_2^{4} \\ \omega_2^{-2} & \omega_2^{4} & 1 & 0 & \omega_2^{2} & \omega_2^{-4} \\ \omega_2^{4} & \omega_2^{2} & 1 & 0 & \omega_2^{-4} & \omega_2^{-2} \\ 1 & 1 & 1 & -i\sqrt{5} & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Effectively we find that u_j and q_s are related linearly as follows:

$$
\begin{aligned}
&u_1 = c^- q_1 + c^+ q_3, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}q_2, \qquad u_3 = -c^- q_1 + c^+ q_3,\\
&c^+ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}, \qquad c^- = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}.
\end{aligned}
$$

2.3. Recursion relations and recursion operators Λ_k. Our aim here is to describe the hierarchies of equations in terms of the recursion operators Λ_k. The idea is to treat the compatibility conditions as recurrent relations which will be solved using the recursion operators, see [19], [13], [14], [15], [18]. The initial condition reads as

$$
V_2 = \operatorname{ad}_J^{-1}[K, Q].
$$

We note that the operator ad_J acting on each element $X \in \mathfrak{g}$ by the rule $\operatorname{ad}_J X = [J, X]$ has a non-trivial kernel and therefore, it could be inverted only if X belongs to its image. Hence, while solving the recurrent relations, we need to split each V_s into, roughly speaking, 'diagonal' and 'off-diagonal' parts:

$$
V_s = V_s^{\mathrm{f}} + V_s^{\mathrm{d}},
$$

where $V_s^{\rm f} \in {\rm Im\,ad}_J$ and $V_s^{\rm d}$ is such that ${\rm ad}_J V_s^{\rm f} = 0$. Then we have:

$$V_{n-1}(x,t) \equiv V_{n-1}^{\rm f}(x,t) = \sum_{p=1}^{r} \frac{\alpha_p(K)}{\alpha_p(J)} q_p(x,t) \mathcal{E}_p^{(n_1-1)}.$$

Now we assume that s_1 is an exponent and split the third equation in (2.3) into diagonal and off-diagonal parts. Evaluating the Killing form of this equation with $\mathcal{H}_1^{h-s_1}$, we obtain:

$$w_{s_1}(x,t) = \frac{i}{c_{s_1}} \partial_x^{-1} \left\langle [Q, V_{s_1}^{\rm f}], \mathcal{H}_1^{h-s_1} \right\rangle + {\rm const}\,, \qquad c_{s_1} = \left\langle \mathcal{H}_1^{s_1}, \mathcal{H}_1^{h-s_1} \right\rangle.$$

In what follows for simplicity we set all these integration constants to be 0. A diligent reader can easily work out the more general cases when some of these constants do not vanish. The off-diagonal part of the third equation in (2.4) gives:

$$i\partial_x V_s^{\rm f} + [Q, V_s^{\rm f}]^{\rm f} + [Q, w_s \mathcal{H}_1^{s_1}] = [J, V_{s-1}],$$

i.e.

$$V_{s-1}^{\rm f} = {\rm ad}_J^{-1} \left(i\partial_x V_s^{\rm f} + [Q, V_s^{\rm f}]^{\rm f} + [Q, w_s \mathcal{H}_1^{s_1}] \right) = \Lambda_{s_1} V_s^{\rm f}.$$

Thus, we have obtained an integro-differential operator Λ_{s_1} which acts on each $Z \equiv Z^{\rm f} \in \mathfrak{g}^{(s_1)}$ as

$$\Lambda_{s_1} Z = {\rm ad}_J^{-1} \left(i\partial_x Z + [Q, Z]^{\rm f} + \frac{i}{c_{s_1}} [Q, \mathcal{H}_1^{s_1}] \partial_x^{-1} \left\langle [Q, Z], \mathcal{H}_1^{h-s_1} \right\rangle \right).$$

If s_1 is not an exponent, we have only to work out the off-diagonal part of the third equation in (2.3):

$$\begin{aligned} V_{s-1}^{\rm f} &= {\rm ad}_J^{-1} \left(i\partial_x V_s^{\rm f} + [Q, V_s^{\rm f}]^{\rm f} \right) = \Lambda_0 V_s^{\rm f}, \\ \Lambda_0 Z &= {\rm ad}_J^{-1} \left(i\partial_x Z + [Q, Z]^{\rm f} \right). \end{aligned}$$

Here Λ_0 is a differential operator.

Now we can study the hierarchies related to $A_5^{(1)}$. Since the Coxeter number is 6 and the exponents are 1, 2, 3, 4, 5, the results are as follows:

$$\begin{aligned} n &= 6n_0 + 1 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} Q(x,t) \right), \qquad & f(\lambda) &= \lambda^{N_1} \mathcal{H}_1^{(1)}, \\ n &= 6n_0 + a \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} \Lambda_{a-1} \dots \Lambda_0 {\rm ad}_J^{-1} [\mathcal{H}_1^a, Q(x,t)] \right), \qquad & f(\lambda) &= \lambda^{N_a} \mathcal{H}_1^{(a)}, \end{aligned}$$

where $N_a = 6n_0 + a$, $a = 1, 2, \dots, 5$ and $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5 \Lambda_0$.

In the same way we can study the hierarchies related to $A_5^{(2)}$. Here the Coxeter number is 10 and the exponents are 1, 3, 5, 7, 9. The results are

$$\begin{aligned} n &= 10n_0 + 1 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} Q(x,t) \right), \\ n &= 10n_0 + 3 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} \Lambda_1 \Lambda_0 {\rm ad}_J^{-1} [\mathcal{H}_1^{(3)}, Q(x,t)] \right), \\ n &= 10n_0 + 5 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_3 \Lambda_0 {\rm ad}_J^{-1} [\mathcal{H}_1^{(5)}, Q(x,t)] \right), \\ n &= 10n_0 + 7 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_3 \Lambda_0 \Lambda_5 \Lambda_0 {\rm ad}_J^{-1} [\mathcal{H}_1^{(7)}, Q(x,t)] \right), \\ n &= 10n_0 + 9 \qquad & \partial_t Q &= \partial_x \left(\mathbf{\Lambda}^{n_0} \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_3 \Lambda_0 \Lambda_5 \Lambda_0 \Lambda_7 \Lambda_0 {\rm ad}_J^{-1} [\mathcal{H}_1^{(9)}, Q(x,t)] \right), \end{aligned}$$

where $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_3 \Lambda_0 \Lambda_5 \Lambda_0 \Lambda_7 \Lambda_0 \Lambda_9 \Lambda_0$ and the dispersion laws are given by $f_j(\lambda) = \lambda^{10n_0 + n_j} \mathcal{H}_{n_j}^{(1)}$, $n_j = 2j - 1$, being the exponents of $A_5^{(2)}$.

3. Riemann-Hilbert problem

3.1. General aspects. The general methods for constructing the FAS of the Lax operators were proposed in the pioneer papers by A.B. Shabat [32], [33], in which he constructed the FAS of a class of $n \times n$ Lax operators of type (2.1) with $J = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ assuming that the eigenvalues of J are real and are taken in the descending order. The continuous spectrum of such L operator with a fast decaying potential Q fills up the real axis in the complex λ-plane. One of the corresponding FAS $\chi^+(x, \lambda)$ admits an analytic extension into the upper half plane $\mathbb{C}_+$; the other one $\chi^-(x, \lambda)$ is analytic in the lower half plane $\mathbb{C}_-$ and on the real axis they are related linearly:

$$\chi^+(x, t, \lambda) = \chi^-(x, t, \lambda) G_0(t, \lambda), \tag{3.1}$$

where the sewing function $G(t, \lambda)$ is expressed by the Gauss factors of the corresponding scattering matrix. A simple transformation from $\chi^\pm(x, \lambda)$ to $\xi^\pm(x, \lambda) = \chi^\pm(x, \lambda) e^{i\lambda J x}$ allows one to reformulate RHP (3.1) as follows:

$$\xi^+(x, t, \lambda) = \xi^-(x, t, \lambda) G(x, t, \lambda), \qquad G(x, t, \lambda) = e^{-i\lambda J x} G_0(t, \lambda) e^{i\lambda J x}. \tag{3.2}$$

An advantage of RHP (3.2) is that it allows canonical normalization in the form $\lim_{\lambda\to\infty} \xi^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{1}$.

Shabat and Zakharov developed further these ideas by discovering a deep relation between RHP (3.2) and the corresponding pair of Lax operators. They proved a theorem [37], [38] stating that if $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ satisfy RHP (3.2) and the sewing function $G(x, t, \lambda)$ has a proper x–dependence, then the corresponding $\chi^\pm(x, t, \lambda)$ is FAS of the relevant Lax pair.

A next important step was that they devised a method of deriving a special class of singular solutions to the RHP. Today it is known as the Zakharov-Shabat dressing method [37], [38], [31]. It has several formulations and is one of the best known methods for constructing the multi-soliton solutions of the integrable nonlinear linear evolution equation. Later Shabat's results were generalized to the class of Lax operators whose potentials Q and J take values in simple Lie algebras $\mathfrak{g}$ [10].

A further progress in this direction was made by Beals and Coifman [2] who treated the general case of $n \times n$ Lax operators with a complex-valued J. The substantial difference from the Shabat's case was that the continuous spectrum of L filled up a set of rays l_p, which splitted the complex λ-plane $\mathbb{C}$ into several sectors Ω_p. In each of these sectors, Beals and Coifman succeeded to construct FAS $\xi_p(x, \lambda)$. Let us assume that the sectors Ω_p and Ω_s share the ray l_p, then we have a set of relations like

$$\xi_p(x, t, \lambda) = \xi_s(x, t, \lambda) G_p(x, t, \lambda), \quad G_p(x, t, \lambda) = e^{-i\lambda J x} G_{p0}(t, \lambda) e^{i\lambda J x},$$

where $l_p = \Omega_p \cap \Omega_s$, $p = 1, 2, \dots$, which is a generalized RHP. Zakharov-Shabat theorem mentioned above and the dressing method can easily be extended to such generalized RHP. And of course, the results of Beals and Coifman were generalized also to the case when $Q(x, t)$ and J took values in any simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ [23], [22], [21].

Let us also mention briefly how the analyticity properties of $\xi_\nu(x, t, \lambda)$ are proved. Since $\chi_\nu(x, t, \lambda)$ are fundamental solutions of the above operators L and M, then $\xi_\nu(x, t, \lambda)$ are fundamental solutions of the related operators:

$$\begin{aligned} \tilde{L}\chi_\nu &\equiv i\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x} + Q(x, t)\xi_\nu(x, t, \lambda) - \lambda[J, \xi_\nu] = 0, \\ \tilde{M}\chi_\nu &\equiv i\frac{\partial \xi_\nu}{\partial t} + V(x, t, \lambda)\xi_\nu(x, t, \lambda) - \lambda^3[K, \xi_\nu] = 0, \qquad V(x, t, \lambda) = \sum_{p=0}^{2} V_p(x, t)\lambda^p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

We already made special choices for both $Q(x, t)$ and J using two different specific gradings of $A_5 \simeq sl(6)$. Each of these choices can be viewed as a realization of Mikhailov reduction group

$\mathbb{Z}_h$ [27]:

$$C(Q(x,t) - \lambda J) = Q(x,t) - \lambda\omega J, \qquad C(V(x,t,\lambda) - \lambda^3 K) = V(x,t,\lambda\omega) - \lambda^3\omega^3 K, \tag{3.4}$$

with a properly chosen Coxeter automorphism C such that $C^h = \mathbb{1}$ and h is the Coxeter number. In other words, the Lax pairs with $\mathbb{Z}_h$ reductions of Mikhailov type [27] provide an important class of Lax operators with complex-valued J. It is also natural to recall that in fact the potentials $Q(x,t) - \lambda J$ and $V(x,t,\lambda) - \lambda^3 K$ of these Lax pairs take values in a Kac-Moody algebras, which are based on the simple Lie algebras graded by Coxeter automorphisms [3], [6], [5], [25], [4].

The derivation of the FAS of equation (3.3) is based on the set of integral equations which incorporate also the asymptotic behavior of $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ as $x \to \pm\infty$. These equations have the form, see [2], [23], [22], [21]:

$$\begin{aligned}(\xi_\nu(x,t,\lambda))_{kj} =& \delta_{kj} + i\int_{-\infty}^{x} dy\ \left(Q(y,t)\xi_\nu(y,t,\lambda)\right)_{kj} e^{-i\lambda(J_k - J_j)(x-y)},\\ &\text{for}\quad \lambda\in\Omega_\nu \quad\text{and}\quad \operatorname{Im}\lambda(J_k - J_j) \underset{\nu}{\leqslant} 0,\\ (\xi_\nu(x,t,\lambda))_{kj} =& i\int_{\infty}^{x} dy\ \left(Q(y,t)\xi_\nu(y,t,\lambda)\right)_{kj} e^{-i\lambda(J_k - J_j)(x-y)},\\ &\text{for}\quad \lambda\in\Omega_\nu \quad\text{and}\quad \operatorname{Im}\lambda(J_k - J_j) \underset{\nu}{>} 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

where the index ν in the inequalities in (3.5) means that we restrict $\lambda \in \Omega_\nu$.

Roughly speaking, our first task in analyzing the integral equations (3.5) is to determine the lines in the complex λ-plane, on which the exponential factors in the integrands oscillate. Normally these lines constitute the continuous spectrum of $\tilde{L}$. They would be determined by $\operatorname{Im}\lambda(J_k - J_j) = 0$, which can be written in the form:

$$\operatorname{Im}\lambda\alpha(J) = 0, \tag{3.6}$$

where $\alpha = e_k - e_j$ is a root of A_5. The set of equations (3.6), where α runs over the root system Δ of A_5, are simple algebraic equations. Their solutions are collected in Table 1 for $A_5^{(1)}$ and in Table 3 for $A_5^{(2)}$. Thus, we establish that the continuous spectrum of $\tilde{L}$ fills up all rays $l_\nu \equiv \arg\lambda = \nu\pi/h$, $\nu = 0, 1, \dots, 2h-1$.

Lemma 3.1. *To each pair of rays $l_\nu \cup l_{2h-\nu}$ there corresponds a subalgebra $\mathfrak{g}_\nu \subset sl(6)$, which in the case of $A_5^{(1)}$ is isomorphic either to $sl(2)\oplus sl(2)$ or to $sl(2)\oplus sl(2)\oplus sl(2)$. In the case of $A_5^{(2)}$ it is isomorphic either to $sl(2)\oplus sl(2)$ or to $sl(2)$.*

Доказательство. It is obvious that if α is a solution to equation (3.6), then $-\alpha$ is also a solution. It remains to confirm that any two non-proportional roots related to each pair of rays $l_\nu \cup l_{2h-\nu}$ are mutually orthogonal. Inspecting Table 1, we prove the lemma for $A_5^{(1)}$. Similarly, inspecting Table 3, we prove the lemma for $A_5^{(2)}$. The proof is complete. □

Theorem 3.1. *The solution $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ of eq. (3.5) is an analytic function of λ for $\lambda\in\Omega_\nu$. In addition,*

$$C(\xi_\nu(x,t,\lambda)) = \xi_{\nu+2}(x,t,\lambda\omega). \tag{3.7}$$

Idea of the proof. The solutions of the conditions $\operatorname{Im}\lambda(J_k - J_j) \underset{\nu}{\leqslant} 0$ for $\lambda\in\Omega_\nu$ in the case of $A_5^{(1)}$ are listed in Table 2 as the subsets δ_ν^+. All other roots of A_5 for $\lambda\in\Omega_\nu$ satisfy the condition $\operatorname{Im}\lambda(J_k - J_j) \underset{\nu}{>} 0$. As a result, it is easy to see that the exponential factors in equation (3.5) decrease exponentially for all x and $\lambda\in\Omega_p$. In particular, this means that the integrals converge for each $\lambda\in\Omega_\nu$, which guarantees the existence of $\xi_\nu(x,t,\lambda)$.

Let us now consider the integral equations for the derivatives $\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\xi_\nu(x,t,\lambda)$. The integrands of these equations will contain, besides the exponential factors, also polynomial factors in x

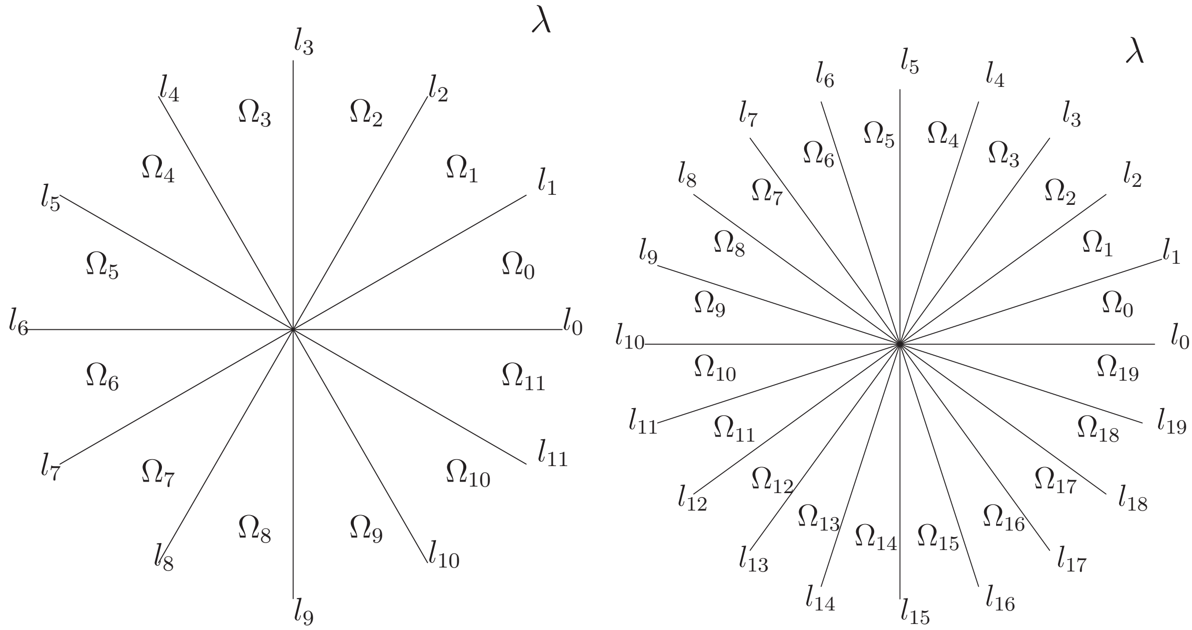

Рис. 1: Continuous spectrum of the Lax operators and contours of the RHP for $A_5^{(1)}$ (left panel) and $A_5^{(2)}$ (right panel).

l_ν	$l_0 \cup l_6$	$l_1 \cup l_7$
α	$\pm(e_1 - e_4), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_5 - e_6)$	$\pm(e_1 - e_3), \pm(e_4 - e_6)$
l_ν	$l_2 \cup l_8$	$l_3 \cup l_9$
α	$\pm(e_1 - e_2), \pm(e_3 - e_6), \pm(e_4 - e_5)$	$\pm(e_2 - e_6), \pm(e_3 - e_5)$
l_ν	$l_4 \cup l_{10}$	$l_5 \cup l_{11}$
α	$\pm(e_1 - e_6), \pm(e_2 - e_5), \pm(e_3 - e_4)$	$\pm(e_1 - e_5), \pm(e_2 - e_4)$

Таблица 1: The roots of $A_5^{(1)}$ related to the rays l_ν, $\nu = 0, \dots, 11$, see the left panel of Figure 1.

and y of order s. Again the decaying exponential factors ensure the convergence of the integrals in the right hand side, which means that $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ possesses the derivatives of all orders with respect to λ in the sector Ω_ν. This is one of the basic properties of the analytic functions.

Finally, equation (3.7) follows directly from Mikhailov reduction condition (3.4). □

The corresponding generalized RHP can be written as follows:

$$\xi_\nu(x,t,\lambda) = \xi_{\nu-1}(x,t,\lambda) G_\nu(x,t,\lambda), \qquad G_\nu(x,t,\lambda) = e^{-i\lambda Jx} G_{\nu 0}(t,\lambda) e^{i\lambda Jx}, \tag{3.8}$$

where $\lambda \in l_\nu$ and the rays l_ν are determined as $\arg\lambda = \nu\pi/h$, $\nu = 0, \dots 2h-1$, and h is the Coxeter number. The sector Ω_ν is determined by the rays l_ν and $l_{\nu+1}$, see Figure 1. In fact, A.V. Mikhailov, developing his ideas on the reduction groups in [27], came very close to such formulation of the RHP.

Remark 3.1. *For technical reasons in Tables 3 and 4 we list the roots of A_5. Their root vectors E_{ij} can easily be expressed in terms of the root vectors of $A_5^{(2)}$ taking into account the*

Ω_ν	δ_ν^+	δ_ν^-
Ω_0	$(e_1-e_4),(e_2-e_3),-(e_5-e_6)$	$(e_1-e_5),(e_2-e_4)$
Ω_1	$(e_1-e_5),(e_2-e_4)$	$(e_1-e_6),(e_2-e_5),(e_3-e_4)$
Ω_2	$(e_1-e_6),(e_2-e_5),(e_3-e_4)$	$(e_2-e_6),(e_3-e_5)$
Ω_3	$(e_2-e_6),(e_3-e_5)$	$-(e_1-e_2),(e_3-e_6),(e_4-e_5)$
Ω_4	$-(e_1-e_2),(e_3-e_6),(e_4-e_5)$	$-(e_1-e_3),(e_4-e_6)$
Ω_5	$-(e_2-e_3),(e_4-e_6)$	$-(e_2-e_3),(e_5-e_6),-(e_1-e_4)$

Таблица 2: The root subsystems $\delta_\nu^\pm$ of $A_5^{(1)}$ related to the sectors Ω_ν, $\nu=0,\dots,11$, see the left panel of Figure 1.

l_ν	$l_0\cup l_{10}$	$l_1\cup l_{11}$	$l_2\cup l_{12}$	$l_3\cup l_{13}$
α	$\pm(e_3-e_4)$	$\pm(e_1-e_2),\pm(e_3-e_5)$	$\pm(e_4-e_5)$	$\pm(e_2-e_5),\pm(e_3-e_6)$
l_ν	$l_4\cup l_{14}$	$l_5\cup l_{15}$	$l_6\cup l_{16}$	$l_7\cup l_{17}$
α	$\pm(e_2-e_4)$	$\pm(e_1-e_5),\pm(e_2-e_6)$	$\pm(e_4-e_6)$	$\pm(e_1-e_6),\pm(e_2-e_3)$
l_ν	$l_8\cup l_{18}$	$l_9\cup l_{19}$		
α	$\pm(e_1-e_4)$	$\pm(e_1-e_3),\pm(e_5-e_6)$		

Таблица 3: The roots of A_5 related to the rays l_ν, $\nu=0,\dots,19$ with $J=\operatorname{diag}(\omega_2,\omega_2^3,-1,0,\omega_2^9,\omega_2^7)$, see the right panel of Figure 1 and Remark 3.1.

Ω_ν	δ_ν^+	δ_ν^-	Ω_ν	δ_ν^+	δ_ν^-
Ω_0	(e_1-e_4)	$-(e_1-e_3),-(e_5-e_6)$	Ω_1	$(e_1-e_5),(e_2-e_4)$	$-(e_1-e_4)$
Ω_2	$-(e_1-e_4)$	$-(e_1-e_6),-(e_2-e_3)$	Ω_3	$-(e_1-e_6),-(e_2-e_3)$	$-(e_4-e_6)$
Ω_4	$-(e_4-e_6)$	$-(e_1-e_5),-(e_2-e_6)$	Ω_5	$-(e_1-e_5),-(e_2-e_6)$	$-(e_2-e_4)$
Ω_6	$-(e_2-e_4)$	$-(e_2-e_5),-(e_3-e_6)$	Ω_7	$-(e_2-e_5),-(e_3-e_6)$	$-(e_4-e_5)$
Ω_8	$-(e_4-e_5)$	$(e_1-e_2),-(e_3-e_5)$	Ω_9	$(e_1-e_2),-(e_3-e_5)$	$-(e_3-e_4)$

Таблица 4: The root subsystems $\delta_\nu^\pm$ of A_5 related to the sectors Ω_ν, $\nu=0,\dots,9$, see the left panel of Figure 1 and Remark 3.1.

relations (B.1) from Appendix B. Indeed,

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{+}+\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{-}),\qquad E_{i\bar{j}}=\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{+}-\tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{-}),\qquad E_{j\bar{j}}=\tilde{\mathcal{E}}_{j\bar{j}}^{+},$$

where $1\leqslant i<j\leqslant 3$ *and* $\bar{k}=7-k$.

It is obvious that all the information about the scattering data of L (or $\tilde{L}$) is hidden in the sewing functions $G_\nu(x,t,\lambda)$. For the Lax operators we are considering it is not possible to introduce Jost solutions without imposing additional severe restrictions on $Q(x,t)$, such as tending to 0 as $x\to\pm\infty$ faster than each exponential $e^{-c|x|}$ for each positive c, or even assuming that $Q(x,t)$ has a compact support. However, we can use the limits of $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ as $x\to\pm\infty$

and $\lambda \in l_\nu$. They are given by [22], [21]:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} e^{i\lambda Jx}\chi_\nu(x,t,\lambda) = S_\nu^+(t,\lambda), && \lambda \in l_\nu e^{i0},\\
&\lim_{x\to\infty} e^{i\lambda Jx}\chi_\nu(x,t,\lambda) = T_\nu^-(t,\lambda)D_\nu^+(\lambda), && \lambda \in l_\nu e^{i0},\\
&\lim_{x\to-\infty} e^{i\lambda Jx}\chi_{\nu-1}(x,t,\lambda) = S_\nu^-(t,\lambda), && \lambda \in l_\nu e^{-i0},\\
&\lim_{x\to\infty} e^{i\lambda Jx}\chi_{\nu-1}(x,t,\lambda) = T_\nu^+(t,\lambda)D_\nu^-(\lambda), && \lambda \in l_\nu e^{-i0},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

where $\nu = 0, 1, \dots, 2h-1$ and $S_\nu^\pm$, $T_\nu^\pm$ and $D_\nu^\pm$ are of the form

$$\begin{aligned}
S_\nu^\pm(\lambda) =& \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu^+} s_\alpha^\pm(\lambda)E_{\pm\alpha}\right),\\
T_\nu^\pm(\lambda) =& \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu^+} \tau_\alpha^\pm(\lambda)E_{\pm\alpha}\right),\\
D_\nu^\pm(\lambda) =& \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu^+} d_{\nu,\alpha}^\pm(\lambda)H_\alpha\right).
\end{aligned}$$

Remark 3.2. *Formally one can introduce an analogue of the scattering matrix for each pair of rays $l_\nu \cup l_{h+\nu}$ as follows:*

$$T_\nu(t,\lambda) = T_\nu^-(t,\lambda)D_\nu^+(\lambda)\hat{S}_\nu^+(t,\lambda) = T_\nu^+(t,\lambda)D_\nu^-(\lambda)\hat{S}_\nu^-(t,\lambda), \qquad \lambda \in l_\nu. \tag{3.10}$$

Note that $T_\nu(t,\lambda)$ belongs to the subgroup $\mathcal{G}_\nu \subset SL(6)$ whose root system is $\delta_\nu^+ \cup \delta_\nu^-$. Then $T_\nu^\pm(t,\lambda)$, $S_\nu^\pm(t,\lambda)$ and $D_\nu^\pm(\lambda)$ can be regarded as the Gauss factors of $T_\nu(t,\lambda)$. Another peculiar fact is that to each sector Ω_ν we relate a specific ordering of the root systems, i.e. specific choice of the positive and negative roots, see [22], [21].

Lemma 3.2. *i) The t-dependence of the scattering data for the mKdV equations is given by:*

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial T_\nu^\pm}{\partial t} - \lambda^3[K, T_\nu^\pm(t,\lambda)] =& 0, & i\frac{\partial S_\nu^\pm}{\partial t} - \lambda^3[K, S_\nu^\pm(t,\lambda)] =& 0,\\
i\frac{\partial D_\nu^\pm}{\partial t} =& 0, & i\frac{\partial T_\nu}{\partial t} - \lambda^3[K, T_\nu(t,\lambda)] =& 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ii) The function $D_\nu^+(\lambda)$ (respectively, $D_\nu^-(\lambda)$) is analytic in $\lambda \in \Omega_\nu$ (respectively, in $\lambda \in \Omega_{\nu-1}$). They are generating functionals of the integrals of motion for the mKdV hierarchy.

Доказательство. i) We multiply the second equation in (3.3) by $e^{i\lambda Jx}$ and take the limits for $x \to \infty$ and $x \to -\infty$. Takin into account equation (3.9) and the fact that $Q(x,t)$ and $V(x,t,\lambda)$ vanish fast enough as $x \to \pm\infty$, we easily obtain the equations (3.11).

ii) The analyticity properties of $D_\nu^\pm(\lambda)$ were proven in [21] for generic Kac-Moody algebras. As generating functionals of the integrals of motion, it is more convenient to consider $d_{\nu,\alpha}^\pm(\lambda)$. Their asymptotic expansions

$$d_{\nu,\alpha}^\pm(\lambda) = \sum_{p=1}^\infty \lambda^{-p} I_{\nu,\alpha}^{(p)}$$

provide integrals of motion $I_{\nu,\alpha}^{(p)}$ whose densities are local in $Q(x,t)$, i.e. depend only on $Q(x,t)$ and its x-derivatives. The proof is complete. □

4. Minimal set of scattering data

Here we reformulate the basic results of [22], [21] for the specific Kac-Moody algebras used above. It is natural to expect that these sets are expressed in terms of the sewing functions of the RHP. Our considerations are relevant only for the cases when the solution of the RHP is regular. This means that the spectra of the corresponding Lax operators contain no discrete eigenvalues.

4.1. The $A_5^{(1)}$ case. We introduce two minimal sets of scattering data for the $A_5^{(1)}$ Kac-Moody algebra as follows, see Table 2:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &\equiv \{s^{\pm}_{0;\alpha}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_0^+,\ \lambda\in l_0\}\cup\{s^{\pm}_{1;\alpha}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_1^+,\ \lambda\in l_1\},\\ \mathcal{T}_2 &\equiv \{\tau^{\pm}_{0;\alpha}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_0^+,\ \lambda\in l_0\}\cup\{\tau^{\pm}_{1;\alpha}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_1^+,\ \lambda\in l_1\}. \end{aligned}$$

Theorem 4.1. *Assume that the potential of the Lax operator (2.1) $Q(x,t)$ is a Schwartz-type function of x and is such that the corresponding RHP is regular. Then each of the minimal sets $\mathcal{T}_i$, $i=1,2$ determines uniquely:*
i) all sewing functions $G_\nu(x,t,\lambda)$ for $\nu=0,1,\dots,11$;
ii) all scattering matrices T_ν, $\nu=0,1,\dots,11$;
iii) $\mathcal{T}_1\simeq\mathcal{T}_2$;
iv) the potential $Q(x,t)$.

Idea of the proof. The fact that the solution of the RHP is regular means that the corresponding Lax operator L has no discrete eigenvalues. In other words, the functions $D_\nu^\pm(\lambda)$ have neither zeroes nor poles in their regions of analyticity.

i) Let us now demonstrate that the sets $\mathcal{T}_k$, $k=0,1$ allow us to construct all $S_\nu^\pm(\lambda,t)$ and $T_\nu^\pm(\lambda,t)$. It is obvious that

$$\begin{aligned} S_0^\pm &=\exp\left(s^{\pm}_{0;14}E_{\pm(e_1-e_4)}+s^{\pm}_{0;23}E_{\pm(e_2-e_3)}+s^{\pm}_{0;56}E_{\mp(e_5-e_6)}\right),\\ T_0^\pm &=\exp\left(\tau^{\pm}_{0;14}E_{\pm(e_1-e_4)}+\tau^{\pm}_{0;23}E_{\pm(e_2-e_3)}+\tau^{\pm}_{0;56}E_{\mp(e_5-e_6)}\right),\\ S_1^\pm &=\exp\left(s^{\pm}_{1;13}E_{\pm(e_1-e_3)}+s^{\pm}_{1;46}E_{\pm(e_4-e_6)}\right),\\ T_1^\pm &=\exp\left(\tau^{\pm}_{1;13}E_{\pm(e_1-e_3)}+\tau^{\pm}_{1;46}E_{\pm(e_4-e_6)}\right). \end{aligned}$$

Note that the reduction condition (3.7) on the FAS reflects also on their asymptotics for $x\to\pm\infty$ as follows:

$$\begin{aligned} C^\nu(S_0^\pm(x,t,\lambda)) &=S^\pm_{2\nu}(x,t,\lambda\omega^\nu), & C^\nu(S_1^\pm(x,t,\lambda)) &=S^\pm_{2\nu+1}(x,t,\lambda\omega^\nu),\\ C^\nu(T_0^\pm(x,t,\lambda)) &=T^\pm_{2\nu}(x,t,\lambda\omega^\nu), & C^\nu(T_1^\pm(x,t,\lambda)) &=T^\pm_{2\nu+1}(x,t,\lambda\omega^\nu), \end{aligned}$$

for $\nu=0,1\dots,11$. Thus, we have recovered all $S_\nu^\pm(\lambda,t)$ and $T_\nu^\pm(\lambda,t)$.

ii) It remains to recover $D_\nu^+(\lambda)$ and $D_\nu^-(\lambda)$ (or $d^\pm_{\nu,\alpha}(\lambda)$) using the fact that they are analytic functions of λ in the sector Ω_ν and $\Omega_{\nu-1}$, respectively. In addition, it follows from equation (3.10) that

$$\begin{aligned} d^+_{\nu;\alpha}-d^-_{\nu;\alpha} &=\ln\,(1-s^+_{\nu,\alpha}s^-_{\nu,-\alpha}), & \lambda &\in l_\nu, & \alpha &\in\delta_\nu^+,\\ d^+_{\nu;\alpha}-d^-_{\nu;\alpha} &=\ln\,(1-\tau^+_{\nu,\alpha}\tau^-_{\nu,\alpha}), & \lambda &\in l_\nu, & \alpha &\in\delta_\nu^+, \end{aligned}$$

for $\nu=0,1\dots,11$, which follow from eqs. (3.10). In particular for $k=0,1$:

$$\begin{aligned} d^+_{0;\alpha}-d^-_{0;\alpha} &=\ln\,(1-s^+_{0,\alpha}s^-_{0,-\alpha}), & \lambda &\in l_0, & \alpha &\in\{e_1-e_4,e_2-e_3,-(e_5-e_6)\},\\ d^+_{1;\alpha}-d^-_{1;\alpha} &=\ln\,(1-s^+_{1,\alpha}s^-_{1,\alpha}), & \lambda &\in l_1, & \alpha &\in\{e_1-e_3,e_4-e_6\}, \end{aligned}$$

and similar expressions in terms of $\tau^+_{k,\alpha}$ and $\tau^-_{k,-\alpha}$, $k=0,1$.

iii) Comparing the asymptotics (3.9) of the FAS for $x \to \pm\infty$ we easily find that the sewing functions $G_{\nu,0}$ in (3.8) are given by:

$$G_{k,0}(\lambda,t) = \hat{S}_k^-(\lambda,t)S_k^+(\lambda,t) = \hat{D}_k^-(\lambda)\hat{T}_k^+(\lambda,t)T_k^-(\lambda,t)D_k^+(\lambda), \qquad \lambda \in l_k,\ k = 0,1.$$

Thus we know the left hand side of the relation:

$$D_k^-(\lambda)G_{k,0}(\lambda,t)\hat{D}_k^+(\lambda,t) = \hat{T}_k^+(\lambda,t)T_k^-(\lambda,t), \qquad k = 0,1, \tag{4.1}$$

and the construction of $T_k^{\pm}(\lambda,t)$ reduces to decomposing the left hand side of (4.1) into Gauss factors, which has unique solution. This means that knowing $\mathcal{T}_1$ we can recover $\mathcal{T}_2$. Quite analogously one can prove that knowing $\mathcal{T}_2$ we can uniquely recover $\mathcal{T}_1$.

iv) The RHP has unique regular solution. Suppose we have constructed the solution $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ in the sector Ω_ν. Then we recover the potential from the well known relation:

$$Q(x,t) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left(J - \xi_\nu J \xi_\nu^{-1}(x,t,\lambda)\right).$$

This result is independent of ν due to reduction condition (3.4) and to the fact that $C(Q(x,t)) = Q(x,t)$.

□

4.2. The $A_5^{(2)}$ case. We introduce two minimal sets of scattering data for the $A_5^{(2)}$ Kac-Moody algebra as follows, see Table 4:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &\equiv \{s_{0;\alpha}^{\pm}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_0^+,\ \lambda\in l_0\} \cup \{s_{1;\alpha}^{\pm}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_1^+,\ \lambda\in l_1\},\\
\mathcal{T}_2 &\equiv \{\tau_{0;\alpha}^{\pm}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_0^+,\ \lambda\in l_0\} \cup \{\tau_{1;\alpha}^{\pm}(\lambda,t), \quad \alpha\in\delta_1^+,\ \lambda\in l_1\}.
\end{aligned}$$

Theorem 4.2. *Assume that the potential $Q(x,t)$ in Lax operator (2.1) is a Schwartz-type function of x and is such that the corresponding RHP is regular. Then each of the minimal sets $\mathcal{T}_i$, $i = 1,2$ determines uniquely:*

i) all sewing functions $G_\nu(x,t,\lambda)$ for $\nu = 0,1,\dots,19$;
ii) all scattering matrices T_ν, $\nu = 0,1,\dots,19$;
iii) $\mathcal{T}_1 \simeq \mathcal{T}_2$;
iv) the potential $Q(x,t)$.

Idea of the proof. The fact that the solution of the RHP is regular means that the corresponding Lax operator L has no discrete eigenvalues. In other words, the functions $D_\nu^{\pm}(\lambda)$ have neither zeroes nor poles in their regions of analyticity.

i) Let us now demonstrate that the sets $\mathcal{T}_k$, $k = 0,1$ allow us to construct all $S_\nu^{\pm}(\lambda,t)$ and $T_\nu^{\pm}(\lambda,t)$. It is obvious that

$$\begin{aligned}
S_0^{\pm} &= \exp\left(s_{0;14}^{\pm}E_{\pm(e_1-e_4)}\right),\\
T_0^{\pm} &= \exp\left(\tau_{0;14}^{\pm}E_{\pm(e_1-e_4)}\right),\\
S_1^{\pm} &= \exp\left(s_{1;15}^{\pm}E_{\pm(e_1-e_5)} + s_{1;24}^{\pm}E_{\pm(e_2-e_4)}\right),\\
T_1^{\pm} &= \exp\left(\tau_{1;15}^{\pm}E_{\pm(e_1-e_5)} + \tau_{1;24}^{\pm}E_{\pm(e_2-e_4)}\right).
\end{aligned}$$

Note that the reduction condition (3.7) on the FAS reflects also on their asymptotics for $x \to \pm\infty$ as follows:

$$\begin{aligned}
C^\nu(S_0^{\pm}(x,t,\lambda)) &= S_{2\nu}^{\pm}(x,t,\lambda\omega^\nu), & C^\nu(S_1^{\pm}(x,t,\lambda)) &= S_{2\nu+1}^{\pm}(x,t,\lambda\omega^\nu),\\
C^\nu(T_0^{\pm}(x,t,\lambda)) &= T_{2\nu}^{\pm}(x,t,\lambda\omega^\nu), & C^\nu(T_1^{\pm}(x,t,\lambda)) &= T_{2\nu+1}^{\pm}(x,t,\lambda\omega^\nu),
\end{aligned}$$

for $\nu = 0,1\dots,19$. Thus, we have recovered all $S_\nu^{\pm}(\lambda,t)$ and $T_\nu^{\pm}(\lambda,t)$.

ii) It remains to recover $D_\nu^+(\lambda)$ and $D_\nu^-(\lambda)$ (or $d^\pm_{\nu,\alpha}(\lambda)$) using the fact that they are analytic functions of λ in the sector Ω_ν and $\Omega_{\nu-1}$ respectively. In addition, it follows from from equation (3.10) that (see Table 4)

$$\begin{aligned} d^+_{\nu;\alpha} - d^-_{\nu;\alpha} &= \ln\left(1 - s^+_{\nu,\alpha} s^-_{\nu,-\alpha}\right), && \lambda \in l_\nu, && \alpha \in \delta^+_\nu, \\ d^+_{\nu;\alpha} - d^-_{\nu;\alpha} &= \ln\left(1 - \tau^+_{\nu,\alpha} \tau^-_{\nu,\alpha}\right), && \lambda \in l_\nu, && \alpha \in \delta^+_\nu, \end{aligned}$$

for $\nu = 0, 1 \dots, 19$, which follow from equations (3.10). In particular, for $k = 0, 1$ we have:

$$\begin{aligned} d^+_{0;\alpha} - d^-_{0;\alpha} &= \ln\left(1 - s^+_{0,\alpha} s^-_{0,-\alpha}\right), && \lambda \in l_0, && \alpha \in \{e_1 - e_4\}, \\ d^+_{1;\alpha} - d^-_{1;\alpha} &= \ln\left(1 - s^+_{1,\alpha} s^-_{1,\alpha}\right), && \lambda \in l_1, && \alpha \in \{e_1 - e_5, e_2 - e_4\}, \end{aligned}$$

and similar expressions in terms of $\tau^+_{k,\alpha}$ and $\tau^-_{k,-\alpha}$, $k = 0, 1$.

iii) Comparing asymptotics (3.9) of the FAS for $x \to \pm\infty$ we easily find that the sewing functions $G_{\nu,0}$ in (3.8) are

$$G_{k,0}(\lambda, t) = \hat{S}^-_k(\lambda, t) S^+_k(\lambda, t) = \hat{D}^-_k(\lambda) \hat{T}^+_k(\lambda, t) T^-_k(\lambda, t) D^+_k(\lambda), \quad \lambda \in l_k, \quad k = 0, 1.$$

Thus we know the left hand side in the relation

$$D^-_k(\lambda) G_{k,0}(\lambda, t) \hat{D}^+_k(\lambda, t) = \hat{T}^+_k(\lambda, t) T^-_k(\lambda, t), \qquad k = 0, 1, \tag{4.2}$$

and the construction of $T^\pm_k(\lambda, t)$ is reduced to decomposing the left hand side of (4.2) into Gauss factors, which has a unique solution. This means that knowing $\mathcal{T}_1$ we can recover $\mathcal{T}_2$. Quite analogously one can prove that knowing $\mathcal{T}_2$ we can uniquely recover $\mathcal{T}_1$.

iv) The RHP has unique regular solution. Suppose we have constructed the solution $\xi_\nu(x, t, \lambda)$ in the sector Ω_ν. Then we recover the potential from the well known relation

$$Q(x, t) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left(J - \xi_\nu J \xi_\nu^{-1}(x, t, \lambda) \right).$$

This result is independent on ν due to reduction condition (3.4) and to the fact that $C(Q(x, t)) = Q(x, t)$.

□

5. Discussion and conclusions

We specified in [13] the choice od the corresponding Kac-Moody algebras and formulated the specific Lax operators and the corresponding direct and scattering problems. In each of the cases one needs to take into account specific peculiarities. For example, in the case of $A_5^{(2)}$, after taking the average on the Coxeter automorphism, the elements $B[2k-1, 4]$ belong to the center of the algebra instead to its Cartan subalgebra.

The constructions that we outlined allow one to apply the dressing Zakharov-Shabat method and derive the soliton solutions of the corresponding mKdV and 2-dimensional Toda field theories. One may expect additional difficulties in this, due to the fact that the Coxeter symmetries require that even the simplest dressing factors must contain at leat $2h$ simple poles (that is, 12 and 20 poles) whose residues P_k must be related by the Coxeter automorphism. Therefore, it is important that deriving the projectors we must strictly stick to the construction of the FAS in each of the sectors of analyticity.

The main ideas in this and many previous publications of the author, see e.g. [8], [9], [10]) are based on the notion of fundamental analytic solution introduced by A.B. Shabat [32], [33].

Another important trend started by A.B. Shabat and his collaborators concerns the classification of the integrable NLEE, see [28], [34], [36], [1], [35], [29], [30] and the numerous references therein. The idea is based on the theorem that if a given nonlinear evolution equation possesses a master symmetry, then it has an infinite number of integrals of motion and therefore, it should be integrable.

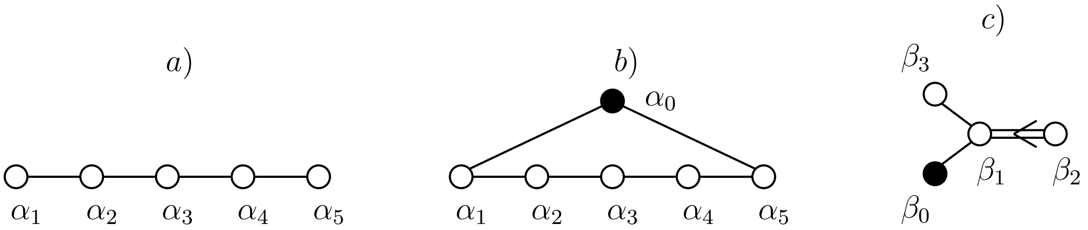

Рис. 2: Dynkin diagrams (DD) of A_5 and related Kac-Moody algebras:
a) DD of $A_5 \simeq sl(6)$; b) extended DD of A_5; c) DD of $A_5^{(2)}$.

The final remark here concerns the fact that the one-to-one correspondence between the minimal sets of scattering data and the potential $Q(x,t)$ follows also from the expansions over the squared solutions of L, see [8], [10], [9], [22], [21]. These ideas will be published elsewhere.

Acknowledgements

I am grateful to Dr. Alexander Stefanov and Dr. Stanislav Varbev for useful discussions.

A. Basis and grading of $A_5^{(1)}$

The rank of the algebra $A_5^{(1)} \simeq sl(6)$ is 5, the Coxeter number is $h = 6$ and its exponents are 1, 2, 3, 4, 5. The root system and the set of simple roots α_j of $A_5^{(1)} \simeq sl(6)$ are

$$\begin{aligned} \Delta \equiv& \Delta^+ \cup \Delta^-, \qquad \Delta^\pm \equiv \{\pm(e_j - e_k), \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 6\}, \\ \alpha_j =& e_j - e_{j+1}, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

The Cartan-Weyl basis of $A_5^{(1)}$ in the typical representation is as follows:

$$\begin{gathered} H_{e_j - e_k} = E_{jj} - E_{kk}, \qquad E_{e_j - e_k} = E_{jk}, \qquad E_{-\alpha} = E_\alpha^T, \\ [H_\alpha, E_\beta] = (\alpha, \beta) E_\beta, \quad [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{gathered}$$

The numbers $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$ are non-vanishing if and only if $\alpha + \beta \in \Delta$.

The Dynkin diagram of A_5 algebra and the extended Dynkin diagrams of $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ are shown in Figure 2.

Let us now briefly outline how to define Kac-Moody algebra starting from a simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ which in our case is chosen to be $A_5 \simeq sl(6)$. First we use a Coxeter automorphism to introduce a grading in the Lie algebra A_5:

$$\mathfrak{g} = \mathop{\oplus}_{k=0}^{5} \mathfrak{g}^{(k)}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}} = \mathop{\oplus}_{s=0}^{5} \tilde{\mathfrak{g}}_s,$$

where the linear subspaces are such that

$$C_1 X C_1^{-1} = \omega_1^{-k} X, \quad X \in \mathfrak{g}^{(k)}, \qquad \tilde{C}_1 Y \tilde{C}_1^{-1} = \omega^{-s} Y, \quad Y \in \tilde{\mathfrak{g}}_s,$$

where $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{6}}$. Each of the gradings satisfies

$$[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(m)}] \in \mathfrak{g}^{(k+m)}, \qquad [\tilde{\mathfrak{g}}_s, \tilde{\mathfrak{g}}_p] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{s+p}, \tag{A.1}$$

where $(k+m)$ and $(s+p)$ are understood modulo 6. The indices for $A_5^{(1)}$ are everywhere taken modulo 6. Using this grading, we can now construct polynomials in λ and λ^{-1} such that

$$X(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{N} \lambda^s X_s, \qquad X_s \in \mathfrak{g}^{(s)}, \tag{A.2}$$

which are the elements of the Kac-Moody algebra [25], [4]. Here the upper index of the subspace s is evaluated modulo 6. Obviously the commutator of two such polynomials in λ and λ^{-1} due to the properties of grading (A.1) will again be of form (A.2). Of course, the rigorous definition of Kac-Moody algebra requires additional structures, which we do not mention now.

For the case of A_5 algebra, two different types of Coxeter's automorphisms are possible. This produces two Kac-Moody algebras $A_5^{(1)}$ with height 1 and $A_5^{(2)}$ with height 2.

There are two standard choices C_1 and $\tilde{C}_1$ for the Coxeter automorphism for the algebra $\mathfrak{g} \simeq A_5$. This is $\mathbb{Z}_6$ automorphism. With this automorphism we effectively work with Kac-Moody algebra $A_5^{(1)}$. Indeed, each of these choices satisfies $C_1^6 = \mathbb{1}$, $\tilde{C}_1^6 = \mathbb{1}$ and each of these automorphisms induces a grading in $\mathfrak{g}$.

In what follows, the choice of the automorphisms is specified by

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^5 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Obviously, $C^6 = \tilde{C}^6 = \mathbb{1}$. Below we also use also the notations $C_1 = J_1^{(0)}$ and $\tilde{C}_1 = J_0^{(1)}$ along with the more general ones $J_s^{(k)}$, which provide a convenient basis in $A_5^{(1)}$ which satisfies the above gradings, see [3], [24], [4], [25]:

$$J_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} \epsilon_{j,j+s} \omega_1^{-k(j-1)} E_{j,j+s\cdot}, \qquad \epsilon_{j,j+s} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j+s \leqslant 6 \\ -\;1 & \text{if} \quad j+k > 6. \end{cases}$$

Here 6×6 matrices E_{km} are defined as $(E_{km})_{sp} = \delta_{ks}\delta_{mp}$. The elements of this basis satisfy the commutation relations

$$\left[J_s^{(k)}, J_l^{(m)} \right] = \left(\omega_1^{-ms} - \omega_1^{-kl} \right) J_{s+l}^{(k+m)}.$$

It is also easy to confirm that

$$C_1^{-1} J_s^{(k)} C_1 = \omega_1^{-k} J_s^{(k)}, \qquad \tilde{C}_1^{-1} J_s^{(k)} \tilde{C}_1 = \omega_1^{-s} J_s^{(k)}$$

and

$$J_s^{(k)} J_p^{(m)} = \omega_1^{-sm} J_{s+p}^{(k+m)}, \qquad (J_s^{(k)})^{-1} = (J_s^{(k)})^{\dagger}.$$

Using this, the bases in each of the linear subspaces can be specified as follows

$$\mathfrak{g}^{(k)} \equiv \text{l.c.}\, \{J_s^{(k)}, \quad s = 1, \dots, 6\}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_s \equiv \text{l.c.}\, \{J_s^{(k)}, \quad k = 1, \dots, 6\}.$$

The basis that we constructed for $A_5^{(1)}$ is

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{(0)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, J_3^{(0)}, J_4^{(0)}, J_5^{(0)}\}, && \mathfrak{g}^{(1)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}, J_4^{(1)}, J_5^{(1)}, J_6^{(1)}\}, \\ &\mathfrak{g}^{(2)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}, J_4^{(2)}, J_5^{(2)}, J_6^{(2)}\}, && \mathfrak{g}^{(3)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(3)}, J_2^{(3)}, J_3^{(1)}, J_4^{(3)}, J_5^{(3)}, J_6^{(3)}\}, \\ &\mathfrak{g}^{(4)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(4)}, J_2^{(4)}, J_3^{(4)}, J_4^{(4)}, J_5^{(4)}, J_6^{(4)}\}, && \mathfrak{g}^{(5)} : \text{l.c.}\, \{J_1^{(5)}, J_2^{(5)}, J_3^{(5)}, J_4^{(5)}, J_5^{(5)}, J_6^{(5)}\}. \end{aligned}$$

B. Basis and grading of $A_5^{(2)}$

Let us now briefly outline the gradings for $A_5^{(2)}$. Now, as Coxeter automorphism, we employ $C_2 = C_1 \circ V$, which is a composition of C_1 with the external automorphism V of A_5, and V is generated by the symmetry of its Dynkin diagram. In the five-dimensional space of roots, the mapping V acts as $V : e_k \to -e_{7-k}$, $k = 1, \dots, 6$. On any of the root vectors X, V act as

$$V(X) = -S_2 X^T S_2^{-1}, \qquad S_2 = E_{1,6} - E_{2,5} + E_{3,4} - E_{4,3} + E_{5,2} - E_{6,1}.$$

Note that $S_2^{-1} = -S_2$. Obviously, V splits the Lie algebra $\mathfrak{g} \simeq A_5$ into two: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \cup \mathfrak{g}_1$, whose bases, corresponding to the positive roots, are given as follows:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^{(0)}: \quad \{\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{+}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{+}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{j\bar{j}}^{+}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3\}, \\
&\mathfrak{g}^{(1)}: \quad \{\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{-}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{-}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3\}, \\
&\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{\pm} = E_{ij} \mp (-1)^{i-j} E_{\bar{j},\bar{i}}, \qquad \tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{\pm} = E_{i\bar{j}} \pm (-1)^{i-j} E_{j,\bar{i}}, \qquad \tilde{\mathcal{E}}_{j\bar{j}}^{+} = E_{j\bar{j}}.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Here we can identify the root vectors:

$$E_{e_i-e_j}^{\pm} = \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{\pm}, \qquad E_{e_i+e_j}^{\pm} = \tilde{\mathcal{E}}_{i\bar{j}}^{\pm}, \qquad E_{2e_j}^{+} = \tilde{\mathcal{E}}_{j\bar{j}}^{+}.$$

Obviously, $E_{e_i-e_j}^{+}$, $E_{e_i+e_j}^{+}$ and $E_{2e_j}^{+}$ are the generators of $sp(6)$ corresponding to its positive roots; $E_{e_i-e_j}^{-}$ and $E_{e_i+e_j}^{-}$ provide the positive roots of $\mathfrak{g}_1$. It is easy to confirm that they satisfy standard commutation relations, taking into account the $\mathbb{Z}_2$-grading such as

$$[E_\alpha^{\pm}, E_{-\alpha}^{\pm}] = H_\alpha, \qquad [H, E_\alpha^{\pm}] = \alpha(H) E_\alpha^{\pm}, \qquad [E_\alpha^{-}, E_\beta^{-}] = n_{\alpha,\beta}^{-} E_{\alpha+\beta}^{+}, \qquad [E_\alpha^{-}, E_\beta^{+}] = n_{\alpha,\beta}^{+} E_{\alpha+\beta}^{-},$$

etc. Let us now take into account the Coxeter automorphism which is given by

$$C_2(X) = C_1 V(X) C_1^{-1} = -C_1 S_2 X^T S_2^{-1} C_1^{-1}.$$

One can check that $C_2^{10} = \mathbb{1}$, so the Coxeter number is $h_2 = 10$. This automorphism C_2 splits the roots of A_5 into three orbits each containing 10 roots. The grading condition is

$$\left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)}, \qquad k, l = 1, \dots, 10,$$

where $k+l$ is taken modulo 10. We assume that the orbits start from the root vectors E_{12}, E_{34} and E_{13}. We consider also the action of C_2 also on the Cartan generators. The basis for each of the subspaces $\mathfrak{g}^{(k)}$ is obtained by taking the weighted average over the action of C_2:

$$\mathcal{E}_{ij}^{(k)} = \sum_{s=0}^{9} \omega_2^{-ks} C_2^s(E_{ij}), \qquad \mathcal{H}_1^{(k)} = \sum_{s=0}^{9} \omega_2^{-ks} C_2^s(E_{11}), \qquad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{10}}.$$

It is easy to check that $C_2(\mathcal{E}_{ij}^{(k)}) = \omega_2^k \mathcal{E}_{ij}^{(k)}$, $C_2(\mathcal{H}_1^{(k)}) = \omega_2^k \mathcal{H}_1^{(k)}$, i.e. $\mathcal{E}_{ij}^{(k)}$ and $\mathcal{H}_1^{(k)}$ belong to $\mathfrak{g}^{(k)}$. We will provide this basis explicitly:

$$\mathcal{E}_{12}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega_2^{-3k} & 0 \\ -\omega_2^{-5k} & 0 & \omega_2^{-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2^{-7k} & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-4k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^{-8k} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-k} \\ 0 & 0 & \omega_2^{-9k} & 0 & \omega_2^{-6k} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_{34}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_2^{-6k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-8k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_2^{-k} & \omega_2^{-3k} & -\omega_2^{-5k} & 0 & \omega_2^{-9k} & -\omega_2^{-7k} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-4k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2^{-2k} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_{13}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega_2^{-k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-3k} & -\omega_2^{-2k} \\ -\omega_2^{-5k} & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{-4k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{-8k} & \omega_2^{-9k} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^{-6k} & \omega_2^{-7k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_1^{(k)} = c_{H,k} \operatorname{diag}(\omega_2^{-5k}, \omega_2^{-7k}, \omega_2^{-9k}, 0, \omega_2^{-3k}, \omega_2^{-k}),$$

where $c_{H,k} = \omega_2^{5k} - 1$. Since $\omega_2^5 = -1$ it is easy to see that $c_{H,k} \neq 0$ for $k = 1$, 3, 5, 7 and 9. Thus, the subspace $\mathfrak{g}^{(p)}$ has a nontrivial section with the Cartan subalgebra if and only if p is an exponent of $A_5^{(2)}$. It is easy to confirm that $\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{+}$ provides a basis for the subalgebra $sp(6)$ of $A_5^{(2)}$. Then the basis in each of the subspaces $\mathfrak{g}^{(k)}$ is as follows

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{g}}^{(0)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{11}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{22}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{33}^{+}\}, & \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{21}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{32}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{43}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{15}^{-}\}, \\
\tilde{\mathfrak{g}}^{(2)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{31}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{42}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{14}^{-}\}, & \tilde{\mathfrak{g}}^{(3)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{14}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{25}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{13}^{-}, \tilde{\mathcal{E}}_{24}^{-}\}, \\
\tilde{\mathfrak{g}}^{(4)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{51}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{12}^{-}, \tilde{\mathcal{E}}_{23}^{-}\}, & \tilde{\mathfrak{g}}^{(5)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{16}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{61}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{33}^{-} - \tilde{\mathcal{E}}_{11}^{-}, \tilde{\mathcal{E}}_{33}^{-} - \tilde{\mathcal{E}}_{22}^{-}\}, \\
\tilde{\mathfrak{g}}^{(6)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{15}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{21}^{-}, \tilde{\mathcal{E}}_{32}^{-}\}, & \tilde{\mathfrak{g}}^{(7)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{41}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{52}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{31}^{-}, \tilde{\mathcal{E}}_{42}^{-}\}, \\
\tilde{\mathfrak{g}}^{(8)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{13}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{24}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{41}^{-}\}, & \tilde{\mathfrak{g}}^{(9)} &= \text{l.c.}\,\{\tilde{\mathcal{E}}_{12}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{23}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{34}^{+}, \tilde{\mathcal{E}}_{51}^{-}\}.
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

As a result, the rank of $A_5^{(2)}$ is 3, $h = 10$ and its exponents are 1, 3, 5, 7, 9, see [5], [4].

An alternative grading of $A_5^{(2)}$ can be achieved by using a realization of the Coxeter automorphism as an element of the Cartan subgroup. More precisely, one can use the automorphism $\tilde{C}_2$ [5]:

$$
\tilde{C}_2(X) = -S_2 X^T S_2^{-1}, \qquad S_2 = \operatorname{diag}(1, -\omega_2, \omega_2^2, -\omega_2^3, \omega_2^4, -\omega_2^5), \qquad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{10}}, \tag{B.3}
$$

and where the transposition is taken with respect to the second diagonal of the matrix. With choice for the Coxeter automorphism, the set of admissible roots of $A_5^{(2)}$ acquires the form

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\beta_0} &= \frac{\zeta}{2}(E_{1,5} + E_{2,6}), & \mathcal{E}_{-\beta_0} &= 2(E_{5,1} + E_{6,2})\zeta^{-1}, & \mathcal{H}_{\beta_0} &= \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, \\
\mathcal{E}_{\beta_i} &= \zeta(E_{i+1,i} + E_{7-i,6-i}), & \mathcal{E}_{-\beta_i} &= (E_{i,i+1} + E_{6-i,7-i})\zeta^{-1}, & \mathcal{H}_{\beta_i} &= \mathcal{H}_{i+1} - \mathcal{H}_i, \\
\mathcal{E}_{\beta_3} &= \zeta E_{4,3}, & \mathcal{E}_{-\beta_3} &= E_{3,4}\zeta^{-1}, & \mathcal{H}_{\beta_i} &= -\mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4,
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

where $i = 1, 2$, $(E_{km})_{ab} = \delta_{ka}\delta_{mb}$ and $\mathcal{H}_1 = E_{i,i} - E_{7-i,7-i}$.

REFERENCES

1. V.E. Adler, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *Symmetry approach to the integrability problem* // Teor. Matem. Fiz. **125**:3, 355–424 (2000). [Theoret. Math. Phys. **125**:3, 1603–1661 (2000)]
2. R. Beals, R. Coifman. *Inverse scattering and evolution equations* // Comm. Pure Appl. Math. **38**:1, 29–42 (1985).
3. N. Bourbaki. *Elements de mathematique. Groupes et algebres de Lie. Chapters I–VIII.* Hermann, Paris (1960–1975).
4. R. Carter. *Lie algebras of finite and affine type.* Cambridge University Press, Cambridge (2005).
5. V.V. Drinfel'd, V.G. Sokolov. *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type.* Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennye Problemy Matematiki (Noveishie Dostizheniya) **24**, 81–180 (1984). [J. Soviet Math. **30**:2, 1975–2036 (1985).]
6. V.V. Drinfel'd, V.G. Sokolov. *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type* // J. Soviet Math. **30**:2, 1975–2036 (1985).
7. L.D. Faddeev and L.A. Takhtadjan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons.* Springer, Berlin (1987).
8. V.S. Gerdjikov. *Algebraic and analytic aspects of N-wave type equations* // in "Proceedings of an AMS-IMS-SIAM joint summer research conference", South Hadley, June 17-21, 2001. Amer. Math. Soc., Providence, RI. Contemporary Mathematics **301**, 35–68 (2002).
9. V.S. Gerdjikov. *Derivative nonlinear Schrödinger equations with $\mathbb{Z}_N$ and $\mathbb{D}_N$ reductions* // Romanian J. Phys. **58**:5–6, 573–582 (2013).
10. V.S. Gerdjikov. *Generalised Fourier transforms for the soliton equations. Gauge covariant formulation* // Inverse Probl. **2**:1, 51–74 (1986).
11. V.S. Gerdjikov. *Z_N–reductions and new integrable versions of derivative nonlinear Schrödinger equations* // in "Nonlinear evolution equations: integrability and spectral methods", Eds:

A. Degasperis, A.P. Fordy, M. Lakshmanan. Proc. Nonl. Sci. Manchester University Press, Manchester, 367–372 (1990).
12. V.S. Gerdjikov, R. Ivanov, A. Stefanov. *Riemann-Hilbert problem, integrability and reductions* // J. Geom. Mech. **11**:2, 167–185 (2019).
13. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *On the MKdV type equations related to $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$ Kac-Moody algebras* // Teor. Matem. Fiz. **207**:2, (2021), to appear. [Theor. Math. Phys. **207**:2, 237–260 (2021)].
14. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *Integrable equations and recursion operators related to the affine Lie algebras $A_r^{(1)}$* // J. Math. Phys. **56**:5, 052702 (2015).
15. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *MKdV-type of equations related to $B_2^{(1)}$ and $A_4^{(2)}$ algebra* // in "Nonlinear Mathematical Physics and Natural Hazards", Eds: B. Aneva, M. Kouteva-Guentcheva. Springer Proc. Phys, **163**, 59–69 (2015).
16. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *MKdV-type of equations related to $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ algebra* // in "Mathematics in Industry", ed. A. Slavova. Cambridge Scholar Publ. 335–344 (2014).
17. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *On a one-parameter family of mKdV equations related to the $\mathfrak{so}(8)$ Lie algebra* // in "Mathematics in Industry", ed. A. Slavova. Cambridge Scholar Publ. 345–354, (2014).
18. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev. *On mKdV equations related to the affine Kac-Moody algebra $A_5^{(2)}$* // J. Geom. Symmetry Phys. **39**, 17–31 (2015).
19. V.S. Gerdjikov, A.A. Stefanov, I.D. Iliev, G.P. Boyadjiev, A.O. Smirnov, V.B. Matveev, M.V. Pavlov. *Recursion operators and the hierarchies of MKdV equations related to $D_4^{(1)}$, $D_4^{(2)}$ and $D_4^{(3)}$ Kac-Moody algebras* // Teor. Matem. Fiz. **204**:3, 332–354 (2020). [Theor. Math. Phys. **204**:3, 1110–1129 (2020).]
20. V.S. Gerdjikov, G. Vilasi, A.B. Yanovski. *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*. Springer, Berlin (2008).
21. V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski. *CBC systems with Mikhailov reductions by Coxeter automorphism: I. Spectral theory of the tecursion operators* // Stud. Appl. Math. **134**:2, 145–180 (2015).
22. V.S. Gerdjikov, A.B Yanovski. *Completeness of the eigenfunctions for the Caudrey-Beals-Coifman system* // J. Math. Phys. **35**:7, 3687–3725 (1994).
23. V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski. *On soliton equations with $\mathbb{Z}_h$ and $\mathbb{D}_h$ reductions: conservation laws and generating operators* // J. Geom. Symmetry Phys. **31**, 57–92 (2013).
24. S. Helgasson. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, New York (1978).
25. V. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
26. D.J. Kaup, A.C. Newell, *Soliton equations, singular dispersion relations and moving eigenvalues* // Adv. Math. **31**:1, 67–100 (1979).
27. A.V. Mikhailov. *The reduction problem and the inverse scattering problem* // Physica D. **3**:1&2, 73–117 (1981).
28. A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *The symmetry approach to the classification of non-linear equations. Complete lists of integrable systems* // Uspekhi Mat. Nauk, **42**:4 (256), 3–53 (1987). [Russian Math. Surv. **42**:4, 1–63 (1987).]
29. A.V. Mikhailov, J.P. Wang, V.S. Novikov. *Partially integrable nonlinear equations with one high symmetry* // J. Phys. A, **38**:20, L337–L341 (2005).
30. A.V. Mikhailov, J.P. Wang and V.S. Novikov. *Symbolic representation and classification of integrable systems* // in "Algebraic theory of differential equations". Eds: M. MacCallum and A. Mikhailov. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 156–216 (2009).
31. S.P. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov. *Theory of solitons: the inverse scattering method.* Plenum Publishing Corp. Consultants Bureau, New York (1984).
32. A.B. Shabat. *The inverse scattering problem for a system of differential equations* // Funkts. Anal. i Prilozh. **9**:3, 75–78 (1974). [Funct. Anal. Appl. **9**:3, 244–247 (1975).]
33. A.B. Shabat. *The inverse scattering problem* // Diff. Equats. **15**:10, 1824–1834 (1979).
34. A.B. Shabat. *The infinite-dimensional dressing dynamical system* // Inverse Probl. **8**:2, 303 (1992).

35. A.B. Shabat , A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov. *The symmetry approach to classification of integrable equations* // in "What is Integrability?" Ed. V.E. Zakharov. Springer series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 115–184 (1991).
36. A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *Symmetries of nonlinear chains* // Alg. Anal. **2**:2, 183–208 (1990). [Leningrad Math. J. **2**:2, 377–400 (1991).]
37. V.E. Zakharov, A.B. Shabat. *A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I* // Funkts. Anal. Pril. **8**:3, 43–53 (1974). [Funct. Anal. Appl. **8**:3, 226–235 (1974).]
38. V.E. Zakharov, A.B. Shabat. *Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II* // Funkts. Anal. Pril. **13**:3, 13–22 (1979). [Funct. Anal. Appl. **13**:3, 166–174 (1979).]
39. A. Yanovski. *Recursion operators and expansions over adjoint solutions for the Caudrey-Beals-Coifman system with $\mathbb{Z}_p$ reductions of Mikhailov type* // J. Geom. Symm. Phys. **30**, 105–119 (2013).

Vladimir Stefanov Gerdjikov,
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. Georgi Bonchev Str., Block 8,
1113, Sofia, Bulgaria

Sankt-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
B. Morskaya, 67A,
190000, St-Petersburg, Russia

Institute for Advanced Physical Studies,
111 Tsarigradsko chaussee,
1784, Sofia, Bulgaria

Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy
Bulgarian Academy of Sciences,
72 Tsarigradsko Chaussee, Blvd.,
1784, Sofia, Bulgaria

E-mail: `vgerdjikov@math.bas.bg`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 141-157.

Dedicated to the memory of A.B. Shabat and R.I. Yamilov

GENERALIZED INVARIANT MANIFOLDS FOR INTEGRABLE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

I.T. HABIBULLIN, A.R. KHAKIMOVA, A.O. SMIRNOV

Abstract. In the article we discuss the notion of the generalized invariant manifold introduced in our previous study. In the literature, the method of the differential constraints is well known as a tool for constructing particular solutions for the nonlinear partial differential equations. Its essence is in adding to a given nonlinear PDE, another much simpler, as a rule ordinary, differential equation, consistent with the given one. Then any solution of the ODE is a particular solution of the PDE as well. However the main problem is to find this consistent ODE. Our generalization is that we look for an ordinary differential equation that is consistent not with the nonlinear partial differential equation itself, but with its linearization. Such generalized invariant manifold is effectively sought. Moreover, it allows one to construct such important attributes of integrability theory as Lax pairs and recursion operators for integrable nonlinear equations. In this paper, we show that they provide a way to construct particular solutions to the equation as well.

Keywords: invariant manifold, integrable system, recursion operator, Lax pair, algebro-geometric solutions, Dubrovin equations, spectral curves.

Mathematics Subject Classification: 35Q51, 35Q53, 35Q55

1. Introduction

In the article, a notion of the generalized invariant manifold for nonlinear integrable equation is discussed. Recently in our works [1]–[7] it was observed that the objects of such kind provide an effective tool for evaluating the Lax pairs and recursion operators.

The approach developed in [1]–[7] explains the essence of the Lax pair phenomenon. In fact, the Lax pair in $1 + 1$ dimension is naturally (internally) derived from the nonlinear equation under consideration. First we find the linearization (Fréchet derivative) of the nonlinear equation. The linearized equation obviously includes the dynamical variables of the original equation as well, which are here considered as functional parameters. Now we find an ordinary differential equation consistent with the linearized equation, which also depends on the dynamical variables of the original equation. We call this ordinary differential equation a generalized invariant manifold. For a given equation, there are many such manifolds, including nonlinear ones. In order to evaluate the generalized invariant manifold, we use the consistency with the linearized equation that allows us to derive a system of differential (difference) equations that is highly overdetermined due to the presence of the independent parameters, which are the dynamical variables of the original nonlinear equation. In all of the examples discussed in [1]–[7] (KdV, Kaup-Kupershmidt equation, Krichever-Novikov equation, Volterra type lattices from Yamilov list, two equations of KdV type found by

I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications.

© I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov. 2021.

The work of A.R. Khakimova is supported in part by Young Russian Mathematics award. The work of A.O. Smirnov is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Grant Agreement No. FSRF-2020-0004.

Submitted March 30, 2021.

Svinolupov and Sokolov, Garifullin-Mikhailov-Yamilov non-autonomous lattice, sine-Gordon equation and several hyperbolic type equations, etc.) the corresponding overdetermined systems are effectively solved and the desired non-trivial manifolds are found. Trivial generalized invariant manifolds are constructed quite elementary by using the classical or higher symmetries, see examples in [5]. A manifold, which is consistent with the linearized equation if and only if the original nonlinear equation is satisfied, is called non-trivial. Actually, this condition means that a pair consisting of the linearized equation and the generalized invariant manifold defines a Lax pair. It is curious that usual Lax pairs do not belong to this class, but they can be derived from properly chosen nonlinear generalized invariant manifolds by suitable transformations. Note that new Lax pairs are of an independent interest. For instance, a generalized invariant manifold generated by a consistent pair of linear invariant manifolds is easily transformed into the recursion operator. It was shown in [7] at the example of the Volterra lattice that a nonlinear Lax pair can be used for constructing particular solutions of the nonlinear equation.

Let us briefly describe the content of the article. In the second section we recall the definition of the invariant manifold and generalized invariant manifold for the differential equations in partial derivatives. We explain how to look for the generalized invariant manifold and why it can be effectively found. We conjecture that each integrable equation admits a consistent pair of linear invariant manifolds and give examples supporting such conjecture. We assert, based on our previous work, that consistent pairs of linear invariant manifolds can be used to construct both recursion operators and Lax pairs. We illustrate the algorithm by the examples of NLS system and mKdV equation in Sections 3–5. The consistent pair of the linear generalized invariant manifolds usually can be reduced to nonlinear one of smaller order. In this form, the invariant manifold provides an efficient way to derive the Dubrovin equations, from which finite-gap solutions are obtained; on method of finite-gap integration see [8]–[12]. The description of the spectral curve, the derivation and study of the Dubrovin equations for the NLS equation are presented in Sections 3.1–3.3. The corresponding solutions of the generalized invariant manifolds and their relation with the Novikov equation are considered in Section 3.4. Examples of one-phase and two-phase solutions of the NLS equation are given in Section 3.5. Derivation of the Dubrovin equations for mKdV equation is presented in Section 4.

2. Invariant manifolds and their generalization

The concept of an invariant manifold is well known in the theory of partial differential equations. It forms the basis of the method of differential constraints, widely used to construct particular solutions of nonlinear equations. We recall briefly the main points of the method of the invariant manifolds using the example of equations of evolutionary type

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{2.1}$$

An ordinary differential equation of the order r

$$u_r = g(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{r-1}) \tag{2.2}$$

is called an invariant manifold for the equation (2.1) if it is consistent with (2.1), or, in other words, if the following condition is obeyed:

$$D_x^r f - D_t g|_{(2.1),(2.2)} = 0. \tag{2.3}$$

Here D_x and D_t are operators of the total derivative with respect to x and to t.

It is clear that if a solution $u(x,t)$ of equation (2.1) satisfies equation (2.2) for some moment $t = t_0$, then it remains a solution of (2.2) at all values of time t. This is the invariance of equation (2.2).

Obviously relation (2.3) defines a PDE for the desired function g. Sometimes this equation can be solved explicitly, although in the general case the problem of finding the function g is rather complicated.

The situation changes essentially if we look for an ordinary differential equation that is consistent not with the nonlinear equation (2.1) itself, but with its linearization

$$U_t = \frac{\partial f}{\partial u} U + \frac{\partial f}{\partial u_x} U_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} U_{xx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k. \tag{2.4}$$

Let give rigorous definitions. We consider an ordinary differential equation of the form

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \dots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \dots, u_n), \tag{2.5}$$

where $U = U(x, t)$ is a sought function, while an arbitrary solution $u = u(x, t)$ of the original equation (2.1) is interpreted in (2.5) as a functional parameter. In fact, the variables x, t, U, U_x, U_{xx}, $\dots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\dots$, u_n in (2.5) are regarded as independent.

Definition 2.1. *Equation* (2.5) *determines a generalized invariant manifold if the relation*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(2.1),(2.4),(2.5)} = 0 \tag{2.6}$$

is satisfied identically for all values of the variables $\{u_j\}$, x, t, U, U_x, $\dots$, U_{m-1}.

Here the variables u_t, U_t as well as their derivatives with respect to x are expressed due to equations (2.1) and (2.4), the variables $U_m, U_{m+1}, \dots$ are replaced by means of (2.5). To emphasize that the solution $u(x, t)$ is arbitrary, we consider the variables u, u_x, $u_{xx}, \dots$ as independent ones. By virtue of this assumption, the problem of finding the function $F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \dots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \dots, u_n)$ is overdetermined but, as it is suggested by numerous examples, can be effectively solved.

Linear generalized invariant manifolds, that is, those of the form

$$LU = 0,$$

where L is a linear differential operator

$$L = \sum_{i=0}^{N} a_i(u, u_x, u_{xx}, \dots) D_x^i$$

are of a special interest.

Definition 2.2. *Let equations* $L_1 U = 0$ *and* $L_2 U = 0$ *define linear generalized invariant manifolds for the equation* (2.1). *We call these two manifolds consistent if for all* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *the linear combination*

$$(\lambda L_1 + \mu L_2) U = 0$$

is a generalized invariant manifold for (2.1).

The following conjecture is supported by numerous examples, see [1]–[7].

Conjecture 2.1. *Equation* (2.1) *is integrable if and only if it admits a pair of the consistent linear generalized invariant manifolds such that the quotient*

$$R = L_1^{-1} L_2$$

is a pseudodifferential operator; in fact, it is the recursion operator for (2.1).

Examples can be found below in Section 3.2 and at the end of Section 5.

3. Invariant manifolds for NLS equation

In this section we find an invariant manifold of the first order (the simplest nontrivial!) for the nonlinear Schrödinger equation. It is determined by the system

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} + 2u^2v, \\ iv_t &= -v_{xx} - 2v^2u \end{aligned} \tag{3.1}$$

under appropriate additional condition. Let us first find the linearized equation for the system by rule (2.4):

$$\begin{aligned} iU_t &= U_{xx} + 4uvU + 2u^2V, \\ iV_t &= -V_{xx} - 2v^2U - 4uvV. \end{aligned} \tag{3.2}$$

According to Definition 2.1, the generalized invariant manifold is a system of the ordinary differential equations consistent with (3.2) for arbitrary solution $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ of (3.1). We look for it in the form

$$\begin{aligned} U_x &= f(U,V,u,v), \\ V_x &= g(U,V,u,v). \end{aligned} \tag{3.3}$$

The comptability condition for the equations (3.2) and (3.3) gives an overdetermined system of equations for a pair of unknowns f and g that is effectively solved and defines a generalized invariant manifold given by a system of the form (for the details see Appendix below)

$$\begin{aligned} U_x &= \lambda U - 2u\sqrt{C - UV}, \\ V_x &= -\lambda V - 2v\sqrt{C - UV}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

where λ and C are arbitrary constants. Due to the obtained equations, linearized equation (3.2) converts into a system of the ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} iU_t &= (2uv + \lambda^2)U - 2(u_x + \lambda u)\sqrt{C - UV}, \\ iV_t &= -(2uv + \lambda^2)V + 2(v_x - \lambda v)\sqrt{C - UV}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

The following statement can be easily proved by straightforward computations.

Theorem 3.1. *A pair of systems* (3.4) *and* (3.5) *is consistent if and only if the functions u and v solve equation* (3.1).

Therefore, the pair of equations (3.4) and (3.5) defines a Lax pair for the NLS equation. Unlike the usual Lax pair found by V.E. Zakharov and A.B. Shabat, this pair is nonlinear and contains two arbitrary constants, but with the help of a simple technique it is reduced to the usual one [13]. Indeed, by setting $C = 0$, $U = \varphi^2$, $V = \psi^2$ we reduce equations (3.4) and (3.5) to the form

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{1}{2}\lambda\varphi - iu\psi, \\ \psi_x &= -iv\varphi - \frac{1}{2}\lambda\psi, \end{aligned}$$

and, respectively,

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \left(uv + \frac{1}{2}\lambda^2\right)\varphi - i(u_x + \lambda u)\psi, \\ \psi_t &= i(v_x - \lambda v)\varphi - \left(uv + \frac{1}{2}\lambda^2\right)\psi. \end{aligned}$$

3.1. Invariant manifolds and spectral curves. Let us show that the found nonlinear Lax pair is of an independent interest since it provides opportunities for building particular solutions to the NLS equation. We change the variables in the nonlinear Lax pair as $U = u\Phi$, $V = v\Psi$ and this casts the pair into the form

$$\begin{aligned} &\frac{u_x}{u}\Phi + \Phi_x - \lambda\Phi = -2\sqrt{C - \Phi\Psi uv}, \\ &\frac{v_x}{v}\Psi + \Psi_x + \lambda\Psi = -2\sqrt{C - \Phi\Psi uv} \end{aligned} \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned} &i\frac{u_t}{u}\Phi + i\Phi_t = (2uv + \lambda^2)\Phi - 2\left(\frac{u_x}{u} + \lambda\right)\sqrt{C - \Phi\Psi uv}, \\ &i\frac{v_t}{v}\Psi + i\Psi_t = -(2uv + \lambda^2)\Psi + 2\left(\frac{v_x}{v} - \lambda\right)\sqrt{C - \Phi\Psi uv}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assume that the parameters C and λ are related such that C is a polynomial of λ with constant coefficients:

$$C = \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{2N+2}(\lambda - \lambda_k) = \frac{1}{4}\nu^2(\lambda). \tag{3.8}$$

We see solutions to the nonlinear Lax equations in the form

$$\Phi = \prod_{k=1}^{N}(\lambda - \gamma_k), \quad \Psi = -\prod_{k=1}^{N}(\lambda - \beta_k). \tag{3.9}$$

We note that identity (3.8) defines the equation for the spectral hyperelliptic curve of the N-gap solution of the NLS equation, see [10]–[12].

We substitute representations (3.8) and (3.9) into system (3.6) and compare the coefficients at the like powers λ^N. This gives the following relations being the well known trace formulae:

$$\begin{aligned} \frac{u_x}{u} &= -\sum_{k=1}^{N}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k, \\ \frac{v_x}{v} &= \sum_{k=1}^{N}\beta_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k. \end{aligned} \tag{3.10}$$

We substitute polynomials (3.9) into system (3.6), take $\lambda = \gamma_j$ in the first equation and $\lambda = \beta_j$ in the second. Then we get the well known Dubrovin formulae [8]

$$\gamma_j' = \frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}, \qquad \beta_j' = -\frac{\nu(\beta_j)}{\prod_{k\neq j}(\beta_j - \beta_k)}, \tag{3.11}$$

where $\gamma_j' = \frac{d\gamma_j}{dx}$, $\beta_j' = \frac{d\beta_j}{dx}$. By applying the same manipulations to (3.7) we obtain

$$\begin{aligned} i\dot{\gamma}_j &= \frac{\left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}, \\ i\dot{\beta}_j &= -\frac{\left(-\sum_{k\neq j}\beta_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\nu(\beta_j)}{\prod_{k\neq j}(\beta_j - \beta_k)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

where $\dot{\gamma}_j = \frac{d\gamma_j}{dt}$, $\dot{\beta}_j = \frac{d\beta_j}{dt}$. In order to get the focusing NLS equation

$$iu_t = u_{xx} + 2|u|^2 u,$$

to system (3.1) we add a constraint of the form $v = \bar{u}$, where the bar over a letter means the complex conjugation. Then solution (Φ, Ψ) to the nonlinear Lax pair (3.6), (3.7) can be chosen in such a way

$$\bar{\Phi}\left(-\bar{\lambda}\right) = (-1)^{N+1}\Psi(\lambda).$$

Function $C(\lambda)$ and parameters λ_j, β_j, γ_j satisfy the involution

$$C(\lambda) = \bar{C}\left(-\bar{\lambda}\right), \qquad \bar{\lambda}_j = -\lambda_j, \qquad \beta_j = -\bar{\gamma}_j.$$

Evolution of γ_j in x and t is determined by a pair of the systems of ordinary differential equations

$$\gamma_j' = \frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}, \tag{3.13}$$

$$i\dot{\gamma}_j = \frac{\left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}. \tag{3.14}$$

Thus, we arrive at systems of ODE describing the well-known algebro-geometric solutions for the NLS equations, see [10].

Theorem 3.2. *A pair of systems* (3.13) *and* (3.14) *is consistent.*

Proof. Let us show that a pair of systems (3.13), (3.14) is consistent. To do this, we differentiate system (3.13) with respect to t, multiply by i and subtract then system (3.14) differentiated first with respect to x. We get

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\left(\gamma_j'\right) - \frac{d}{dx}\left(i\dot{\gamma}_j\right) =& \frac{i\frac{d}{dt}\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)} - \frac{i\nu(\gamma_j)\frac{d}{dt}\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)^2} \\ &+ \sum_{s\neq j}\left(\gamma_s'\right)\frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)} \\ &- \left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\frac{\frac{d}{dx}\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)} \\ &+ \left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\frac{\nu(\gamma_j)\frac{d}{dx}\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)^2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

We find the derivatives

$$i\frac{d}{dt}\nu(\gamma_j), \qquad \frac{d}{dx}\nu(\gamma_j), \qquad i\frac{d}{dt}\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k), \qquad \frac{d}{dx}\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)$$

separately. We have:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\nu(\gamma_j) =& \frac{i\dot{\gamma}_j\nu(\gamma_j)}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\frac{1}{\gamma_j - \lambda_k} \\ =& \frac{1}{2}\left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\frac{\nu^2(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}\sum_{k=1}^{2N+2}\frac{1}{\gamma_j - \lambda_k}, \end{aligned}$$

and

$$\frac{d}{dx}\nu(\gamma_j) = \frac{\gamma_j'\nu(\gamma_j)}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\frac{1}{\gamma_j - \lambda_k} = \frac{1}{2}\frac{\nu^2(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}\sum_{k=1}^{2N+2}\frac{1}{\gamma_j - \lambda_k}.$$

In the same way we find:

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k) =&\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)\sum_{s\neq j}\frac{i\dot{\gamma}_j-i\dot{\gamma}_s}{\gamma_j-\gamma_s}\\
=&\left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\nu(\gamma_j)\sum_{s\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_s}\\
&+\prod_{k'\neq j}(\gamma_j-\gamma_{k'})\sum_{s\neq j}\left(\sum_{k\neq s}\gamma_k\right)\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\prod_{k'\neq j}(\gamma_j-\gamma_{k'})\sum_{s\neq j}\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k) =&\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)\sum_{s\neq j}\frac{\gamma_j'-\gamma_s'}{\gamma_j-\gamma_s}\\
=&\nu(\gamma_j)\sum_{s\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_s}-\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)\sum_{s\neq j}\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}.
\end{aligned}
$$

We substitute the obtained identities into (3.15) and after simple transformations we arrive at

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\left(\gamma_j'\right)-\frac{d}{dx}\left(i\dot{\gamma}_j\right) =&\frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)}\left[-\sum_{s\neq j}\left(\sum_{k\neq s}\gamma_k\right)\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}\right.\\
&\left.+\sum_{s\neq j}\frac{\nu(\gamma_s)}{\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}+\sum_{k\neq j}\gamma_k\sum_{s\neq j}\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}\right].
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

We observe that the first two terms in the brackets can be simplified as

$$
\begin{aligned}
-\sum_{s\neq j}\left(\sum_{k\neq s}\gamma_k\right)&\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}+\sum_{s\neq j}\frac{\nu(\gamma_s)}{\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}\\
&=\sum_{s\neq j}\left(\gamma_j-\gamma_s-\sum_{k\neq s}\gamma_k\right)\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}\\
&=\sum_{s\neq j}\left(-\sum_{k\neq j}\gamma_k\right)\frac{\nu(\gamma_s)}{(\gamma_j-\gamma_s)\prod_{k\neq s}(\gamma_s-\gamma_k)}.
\end{aligned}
$$

Then, taking into consideration the obtained relation, we see that identity (3.16) becomes

$$
i\frac{d}{dt}\left(\gamma_j'\right)-\frac{d}{dx}\left(i\dot{\gamma}_j\right)=0.
$$

This completes the proof. □

3.2. Consistent pair of linear invariant manifolds. Here we present an example supporting Conjecture 2.1. From nonlinear invariant manifold (3.4) we derive a consistent pair of linear invariant manifolds for the system (3.1). We differentiate both equations in (3.4) with respect to x

$$U_{xx} = \lambda U_x - 2u_x\sqrt{C-UV} + u\frac{U_xV+V_xU}{\sqrt{C-UV}},$$
$$V_{xx} = -\lambda V_x - 2v_x\sqrt{C-UV} + v\frac{U_xV+V_xU}{\sqrt{C-UV}}$$

and then exclude irrationalities in the obtained equations due to relations:

$$\frac{U_xV+V_xU}{\sqrt{C-UV}} = -2(uV+vU),$$
$$\sqrt{C-UV} = \frac{\lambda U - U_x}{2u} = \frac{-\lambda V - V_x}{2v}.$$

As a result, we obtain a linear relation

$$L_2W = \lambda L_1 W, \tag{3.17}$$

where $W = (U,V)^T$ and the operators are as follows

$$L_1 = \begin{pmatrix} D_x - \frac{u_x}{u} & 0 \\ 0 & -D_x + \frac{v_x}{v} \end{pmatrix},$$

and

$$L_2 = \begin{pmatrix} D_x^2 - \frac{u_x}{u}D_x + 2uv & 2u^2 \\ 2v^2 & D_x^2 - \frac{v_x}{v}D_x + 2uv \end{pmatrix}.$$

We confirm straightforwardly that the linear constraint defined by equation (3.17) is consistent with linearized equation (3.2), i.e., it defines a linear generalized invariant manifold with a parameter λ for the NLS equation. It is easily verified that a pseudo differential operator $L_1^{-1}L_2$ coincides with the recursion operator for NLS system (3.1)

$$R = \begin{pmatrix} D_x + 2uD_x^{-1}v & 2uD_x^{-1}u \\ -2vD_x^{-1}v & -D_x - 2vD_x^{-1}u \end{pmatrix}.$$

3.3. Integrals of systems. The overdetermined system of equations (3.13), (3.14) admits integrals of the form

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \gamma^k \frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-2, \tag{3.18}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \gamma^{N-1} \frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = t, \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \gamma^{N} \frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = x + \frac{1}{2}t\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k \tag{3.20}$$

that are derived directly from the systems by using some elementary manipulations and subsequent integration.

3.4. Novikov equation. We express coefficients of the polynomial $P = (\Phi, \Psi)^T$ in terms of the solution (u,v) of the NLS equation (3.1) obtained due to (3.10). Then we rewrite equation (3.17) in a convenient form

$$\widetilde{R}P = \lambda P, \tag{3.21}$$

where

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

We introduce notations for the coefficients of the polynomial P

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda^N + \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \lambda^{N-1} + \ldots + \begin{pmatrix} r_N \\ s_N \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

By virtue of the above expansion, equation (3.21) gives rise to

$$\begin{aligned} &\widetilde{R}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda^N + \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \lambda^{N-1} + \ldots + \begin{pmatrix} r_N \\ s_N \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda^{N+1} + \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \lambda^{N} + \ldots + \begin{pmatrix} r_N \\ s_N \end{pmatrix}\lambda. \end{aligned}$$

Comparing the coefficients at λ^{N+1} in (3.1), we find:

$$\widetilde{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

We recall that the operator $\widetilde{R}$ involves an integration. It is easy to confirm that equation (3.23) is satisfied for an appropriate choice of the constants in the integration.

We proceed to the coefficients at λ^N and we get

$$\widetilde{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

that implies

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u}\left(u_x + c_1 u\right) \\ \frac{1}{v}\left(v_x - c_1 v\right) \end{pmatrix}.$$

By continuing this process we find for $k \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} r_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u}\left(g_k + c_1 g_{k-1} + \ldots + c_k u\right) \\ \frac{1}{v}\left(h_k + c_1 h_{k-1} + \ldots + c_k(-v)\right) \end{pmatrix},$$

where c_i, $i = \overline{1,k}$ are arbitrary constants, the vector (g_j, h_j) coincides with the generator of the homogeneous symmetry of the order k

$$u_{\tau_j} = g_j, \quad v_{\tau_j} = h_j$$

of NLS system (3.1). Finally, comparing the coefficients at λ^0, we find

$$r_{N+1} = 0, \quad s_{N+1} = 0$$

that actually coincides with the Novikov equation

$$\begin{aligned} &g_N + c_1 g_{N-1} + \ldots + c_N u = 0, \\ &h_N + c_1 h_{N-1} + \ldots + c_N(-v) = 0. \end{aligned}$$

3.5. Examples. Below we present two examples illustrating the use of the Dubrovin equations (3.13), (3.14) by taking $N = 1$ and $N = 2$.

Example 1. In the particular case when $N = 1$ and

$$\nu(\gamma) = (\gamma - \lambda_1)(\gamma - \lambda_2) \quad \text{with} \quad \lambda_1 = \eta + i\xi, \quad \lambda_2 = -\eta + i\xi$$

we get a system of consistent equations for determining the unknown $\gamma = \gamma(x,t)$:

$$\begin{aligned} \gamma' &= (\gamma - \lambda_1)(\gamma - \lambda_2), \\ i\dot{\gamma} &= 2i\xi(\gamma - \lambda_1)(\gamma - \lambda_2). \end{aligned}$$

It can be solved easily:

$$\gamma = \eta \tanh(2\xi\eta t + \eta x + s_0) + i\xi.$$

In order to find $u = u(x,t)$, we first solve the equation

$$\frac{u_x}{u} = -\gamma + 2i\xi.$$

Integration of this equation yields

$$u = \frac{e^{i\xi x A(t)}}{\cosh(2\xi\eta t + \eta x + s_0)}.$$

We substitute the obtained ansatz into the NLS equation $iu_t = u_{xx} + 2\left|u\right|^2 u$ and find

$$A(t) = \eta e^{i(\eta^2-\xi^2)t+i\varphi_0}.$$

Then finally we get the well-known soliton solution

$$u(x,t) = \frac{\eta e^{i\left(\xi x+(\eta^2-\xi^2)t+\varphi_0\right)}}{\cosh(2\xi\eta t + \eta x + s_0)}.$$

Example 2. Let us take $N = 2$ and assume that the hyperelliptic curve is as follows

$$\nu(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^3.$$

In order to find the functions $\gamma_1(x,t)$ and $\gamma_2(x,t)$, we use the integrals (3.18)-(3.20), which in this case take the form:

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \gamma\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = t,$$

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,t)} \gamma^2\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)} = x.$$

These integrals are evaluated in a closed form and generate a system of algebraic equations for $\gamma_1(x,t)$, $\gamma_2(x,t)$, which is easily solved and gives rise to

$$\gamma_j(x,t) = -2\frac{X(1-iT) + (-1)^j(iT - X - 1)(iT + X - 1)R}{(X^2+T^2+1)(X^2+T^2+4iT-3)}, \qquad j = 1, 2,$$

where $T = 4t$, $X = 2x$ and

$$R = \sqrt{(T^2 + 2iT + X^2 + 3)(X - iT + 1)(X + iT - 1)}.$$

Then we find $u(x,t)$ according to (3.10):

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{4(1-iT)}{X^2+T^2+1}\right) e^{-2it}.$$

The obtained solution obviously coincides with the well known two-phase Peregrine soliton [14].

4. Invariant manifolds for mKdV equation: complex-valued case

A complex-valued version of the modified KdV equations

$$u_\tau + u_{xxx} + 6|u|^2 u_x = 0 \tag{4.1}$$

has important physical applications, see [15].

The equation is obtained by imposing an involution of the form $v = \bar{u}$, where the bar over the letter means complex conjugation, in the system of equations

$$\begin{aligned} &u_\tau + u_{xxx} + 6uvu_x = 0, \\ &v_\tau + v_{xxx} + 6uvv_x = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Linearization of (4.2) leads us to the system

$$\begin{aligned} &U_\tau + U_{xxx} + 6uvU_x + 6vu_xU + 6uu_xV = 0, \\ &V_\tau + V_{xxx} + 6uvV_x + 6vu_xU + 6uu_xV = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

It should be stressed that generalized invariant manifold (3.4) found in the previous section for the NLS equation, is also a generalized invariant manifold for mKdV equation (4.2). This is not surprising since the systems (3.1) and (4.2) mutually commute. It can be easily confirmed that system

$$\begin{aligned} &U_x = \lambda U - 2u\sqrt{C - UV}, \\ &V_x = -\lambda V - 2v\sqrt{C - UV} \end{aligned} \tag{4.4}$$

is consistent with (4.3) for each solution (u, v) of (4.2). Due to (4.4), linearized equation (4.3) is reduced to the form

$$\begin{aligned} &U_\tau = 2\left(u_{xx} + 2u^2v + \lambda u_x + \lambda^2 u\right)\sqrt{-UV + C} - \left(2uv_x - 2vu_x - 2\lambda uv - \lambda^3\right)U, \\ &V_\tau = 2\left(v_{xx} + 2uv^2 - \lambda v_x + \lambda^2 v\right)\sqrt{-UV + C} - \left(2uv_x - 2vu_x - 2\lambda uv - \lambda^3\right)V. \end{aligned} \tag{4.5}$$

It is easy to confirm that (4.4), (4.5) define a nonlinear Lax pair for system (4.2).

Since systems (4.4) and (4.5) are very similar to those studied in the previous section (see (3.4), (3.5)), we investigate them in the same way. First we change the variables as $U = u\Phi$, $V = v\Psi$ and get

$$\begin{aligned} &\frac{u_x}{u}\Phi + \Phi_x - \lambda\Phi = -2\sqrt{C - \Phi\Psi uv}, \\ &\frac{v_x}{v}\Psi + \Psi_x + \lambda\Psi = -2\sqrt{C - \Phi\Psi uv} \end{aligned} \tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned} &\frac{u_\tau}{u}\Phi + \Phi_\tau = 2\left(\frac{u_{xx}}{u} + 2uv + \lambda\frac{u_x}{u} + \lambda^2\right)\sqrt{C - \Phi\Psi uv} - \left(2uv_x - 2vu_x - 2\lambda uv - \lambda^3\right)\Phi, \\ &\frac{v_\tau}{v}\Psi + \Psi_\tau = 2\left(\frac{v_{xx}}{v} + 2uv - \lambda\frac{v_x}{v} + \lambda^2\right)\sqrt{C - \Phi\Psi uv} - \left(2uv_x - 2vu_x - 2\lambda uv - \lambda^3\right)\Psi. \end{aligned} \tag{4.7}$$

We use the same spectral curve:

$$C = \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{2N+2}(\lambda - \lambda_k) = \frac{1}{4}\nu^2(\lambda) \tag{4.8}$$

and seek solutions to the nonlinear Lax equations in the same form:

$$\Phi = \prod_{k=1}^{N}(\lambda - \gamma_k), \qquad \Psi = -\prod_{k=1}^{N}(\lambda - \beta_k). \tag{4.9}$$

We substitute representations (4.8) and (4.9) into system (4.6) and by comparing the coefficients at λ^N, we derive trace formulae (3.10). The next step is to substitute polynomials (4.9) into system (4.6). Then we set $\lambda = \gamma_j$ in the first equation and $\lambda = \beta_j$ in the second and get the system of ordinary differential equations defining the dynamics of the roots on x: [8]

$$\gamma_j' = \frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j - \gamma_k)}, \qquad \beta_j' = -\frac{\nu(\beta_j)}{\prod_{k\neq j}(\beta_j - \beta_k)}, \tag{4.10}$$

where $\gamma_j' = \frac{d\gamma_j}{dx}$, $\beta_j' = \frac{d\beta_j}{dx}$.

Let us derive equations describing the time evolution of the functions $\gamma(x,t)$, $\beta(x,t)$. We substitute explicit representations of the functions Φ, Ψ and C into (4.7) and set $\lambda=\gamma_j$ in the first equation and $\lambda=\beta_j$ in the second:

$$\begin{aligned}\dot\gamma_j&=\left(\frac{u_{xx}}{u}+2uv+\lambda\frac{u_x}{u}+\lambda^2\right)\frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)},\\ \dot\beta_j&=-\left(\frac{v_{xx}}{v}+2uv-\lambda\frac{v_x}{v}+\lambda^2\right)\frac{\nu(\beta_j)}{\prod_{k\neq j}(\beta_j-\beta_k)},\end{aligned}\tag{4.11}$$

where we used notations $\dot\gamma_j=\frac{d\gamma_j}{d\tau}$, $\dot\beta_j=\frac{d\beta_j}{d\tau}$. To get a closed system for γ_j, β_j, we exclude $\frac{u_x}{u}$, $\frac{v_x}{v}$, $\frac{v_{xx}}{v}$ and $\frac{u_{xx}}{u}$ due to (3.10). For the term uv we deduce two equations:

$$4uv=2\sum_{k\neq j}\gamma'_k+\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\sum_{k\neq j}\gamma_k-2\sum_{k\neq s}\gamma_k\gamma_s-2\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k)^2+\frac14\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2-\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s,$$

$$4uv=-2\sum_{k\neq j}\beta'_k+\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\sum_{k\neq j}\beta_k-2\sum_{k\neq s}\beta_k\beta_s-2\sum_{k=1}^{N}(\beta_k)^2+\frac14\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2-\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s$$

by comparing coefficients at the power λ^{N+1} in (4.7). As a result, system (4.11) converts into a system of equations describing the time evolution of the roots

$$\begin{aligned}\dot\gamma_j&=\left(-\frac12\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\sum_{k\neq j}\gamma_k+\sum_{k\neq s\neq j}\gamma_k\gamma_s+\frac38\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2-\frac12\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s\right)\frac{\nu(\gamma_j)}{\prod_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)},\\ \dot\beta_j&=-\left(\frac12\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\sum_{k\neq j}\beta_k-\sum_{k\neq s\neq j}\beta_k\beta_s-\frac38\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2+\frac12\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s\right)\frac{\nu(\beta_j)}{\prod_{k\neq j}(\beta_j-\beta_k)}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

It can be proved by a direct computation that systems (4.10) and (4.12) mutually commute.

In what follows, we impose reductions of two types on system (4.1). Complex reduction $v=\bar u$ in (4.1) is related to the involution

$$\bar\Phi\left(-\bar\lambda\right)=(-1)^{N+1}\Psi(\lambda)$$

of the eigenfunctions, that generates conditions for the zeros $\bar\gamma_k=-\beta_j$ and $\bar\lambda_k=-\lambda_j$ of the polynomials Φ, Ψ, C such that

$$C(\lambda)=\prod_{j=1}^{N+1}\left(\lambda^2-2\lambda\,Re\lambda_j+|\lambda_j|^2\right).$$

In the case of the reduction $v=u$ we obtain

$$\Phi\left(-\lambda\right)=(-1)^{N+1}\Psi(\lambda)$$

and $\gamma_k=-\beta_j$, $\lambda_k=-\lambda_j$, such that

$$C(\lambda)=\prod_{j=1}^{N+1}\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right).$$

It is obvious that both reductions are consistent with dynamics (4.10), (4.12). By using the found solution $\{\gamma_j\}_{j=1}^N$ of the Dubrovin equations, one can find solution u of equation (4.1) due to formula (3.10). Solutions of such kind were earlier studied in [16].

The overdetermined system of equations (4.10), (4.12) admits integrals of the form

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,\tau)}\gamma^k\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=0,\qquad k=0,1,\dots,N-3, \tag{4.13}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,\tau)}\gamma^{N-2}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=\tau, \tag{4.14}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,\tau)}\gamma^{N-1}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\tau, \tag{4.15}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0)}^{\gamma_j(x,\tau)}\gamma^{N}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=x+\left(\frac{3}{8}\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s\right)\tau. \tag{4.16}$$

Taking into account the dependence on t and τ in equations (3.18)-(3.20) and (4.13)-(4.16), we find that

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0,0)}^{\gamma_j(x,t,\tau)}\gamma^k\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=0,\quad k=0,1,\dots,N-3,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0,0)}^{\gamma_j(x,t,\tau)}\gamma^{N-2}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=\tau,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0,0)}^{\gamma_j(x,t,\tau)}\gamma^{N-1}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=t+\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)\tau,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0,0)}^{\gamma_j(x,t,\tau)}\gamma^{N}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=x+\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)t+\left(\frac{3}{8}\left(\sum_{k=1}^{2N+2}\lambda_k\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{k\neq s}\lambda_k\lambda_s\right)\tau.$$

We note that formulae (3.18)-(3.20) and (4.13)-(4.16) can be easily generalized to solutions which simultaneously satisfy several equations from the AKNS hierarchy. In this case we obtain the following representation for the integrals

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j(0,0,\dots)}^{\gamma_j(t_0,t_1,t_2,\dots)}\gamma^{N-k}\frac{d\gamma}{\nu(\gamma)}=t_k+\sum_{j>k}c_{k,j}t_j,\qquad k\geq 0,$$

where $t_0=x$, $t_1=t$, $t_2=\tau$ and t_j, for $j>2$ correspond to higher symmetries. Here $c_{k,j}$ are constant coefficients.

5. Invariant manifolds for mKdV equation: real case

In this section we seek for the generalized invariant manifold for the mKdV equation which can be obtained from (4.2) by imposing the real involution $u=v$:

$$u_t=u_{xxx}+6u^2u_x \tag{5.1}$$

and then show how to derive from it the Lax pair, recursion operator and a consistent pair of the linear invariant manifolds.

First, we linearize equation (5.1):

$$U_t=U_{xxx}+6u^2U_x+12uu_xU. \tag{5.2}$$

Since equation (5.1) is reduced to the equation with cubic nonlinearity

$$w_t=w_{xxx}+2w^3$$

by substitution $u = w_x$ the linearizations of these two equations are related by a similar replacement. Indeed, if we put $U = W_x$, then we arrive at the equation

$$W_t = W_{xxx} + 6u^2 W_x \tag{5.3}$$

that is much simpler than (5.2). Hence, it is more convenient to work with this one. Below we will seek an ODE of the form

$$W_{xx} = F(W_x, W, u),$$

consistent with linear equation (5.3) for each solution $u(x,t)$ of the equation (5.1). Omitting the computations, we present only the answer

$$W_{xx} = 2u\sqrt{-W_x^2 + \lambda W^2 + C} + \lambda W, \tag{5.4}$$

where λ and C are arbitrary constants. By virtue of the found equation, linearization (5.3) turns into the form

$$W_t = \left(\lambda + 2u^2\right) W_x + 2u_x\sqrt{-W_x^2 + \lambda W^2 + C}. \tag{5.5}$$

It worth mentioning that the found nonlinear equations provide a Lax pair for (5.1), namely, the following theorem holds.

Theorem 5.1. *A pair of equations* (5.4) *and* (5.5) *are consistent if and only if the function* u *solves equation* (5.1).

Remark 5.1. *We note that generalized invariant manifolds* (4.4) *and* (5.4) *are related by the following change of the variables. We let* $\lambda = \xi^2$ *in* (5.4) *and introduce* U, V *in such a way*

$$U = W_x - \xi W, \quad V = W_x + \xi W.$$

Then we get

$$U_x = \xi U - 2u\sqrt{C - UV},$$
$$V_x = -\xi V - 2v\sqrt{C - UV}.$$

Let us reduce pair of nonlinear equations (5.4), (5.5) for the case when $C = 0$ to the usual Lax pair of equation (5.1). We change the variables in the following way

$$W = 2\varphi\psi, \quad W_x = \sqrt{\lambda}\left(\varphi^2 + \psi^2\right)$$

then in the new variables equation (5.4) becomes a system of linear equations

$$\varphi_x = -iu\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\psi,$$
$$\psi_x = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\varphi + iu\psi$$

and similarly, (5.5) turns into

$$\varphi_t = -i\left(u_{xx} + 2u^3 + u\lambda\right)\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(2iu_x + 2u^2 + \lambda\right)\psi,$$
$$\psi_t = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(2iu_x - 2u^2 - \lambda\right)\varphi + i\left(u_{xx} + 2u^3 + u\lambda\right)\psi.$$

In order to bring it to a standard form, we make a replacement

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\tilde{\Phi},$$

where $\Phi = (\varphi, \psi)^T$ and $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^T$. Then we get

$$\tilde{\varphi}_x = \xi\tilde{\varphi} - iu\tilde{\psi},$$
$$\tilde{\psi}_x = -iu\tilde{\varphi} - \xi\tilde{\psi}$$

and

$$\tilde{\varphi}_t = \left(4\xi^3 + 2u^2\xi\right)\tilde{\varphi} - i\left(4u\xi^2 + 2u_x\xi + u_{xx} + 2u^2\right)\tilde{\psi},$$
$$\tilde{\psi}_t = -i\left(4u\xi^2 - 2u_x\xi + u_{xx} + 2u^2\right)\tilde{\varphi} - \left(4\xi^3 + 2u^2\xi\right)\tilde{\psi},$$

where $\lambda = 4\xi^2$.

We get rid of irrationality in identity (5.4) by squaring and then rewrite the result as

$$\frac{W_{xx}^2}{u^2} - 2\lambda\frac{WW_{xx}}{u^2} + \lambda^2\frac{W^2}{u^2} + 4W_x^2 - 4\lambda W^2 - 4C = 0.$$

Then we differentiate the obtained equation with respect to x. The found equation turns out to be linear

$$W_{xxx} - \frac{u_x}{u}W_{xx} + 4u^2W_x = \lambda\left(W_x - \frac{u_x}{u}W\right).$$

Actually, it defines a linear invariant manifold, consistent with the equation (5.3). Let us rewrite it in the form

$$L_2W = \lambda L_1W, \tag{5.6}$$

where

$$L_1 = D_x - \frac{u_x}{u}, \quad L_2 = D^3 - \frac{u_x}{u}D_{xx} + 4u^2D_x.$$

Since $U = W_x$ from (5.6) we get a relation

$$L_2D_x^{-1}U = \lambda L_1D_x^{-1}U$$

for the solution U of linearization (5.2) of mKdV equation (5.1). The latter allows to get the recursion operator for (5.1):

$$R = D_xL_1^{-1}L_2D_x^{-1} = D_x^2 + 4u^2 + 4u_xD_x^{-1}u. \tag{5.7}$$

6. Appendix

Let us show how equations (3.4) are constructed. The aforementioned consistency condition for equations (3.2) and (3.3) is written as

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(U_{xx} + 4uvU + 2u^2V\right) - i\frac{\partial}{\partial t}\left(f(U,V,u,v)\right)\Big|_{(3.1),(3.2),(3.3)} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-V_{xx} - 2v^2U - 4uvV\right) - i\frac{\partial}{\partial t}\left(g(U,V,u,v)\right)\Big|_{(3.1),(3.2),(3.3)} = 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

We regard variables u, v and their derivatives with respect to x and U, V as independent. The variables u_t, v_t, U_t, V_t, D_x^kU, D_x^kV, where $k \geq 1$, in identities (6.1), will be excluded by virtue of equations (3.1),(3.2) and (3.3). Then we get an overdetermined system of equations:

$$F(U,V,u,v,u_x,v_x,v_{xx}) = 0,$$
$$G(U,V,u,v,u_x,v_x,u_{xx}) = 0.$$

In the obtained relations, we equate the coefficients at independent variables u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx} and step by step we determine the form of the sought functions $f(U,V,u,v)$ and $g(U,V,u,v)$.

We compare the coefficients at the highest derivatives of functions u and v, i.e., at u_{xx} and v_{xx}, as well as at u_x^2 and v_x^2, then we get:

$$
\begin{aligned}
f(U,V,u,v) &= f_1(U,V)u + f_2(U,V),\\
g(U,V,u,v) &= g_1(U,V)v + g_2(U,V).
\end{aligned}
$$

Note that the dependence of functions $f(U,V,u,v)$ and $g(U,V,u,v)$ on the variables u and v is defined, so we can equate the coefficients at these variables.

Analyzing the equations obtained by comparing the coefficients at u_x, v_x, u and v, we determine the form of functions $f_1(U,V)$, $f_2(U,V)$ and $g_1(U,V)$, $g_2(U,V)$:

$$
\begin{aligned}
f_1(U,V) &= \sqrt{-4UV + c_1}, \quad & f_2(U,V) &= c_2U + c_3,\\
g_1(U,V) &= \sqrt{-4UV + c_4}, \quad & g_2(U,V) &= c_5V + c_6.
\end{aligned}
$$

By considering the remaining equations, we obtain a relationship between the constant parameters c_i, $i = \overline{1,6}$:

$$
c_4 = c_1, \qquad c_5 = -c_2, \qquad c_3 = c_6 = 0.
$$

Thus, the functions $f(U,V,u,v)$ and $g(U,V,u,v)$ read as

$$
\begin{aligned}
f(U,V,u,v) &= \lambda U - 2u\sqrt{C - UV},\\
g(U,V,u,v) &= -\lambda V - 2v\sqrt{C - UV},
\end{aligned}
$$

where $\lambda = c_2$, $C = \frac{1}{4}c_1$.

Conclusion

In the article we have discussed the notion of the generalized invariant manifold for the nonlinear partial differential equations. We have found such manifolds for the nonlinear Scrödinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation. We illustrated that this object provides an effective tool for constructing the recursion operator and the Lax pair. We have shown that the well-known Dubrovin equation, which is an important ingredient in the finite-gap integration method, can be easily derived from a suitably selected generalized invariant manifold.

REFERENCES

1. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, M.N. Poptsova. *On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **49**:3, 35 pp. (2016).
2. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Invariant manifolds and Lax pairs for integrable nonlinear chains* // Theor. Math. Phys. **191**:3, 793–810 (2017).
3. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *On the recursion operators for integrable equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **51**:42, 22 pp. (2018).
4. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *A direct algorithm for constructing recursion operators and Lax pairs for integrable models* // Theor. Math. Phys. **196**:2, 1200–1216 (2018).
5. A.R. Khakimova. *On desription of generalized invariant manifolds for nonlinear equations* // Ufa Math. J., **10**:3, 106–116 (2018).
6. E.V. Pavlova, I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *On One Integrable Discrete System* // J. Math. Sci. **241**:4, 409–422 (2019).
7. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Invariant manifolds and separation of the variables for integrable chains* // J. Phys. A: Math. Theor. **53**:39, 25 pp. (2020).
8. B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov. *Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties* // Russian Math. Surveys **31**:1, 59–146 (1976).
9. I.M. Krichever. *Integration of nonlinear equations by methods of algebraic geometry* // Funct. Anal. Appl. **11**:1, 12–26 (1977).
10. V. Kotlyarov, A. Its. *Periodic problem for the nonlinear Schrödinger equation* // Preprint: arXiv:1401.4445 (2014).

11. A.O. Smirnov. *Elliptic solutions of the nonlinear Schrödinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation* // Russian Acad. Sci. Sb. Math. **82**:2, 461–470 (1995).
12. A.O. Smirnov. *Two-gap elliptic solutions to integrable nonlinear equations* // Math. Notes **58**:1, 735–743 (1995).
13. V.E. Zakharov, A.B. Shabat. *Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media* // Sov. Phys. JETP **34**:1, 62 pp. (1972).
14. D.H. Peregrine. *Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions* // J. Austral. Math. Soc., Ser. B **25**:1, 16–43 (1983).
15. F. Demontis. *Exact solutions of the modified Korteweg-de Vries equation* // Theor. Math. Phys. **168**:1, 886–897 (2011).
16. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Solutions of the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy equations of the "rogue wave" type: A unified approach* // Theor. Math. Phys. **186**:2, 156–182 (2016).

Ismagil Talgatovich Habibullin,
Institute of Mathematics,
Ufa Federal Research Center, RAS,
Chernyshevsky str., 112,
450008, Ufa, Russia
E-mail: `habibullinismagil@gmail.com`

Aigul Rinatovna Khakimova,
Institute of Mathematics,
Ufa Federal Research Center, RAS,
Chernyshevsky str., 112,
450008, Ufa, Russia
E-mail: `aigul.khakimova@mail.ru`

Aleksandr Olegovich Smirnov,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
Bol'shaya Morskaya str., 67,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: `alsmir@guap.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 158-165.

Dedicated to our master Alexei Shabat
and our colleague and good friend Ravil Yamilov

YAMILOV'S THEOREM FOR DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

DECIO LEVI, MIGUEL A. RODRÍGUEZ

Abstract. S-integrable scalar evolutionary differential difference equations in 1+1 dimensions have a very particular form described by Yamilov's theorem. We look for similar results in the case of S-integrable 2-dimensional partial difference equations and 2-dimensional partial differential equations. To do so, on one side we discuss the semi-continuous limit of S-integrable quad equations and on the other, we semi-discretize partial differential equations. For partial differential equations, we show that any equation can be semi-discretized in such a way to satisfy Yamilov's theorem. In the case of partial difference equations, we are not able to find a form of the equation such that its semi-continuous limit always satisfies Yamilov's theorem. So we just present a few examples, in which to get evolutionary equations, we need to carry out a skew limit. We also consider an S-integrable quad equation with non-constant coefficients which in the skew limit satisfies an extended Yamilov's theorem as it has non-constant coefficients. This equation turns out to be a subcase of the Yamilov discretization of the Krichever-Novikov equation with non-constant coefficient, an equation suggested to be integrable by Levi and Yamilov in 1997 and whose integrability has been proved only recently by algebraic entropy. If we do a strait limit, we get non-local evolutionary equations, which show that an extension of Yamilov's theorem may exist in this case.

Keywords: differential difference equations, continuous and discrete integrable systems, Yamilov's theorem.

Mathematics Subject Classification: 39A14, 35Q53

1. Introduction

Integrability properties of differential difference (DΔEs) or partial difference equations (PΔEs) have been thoroughly studied along the last decades, following several approaches and criteria to characterize these equations (see, among many others, references [1], [6], [9], [13]). In the case of $1+1$ DΔEs, Yamilov's theorem [10], [11], [13] provides a necessary condition for the existence of a large number of conserved quantities of S-integrable equations [5]. This is reflected in a certain symmetry of the points involved in the equation.

By this work, we start a project aiming on characterizing S-integrable equations in total, i.e. non only DΔEs but also either partial differential equations (PDEs) or PΔEs.

As a part of this project, we plan to extend Yamilov's result to other classes of equations. To do so, in this work we provide some examples of integrable quad equations whose partial continuous limits satisfy Yamilov's condition. Moreover, we show that each PDE can be partially discretized into a DΔE, which satisfies Yamilov's theorem.

D. Levi, M.A. Rodríguez, Yamilov's theorem for differential and difference equations.

© D. Levi, M.A. Rodríguez. 2021.

MAR was partially supported by Spain's Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades under grant PGC2018-094898-B-I00, as well as by Universidad Complutense de Madrid under grant G/6400100/3000.

Submitted March 11, 2021.

In Section 2 we present a brief description of Yamilov's theorem and in the following Section its consequences for PDEs. Section 4 is devoted to the partial continuous limit for quad-graph equations, PΔEs defined on a square, and in Section 5 we summarize our results and present some plans for future works on this project.

2. Yamilov's theorem

As we have written above, Yamilov's theorem gives a necessary condition for a 1+1 DΔEs to admit higher order conservation laws. Following [10], [11], [13], the search for these equations yields the conclusion that only symmetrical (in a sense to be detailed below) equations have this property. Let us consider a one-dimensional lattice, labeled by $n \in \mathbb{Z}$, and a function $u_n(t)$ of a continuous variable t (real or complex), which takes values at the lattice points. We are interested in DΔEs of the type:

$$\dot{u}_n = f(u_{n+N}, u_{n+N-1}, \dots, u_{n+M}) \equiv f_n, \tag{2.1}$$

where the dot above u_n denotes the derivative with respect to t, $N > M$ and the function f truly depends on u_{n+N} and u_{n+M}. A conservation law for this equation is a relation of the form:

$$D_t p_n = (T-1) q_n,$$

where p_n, the conserved density, and q_n are functions of $(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k})$ (k is a finite integer number called the order),

T is the shift operator, $(T\phi_n = \phi_{n+1})$ and D_t the total derivative with respect to t:

$$D_t = \sum_{i=0}^{k} f_{n+i} \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}.$$

Yamilov's theorem provides a condition on the form of equation (2.1) ensuring that it has conservation laws.

Theorem 2.1. *If* (2.1) *possesses a conservation law of order* $m > \min\{|N|, |M|\}$*, then* $N = -M$*,* $N > 0$*.*

The proof of this theorem is based on a detailed studying of the variational derivative of the conserved density p_n of equation (2.1), which exists due to its S-integrability, see [10], [11], [13].

3. Discussion of PDEs from the point of view of Theorem 2.1

According Theorem 2.1, if (2.1) is an S-integrable DΔE and if the function f_n contains the highest shift u_{n+N}, then it should also contain a lowest shift u_{n-N}. Defining

$$v_k^{(\pm)} = u_{n+k} \pm u_{n-k}, \tag{3.1}$$

we can rewrite (2.1) in the S-integrable case as

$$\dot{u}_n = f(v_N^{(+)}, v_N^{(-)}, v_{N-1}^{(+)}, v_{N-1}^{(-)}, \cdots, v_1^{(+)}, v_1^{(-)}, u_n). \tag{3.2}$$

To perform the continuous limit, we define $x = nh$ and, as $h \to 0$, we write the following Taylor expansion

$$u_{n\pm j} = w(x \pm jh) = w(x) \pm j\, h\, w_x + \frac{1}{2} j^2\, h^2 w_{2x} \pm \frac{1}{3!} j^3\, h^3 w_{3x} + \frac{1}{4!} j^4\, h^4 w_{4x} + \cdots, \tag{3.3}$$

where w_{nx} is the n-th derivative of $w(x)$ with respect to x. In this way, we can write a list of Taylor expansions for $v_j^{(\pm)}$. For the lowest values of j we have:

$$\begin{aligned}
v_1^{(+)} =& 2w(x) + h^2 w_{2x} + \frac{h^4}{12} w_{4x} + \cdots ,\\
v_1^{(-)} =& 2hw_x + \frac{1}{3}h^3 w_{3x} + \cdots ,\\
v_2^{(+)} =& 2w(x) + 4h^2 w_{2x} + \frac{4}{3}h^4 w_{4x} + \cdots ,\\
v_2^{(-)} =& 4hw_x + \frac{8}{3}h^3 w_{3x} + \cdots ,\\
v_3^{(+)} =& 2w(x) + 9h^2 w_{2x} + \frac{27}{4}h^4 w_{4x} + \cdots .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Consequently, we can express all derivatives of the function $w(x)$ in terms of the Taylor expansions of $v_j^{(\pm)}$ up to order h^2. Here we present the leading terms:

$$\begin{aligned}
w_x =& \frac{1}{2h} v_1^{(-)} + \mathcal{O}(h^2),\\
w_{2x} =& \frac{1}{3h^2}[v_2^{(+)} - v_1^{(+)}] + \mathcal{O}(h^2),\\
w_{3x} =& \frac{1}{2h^3}[v_2^{(-)} - 2v_1^{(-)}] + \mathcal{O}(h^2),\\
w_{4x} =& \frac{1}{10h^4}[3v_3^{(+)} - 8v_2^{(+)} + 5v_1^{(+)}] + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

As all continuous derivatives can be expressed in terms of symmetric differences, by Theorem 2.1, we do have *no constraints* on the form of an S-integrable PDE. This result agrees with what we know about S-integrable PDEs.

4. Discussion of PΔEs from the point of view of Theorem 2.1

In this section we discuss by examples the semi-continuous limit of S-integrable PΔEs.

4.1. Lattice potential Korteweg-de Vries equation. As an introduction to the procedure necessary to do the semi-continuous limit, we consider the well known example of the lattice potential Korteweg-de Vries (lpKdV) equation [2], [6], [12]:

$$(u_{n,m+1} - u_{n+1,m})(u_{n,m} - u_{n+1,m+1}) = p^2 - q^2, \tag{4.1}$$

where $u_{n,m}$ are the values of the variable u at the points of a two dimensional lattice labeled by the integers $n, m \in \mathbb{Z}$. Equation (4.1) is nothing else but the nonlinear superposition formula for the KdV. The parameters p, q are obtained in the construction of the lpKdV as the parameters of the sequence of two Bäcklund transformations which give the nonlinear superposition formula. The lpKdV satisfies the integrability property provided by the compatibility around the cube as shown in [2].

On (4.1) we will carry out a procedure to transform the discrete index m into a continuous variable t in such a way that equation (4.1) becomes an evolutionary DΔE for the unknown function $u_k(t)$ depending on a continuous variable t and a discrete index k.

The base of the method is the Taylor expansion in a parameter ϵ of $u_{n,m}$ at a particular solution u_0 of the equation. Both the index m and the corresponding parameter q will depend on ϵ. As a particular solution, it is convenient to use a simple function which, in this case, is given by $u_0 = pn + qm$. By the change of variables

$$u_{n,m} = v_{n,m} - u_0 \tag{4.2}$$

equation (4.1) becomes

$$(p - q + v_{n,m+1} - v_{n+1,m})(p + q + v_{n,m} - v_{n+1,m+1}) = p^2 - q^2, \tag{4.3}$$

which has as a solution $v_0 = 0$.

A simple approach to the continuous limit when m goes to infinity and ϵ goes to zero in such a way that $m\epsilon$ is finite is the following. We define a new function $V_n(t) = v_{n,m}$ and a continuous variable $t = t_0 + m\epsilon$ such that

$$v_{n,m+j} = V_n(t) + j\epsilon \dot{V}_n(t) + O(\epsilon^2). \tag{4.4}$$

Moreover, we define a parameter q as

$$q = \epsilon^{-1}. \tag{4.5}$$

Substituting (4.4), (4.5) into (4.3), we see that coefficient at ϵ^{-1} vanishes, while the zero order term yields the equation

$$\dot{V}_n + \dot{V}_{n+1} = (V_{n+1} - V_n)[2p - (V_{n+1} - V_n)]. \tag{4.6}$$

Equation (4.6) is a nonlocal DΔE which has derivatives with respect to t at two different points of the lattice n and $n+1$. To obtain an evolutionary DΔE with a derivative just at one point, we have to mix the indices in the lattice, a skew limit as is called in [6]. We let $k = n + m$ and introduce a new variable $w_{k,m}$ such that

$$v_{n+i,m+j} = w_{k+i+j,m+j}. \tag{4.7}$$

Then (4.3) is transformed into

$$(p - q + w_{k+1,m+1} - w_{k+1,m})(p + q + w_{k,m} - w_{k+2,m+1}) = p^2 - q^2. \tag{4.8}$$

In this case, defining as above $U_k(t) = w_{k,m}$ with $q = p + \epsilon$, the ϵ^0 term vanishes and at first order we get:

$$\dot{U}_k = \frac{U_{k-1} - U_{k+1}}{U_{k-1} - U_{k+1} + 2p}. \tag{4.9}$$

Equation (4.9) is an evolutionary DΔE, with terms at points $k-1$, k and $k+1$, which thus satisfies Yamilov's condition of S-integrability.

4.2. Integrable map obtained by factorization.

Let us consider a nonlinear PΔE:

$$\begin{aligned} c_1 u_{n,m} u_{n+1,m} + c_2(u_{n,m} u_{n+1,m+1} + u_{n+1,m} u_{n,m+1}) + c_3 u_{n,m+1} u_{n+1,m+1} \\ + c_5 u_{n,m} u_{n,m+1} + c_6 u_{n+1,m} u_{n+1,m+1} = 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

an example taken from [7], [11]. Equation (4.10) has been proven to be integrable for all values of constants c_i by checking its algebraic entropy.

In the particular case $c_1 = c_5$ and $c_6 = c_3$, the equation is invariant under the swapping of n and m.

4.2.1. Continuous limit $t = \epsilon m$ and $u_{n,m} = v_n(t)$.

We have:

$$\begin{aligned} c_5 v_n^2 + c_6 v_{n+1}^2 + (c_1 + 2c_2 + c_3) v_n v_{n+1} \\ + \epsilon(c_5 v_n \dot{v}_n + c_6 v_{n+1} \dot{v}_{n+1} + (c_2 + c_3)(v_{n+1}\dot{v}_n + v_n \dot{v}_{n+1})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

The terms of zero order in ϵ do not involve the derivatives in t. Hence, in order to get a DΔE, we have to suppose that the coefficients c_i depend on ϵ. We have the following possibilities:

1. $c_5 = \alpha_5\epsilon$, $c_6 = \alpha_6\epsilon$, $c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$,

$$(c_1 + c_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_n v_{n+1}) = \alpha_5 v_n^2 + \alpha_6 v_{n+1}^2 = 0, \tag{4.12}$$

2. $c_5 = c_6 = 0$, $c_1 + 2c_2 + c_3 = \alpha_{123}\epsilon$

$$(c_1 + c_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_n v_{n+1}) = \alpha_{123} v_n v_{n+1}. \tag{4.13}$$

In the first case, the obtained equation is nonlocal. In the second case we have an ODE for $v_n v_{n+1}$. Then, as for the lpKdV equation, we pass to a rhombic lattice.

Under the change of variables $k = n + m + 1$ and $w_{k+i+j,m+j} = u_{n+i,m+j}$, equation (4.10) becomes

$$\begin{aligned} c_1 w_{k-1,m} w_{k,m} + c_2(w_{k,m} w_{k,m+1} + w_{k-1,m} w_{k+1,m+1}) + c_3 w_{k,m+1} w_{k+1,m+1} \\ + c_5 w_{k-1,m} w_{k,m+1} + c_6 w_{k,m} w_{k+1,m+1} = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Letting

$$t = n\epsilon, \qquad w_{k,n} = U_k(t), \tag{4.15}$$

we transform equation (4.14) into

$$\begin{aligned} &(c_1 + c_5)U_{k-1}U_k + (c_3 + c_6)U_k U_{k+1} + c_2(U_{k-1}U_{k+1} + U_k^2) \\ &\quad + \epsilon\big((c_2 U_{k-1} + (c_3 + c_6)U_k)\dot{U}_{k+1} + (c_5 U_{k-1} + c_2 U_k + c_3 U_{k+1})\dot{U}_k\big) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

To get a DΔE, at the lowest order in ϵ we need to set

$$c_1 + c_5 = \epsilon\alpha, \qquad c_3 + c_6 = \epsilon\beta, \qquad c_2 = \epsilon\gamma, \tag{4.17}$$

and choose c_1 and c_6 of order one. In this way, at the lowest order in ϵ we get

$$(c_6 U_{k+1} + c_1 U_{k-1})\dot{U}_k - (\beta U_{k+1} + \gamma U_k + \alpha U_{k-1})U_k - \gamma U_{k-1}U_{k+1} = 0. \tag{4.18}$$

Equation (4.18) satisfies Yamilov S-integrability theorem. Thus, for all values of c_i, equation (4.10) is an S-integrable and the result obtained by the algebraic entropy is shown to be correct.

4.3. H2 equation: a more complicate equation of the ABS classification. The H2 equation

$$\begin{aligned} &(u_{n,m} - u_{n+1,m+1})(u_{n+1,m} - u_{n,m+1}) \\ &\quad + (\beta - \alpha)(u_{n,m} + u_{n+1,m} + u_{n,m+1} + u_{n+1,m+1}) - \alpha^2 + \beta^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

is another of the discrete integrable equations in the Adler-Bobenko-Suris list, see [2] and [11].

As in other cases, we admit that the constants α and β depend on the parameter ϵ, in which we carry out the limiting process. We follow the approach, which uses as starting point a background solution provided by equation (4.7a) in [8].

Following [8], we redefine the parameters of H2 (4.19):

$$p = r - a^2, \quad q = r - b^2,$$

and get the equation:

$$\begin{aligned} &(u_{n,m} - u_{n+1,m+1})(u_{n+1,m} - u_{n,m+1}) \\ &\quad + (a^2 - b^2)(u_{n,m} + u_{n+1,m} + u_{n,m+1} + u_{n+1,m+1} + 2r - a^2 - b^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Among others, equation (4.20) has the solution

$$u_0 = (an + bm + \gamma)^2 - \frac{1}{2}r. \tag{4.21}$$

Making the change (4.2) in (4.21), we can rewrite (4.20) as:

$$\begin{aligned} &(v_{n,m} - v_{n+1,m+1})(v_{n+1,m} - v_{n,m+1}) \\ &\quad + 2(a - b)((a(n+1) + b(m+1) + \gamma)v_{n,m} - (an + bm + \gamma)v_{n+1,m+1}) \\ &\quad - 2(a + b)((an + b(m+1) + \gamma)v_{n+1,m} - (a(n+1) + bm + \gamma)v_{n,m+1}) = 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

which has the solution $v_0 = 0$.

In order to take the skew limit in one of the indices, as in the previous section we define $k = n + m$ and a new field $w_{k,m}$ according to (4.7). Then (4.22) is transformed into

$$\begin{aligned}(w_{k,m} - w_{k+2,m+1})(w_{k+1,m} - v_{k+1,m+1}) + 2(a-b)((a(k-m+1) + b(m+1) + \gamma)w_{k,m} \\ - (a(k-m) + bm + \gamma)w_{k+2,m+1}) - 2(a+b)((a(k-m) + b(m+1) + \gamma)w_{k+1,m} \\ - (a(k-m+1) + bm + \gamma)w_{k+1,m+1}) = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

In order to take the continuous limit in the index m, we replace a and b by $\epsilon\tilde{a}$ and $\epsilon\tilde{b}$ and we define

$$w_{k+i,m} = U_{k+i}(t), \quad w_{k+i,m+j} \to U_{k+i}(t) + \epsilon\, j\, \dot{U}_{k+i}(t) + O(\epsilon^2).$$

Then, the lower order terms of (4.23) are

$$\begin{aligned}&(U_k - U_{k+2} - \epsilon\,\dot{U}_{k+2})(U_{k+1} - U_{k+1} - \epsilon\,\dot{U}_{k+1}) \\ &\quad + 2\epsilon(\tilde{a} - \tilde{b})((\epsilon\,\tilde{a}(k-m+1) + \epsilon\,\tilde{b}(m+1) + \gamma)U_k \\ &\quad - (\epsilon\,\tilde{a}(k-m) + \epsilon\,\tilde{b}m + \gamma)(U_{k+2} + \epsilon\,\dot{U}_{k+2})) \\ &\quad - 2\epsilon(\tilde{a} + \tilde{b})((\epsilon\,\tilde{a}(k-m) + \epsilon\,\tilde{b}(m+1) + \gamma)U_{k+1} \\ &\quad - (\epsilon\,\tilde{a}(k-m+1) + \epsilon\,\tilde{b}m + \gamma)U_{k+1} + \epsilon\,\dot{U}_{k+1})) + \cdots = 0,\end{aligned} \tag{4.24}$$

which has no order zero term. The first order term of (4.24) is

$$\dot{U}_k = 2\gamma(\tilde{a} - \tilde{b})(U_{k-1} - U_{k+1}), \tag{4.25}$$

and this is an equation satisfying Yamilov's theorem.

4.4. Equation ${}_rH_1^\epsilon$ from ABS extended classification. We consider the following equation:

$$\begin{aligned}{}_rH_1^\epsilon =&(\alpha - \beta)\left(\epsilon^2\chi_{m+n}u_{n+1,m}u_{n,m+1} + \epsilon^2\chi_{m+n+1}u_{n+1,m+1}u_{n,m} - 1\right) \\ &+ (u_{n,m} - u_{n+1,m+1})(u_{n+1,m} - u_{n,m+1}) = 0,\end{aligned} \tag{4.26}$$

where α, β, ϵ are three parameters, which could depend on the steps of the lattice and

$$\chi_m = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^m\right). \tag{4.27}$$

Equation (4.26) is an S-integrable equation of Boll classification [4] appearing in the ABS list [3], [11].

As in the previous case, we transform the variable $u_{n,m} \to v_{n,m}$ in such a way that the resulting equation has $v_0 = 0$ as a particular solution:

$$u_{n,m} = v_{n,m} + f,$$

where f, a constant, must satisfy the identity

$$(\alpha - \beta)(\epsilon^2 f^2 - 1) = 0. \tag{4.28}$$

Choosing one of the two signs for f in (4.28) with $\epsilon \neq 0$, we get:

$$u_{n,m} = v_{n,m} + \frac{1}{\epsilon}. \tag{4.29}$$

The equation for $v_{n,m}$ is

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\chi_{n+m+1}(1 + \epsilon v_{n,m})(1 + \epsilon v_{n+1,m+1}) + \chi_{n+m}(1 + \epsilon v_{n,m+1})(1 + \epsilon v_{n+1,m}) - 1) \\ + (v_{n+1,m} - v_{n,m+1})(v_{n,m} - v_{n+1,m+1}) = 0\end{aligned} \tag{4.30}$$

and $v_0 = 0$ is a solution of (4.30).

In order to take a semi-continuous skew limit, we first modify the lattice from a rectangular one to an oblique lattice by defining a new index $k = n + m$ and leaving m as it is. Then we take the continuous limit in the m direction of the new lattice. The equation with $w_{k,m}$ defined as in (4.7) now reads as

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\chi_{k+1}(1+\epsilon w_{k,m})(1+\epsilon w_{k+2,m+1})+\chi_k(1+\epsilon w_{k+1,m+1})(1+\epsilon w_{k+1,m})-1)\\ +(w_{k+1,m}-w_{k+1,m+1})(w_{k,m}-w_{k+2,m+1})=0.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Taking the continuous limit in the m direction and assuming that the order parameter is ϵ, we find that

$$w_{k+i,m}=U_{k+i}, \qquad w_{k+i,m+1}=U_{k+i}+\epsilon\dot{U}_{k+i}+O(\epsilon^2), \tag{4.32}$$

and substituting (4.32) in (4.31), we get

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)(\chi_{k+1}(1+\epsilon U_k)(1+\epsilon(U_{k+2}+\epsilon\dot{U}_{k+2}+O(\epsilon^2)))\\ &\quad+\chi_k(1+\epsilon(U_{k+1}+\epsilon\dot{U}_{k+1}+O(\epsilon^2)))(1+\epsilon U_{k+1})-1)\\ &\quad+(U_{k+1}-U_{k+1}-\epsilon\dot{U}_{k+1}O(\epsilon^2))(U_k-U_{k+2}-\epsilon\dot{U}_{k+2}+O(\epsilon^2))=0.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Taking into consideration the definition (4.27) of χ_m, we see that the zero order terms in (4.33) vanish. The first order terms are

$$(\alpha-\beta)(\chi_{k+1}(U_k+U_{k+2})+2\chi_k U_{k+1})-(U_k-U_{k+2})\dot{U}_{k+1}=0. \tag{4.34}$$

Equation (4.34) is a DΔE satisfying an extension of Yamilov's theorem when the function f appearing in (2.1) depends explicitly on the index n:

$$\dot{U}_k=(\alpha-\beta)\frac{2\chi_{k-1}U_k+\chi_k(U_{k-1}+U_{k+1})}{U_{k-1}-U_{k+1}}. \tag{4.35}$$

Equation (4.35) is a subcase of the k-dependent generalization of the Yamilov discretization of the Krichever-Novikov equation postulated in [9] and discussed in [11].

5. Conclusions

In this paper we have discussed Yamilov's theorem on the form of evolutionary DΔEs from the point of view of its consequences for PDEs and PΔEs. In particular, we have shown that this theorem have no implication for the S-integrability of PDEs.

We have not been able to have such complete result in the case of PΔEs. In all considered cases, the theorem is satisfied, even in the case of PΔEs with non-constant coefficients.

Often, unless we use the skew limit, we obtain nonlocal evolutionary PΔEs. Some natural questions are

- Is there an extension of Theorem 2.1 when the function f depends explictly on n?
- Is (4.6) also S-integrable?
- Is there an extension of Theorem 2.1 which shows the S-integrability of (4.6)?
- Has Theorem 2.1 implications for the construction of numerical schemes for S-integrables PDEs?

We plan to continue this research by answering these questions and looking for a compulsory shape in the case of S-integrable PΔEs.

REFERENCES

1. M. Ablowitz, J. Ladik. *Nonlinear differential-difference equations* // J. Math. Phys. **16**:3, 598–603 (1975).
2. V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Classification of Integrable Equations on Quad-Graphs. The Consistency Approach* // Comm. Math. Phys. **233**:3, 513–543 (2003).
3. V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Discrete nonlinear hyperbolic equations: classification of integrable cases* // Funct. Anal. Appl. **43**:1, 3–17 (2009). [arXiv:0705.1663].
4. R. Boll. *Classification of 3D consistent quad-equations* // J. Nonlin. Math. Phys. **18**:3, 337–365 (2011).

5. F. Calogero. *Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable* // in *What is integrability?*, ed. by V. E. Zakharov, Springer-Verlag, Berlin, 1–61 (1991).
6. J. Hietarinta, N. Joshi, F.W. Nijhoff. *Discrete systems and integrability*, Cambridge University Press, Cambridge (2016).
7. J. Hietarinta, C. Viallet. *Searching for integrable lattice maps using factorization* // J. Phys. A: Math. Theor. **40**:42, 12629–12643 (2007).
8. J. Hietarinta, D. Zhang. *Soliton solutions for ABS lattice equations: II. Casoratians and bilinearization* // J. Phys. A: Math. Theor. **42**:40, 404006 (2009).
9. D. Levi, R. Yamilov. *Conditions for the existence of highers symmetries of evolutionary equations on the lattice* // J. Math. Phys. **38**:12, 6648–6674 (1997).
10. D. Levi, R.I. Yamilov. *Generalized Lie symmetries for difference equations* // in *Symmetries and integrability of difference equations*, ed. by D. Levi, P. Olver, Z. Thomova, P. Winternitz, Cambridge University Press, Cambridge, 160–190 (2011).
11. D. Levi, P. Winternitz, R.I. Yamilov. *Continuous Symmetries and Integrability of Discrete Equations*, Amer. Math. Soc. and the Centre de Recherches Mathématiques, to be published (2021).
12. F. Nijhoff, H. Capel. *The discrete Korteweg-de Vries equation* // Acta Appl. Math. **39**, 133–158 (1995).
13. R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**:45, R541–R623 (2006).

Decio Levi,
Mathematical and Physical Department
Roma Tre University
Via della Vasca Navale, 84,
I00146 Roma, Italy
E-mail: deciolevi_work@yahoo.com

Miguel A. Rodríguez,
Dept. Física Teórica
Universidad Complutense de Madrid
Pza. de las Ciencias, 1,
28040 Madrid, Spain
E-mail: rodrigue@ucm.es

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 166-175.

ON DARBOUX NON-INTEGRABILITY OF HIETARINTA EQUATION

S.YA. STARTSEV

Abstract. The autonomous Hietarinta equation is a well-known example of the quad-graph discrete equation which is consistent around the cube. In a recent work, it was conjectured that this equation is Darboux integrable, that is, for each of two independent discrete variables there exist non-trivial functions that remain unchanged on solutions of the equation after the shift in this discrete variable. We demonstrate that this conjecture is not true for generic values of the equation coefficients.

To do this, we employ two-point invertible transformations introduced by R.I. Yamilov. We prove that an autonomous difference equation on the quad-graph cannot be Darboux integrable if a transformation of the above type maps solutions of this equation into its solutions. This implies that the generic Hietarinta equation is not Darboux integrable since the Hietarinta equation in the general case possesses the two-point invertible auto-transformations. Along the way, all Darboux integrable subcases of the Hietarinta equation are found. All of them are reduced by point transformations to already known integrable equations.

At the end of the article, we also briefly describe another way to prove the Darboux non-integrability of the Hietarinta equation. This alternative way is based on the known fact that a difference substitution relates this equation to a linear one. Thus, the Hietarinta equation gives us an example of a quad-graph equation that is linearizable but not Darboux integrable.

Keywords: Hietarinta equation, quad-graph equation, Bäcklund auto-transformation, Darboux integrability, C-integrability.

Mathematics Subject Classification: 39A14, 37K05, 37K10, 37K35

1. Introduction

The Hietarinta equation

$$\frac{z_{n,m}+b}{z_{n,m}+a}\,\frac{z_{n+1,m+1}+d}{z_{n+1,m+1}+c}=\frac{z_{n+1,m}+b}{z_{n+1,m}+c}\,\frac{z_{n,m+1}+d}{z_{n,m+1}+a},\qquad n,m\in\mathbb{Z},\tag{1.1}$$

where the constants a, b, c and d satisfy the inequality $(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\neq 0$, gives an important example of the quad-graph difference equation which is consistent around the cube [1]. This example was introduced in [2] to illustrate that the tetrahedron property is not necessary for the consistency around the cube.

A non-autonomous version of the Hietarinta equation was recently studied in [3]. It turned out that this non-autonomous version was Darboux integrable. At the very end of [3], the authors raised the question of whether autonomous Hietarinta equation (1.1) is Darboux integrable as well. The main purpose of the present article is to answer this question and to demonstrate that this answer is negative for the generic values of the constants a, b, c and d.

S.Ya. Startsev, On Darboux non-integrability of the Hietarinta equation.

© S.Ya. Startsev. 2021.

Submitted February 21, 2021.

Let us recall that an equation of the form

$$u_{n+1,m+1} = F(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}), \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{n+1,m}} \frac{\partial F}{\partial u_{n,m+1}} \frac{\partial F}{\partial u_{n,m}} \neq 0 \tag{1.2}$$

is called *Darboux integrable* if there exist functions $\Omega_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, \ldots, u_{n+p,m})$, $p > 0$, and $\bar{\Omega}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \ldots, u_{n,m+\bar{p}})$, $\bar{p} > 0$, such that they essentially depend on $u_{n,m}$ and their last arguments ($u_{n+p,m}$ for $\Omega_{n,m}$ and $u_{n,m+\bar{p}}$ for $\bar{\Omega}_{n,m}$) and satisfy the relations

$$\Omega_{n,m+1}(u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}, \ldots, u_{n+p,m+1}) = \Omega_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, \ldots, u_{n+p,m}), \tag{1.3}$$

$$\bar{\Omega}_{n+1,m}(u_{n+1,m}, u_{n+1,m+1}, \ldots, u_{n+1,m+\bar{p}}) = \bar{\Omega}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \ldots, u_{n,m+\bar{p}}) \tag{1.4}$$

for all n, m and each solution u of the equation. In other words, $\Omega_{n,m}$ and $\bar{\Omega}_{n,m}$ remain unchanged on solutions of (1.2) after the shifts in m and n, respectively. The functions $\Omega_{n,m}$ and $\bar{\Omega}_{n,m}$ are respectively called an *n-integral of order p* and an *m-integral of order $\bar{p}$* for the equation (1.2).

It should be stressed that we eliminate all variables of the form $u_{n+i,m+j}$, $i \cdot j \neq 0$, via equation (1.2) to check whether a relation (in particular, relations (1.3), (1.4)) holds on solutions of the equation. That is, we substitute $F(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1})$ for $u_{n+1,m+1}$,

$$F\left(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}, F(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1})\right) \quad \text{for} \quad u_{n+2,m+1}$$

and so on. A relation holds on solutions of the equation if and only if this relation holds identically after the above substitutions. These substitutions show why we can assume without loss of generality that the integrals are independent of the variables of the form $u_{n+i,m+j}$, $i \cdot j \neq 0$. In addition, after eliminating these variables from the defining relations of the integrals, the independence of $\Omega_{n,m}$ and $\bar{\Omega}_{n,m}$ of the variables $u_{n,m+j}$ and $u_{n+i,m}$ follows directly from (1.3) and (1.4), respectively; see, for example, Lemma 1 in [4] for more details.

Remark 1.1. *We note that defining relation* (1.3) *can be considered for each n separately, and the corresponding $\Omega_{n,m}$ may be chosen quite differently for different n. For example, we can set $\Omega_{n,m}$ equal to constants for some values of n and to non-constant 'solutions' of* (1.3) *(if they exist) for other n. But, since* (1.2) *is explicitly independent of n, we can choose $\Omega_{n,m}$ same for all n and assume without loss of generality that it is explicitly independent of n, too. Under this assumption and by using the inequality in* (1.2)*, it can be proved that $\Omega_{n,m}$ must depend on its first and last arguments for all n and m if $\Omega_{n,m}$ depends on these arguments for at least some m and satisfies* (1.3) *for all m. Of course, the same (up to the interchange $n \leftrightarrow m$) is also true for* (1.4) *and $\bar{\Omega}_{n,m}$.*

A simple example of Darboux integrable equation is the 'multiplicative' discrete wave equation

$$u_{n+1,m+1} = \frac{u_{n+1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m}} \tag{1.5}$$

admitting the integrals

$$\Omega_{n,m} = \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}, \qquad \bar{\Omega}_{n,m} = \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}}.$$

We can modify (1.5) by the point transformation $\tilde{u}_{n,m} = \zeta_{n,m} u_{n,m}$, where $\zeta_{n,m} = -1$ if both n and m are odd, and $\zeta_{n,m} = 1$ otherwise. This gives the autonomous equation

$$\tilde{u}_{n+1,m+1} = -\frac{\tilde{u}_{n+1,m} \tilde{u}_{n,m+1}}{\tilde{u}_{n,m}} \tag{1.6}$$

that admits the integrals

$$\Omega_{n,m} = (-1)^m \frac{\tilde{u}_{n+1,m}}{\tilde{u}_{n,m}}, \qquad \bar{\Omega}_{n,m} = (-1)^n \frac{\tilde{u}_{n,m+1}}{\tilde{u}_{n,m}}.$$

We observe that these integrals are non-autonomous, i.e., they explicitly depend on m and n. The last example looks contrived since the equations (1.5) and (1.6) are, in fact, same. However, some other autonomous quad-graph equations with non-autonomous integrals can be found, for example, in [5]. Thus, we may not exclude non-autonomous integrals from consideration when we check an autonomous equation for the Darboux integrability.

It is interesting that the non-autonomous Hietarinta equation in [3] is reduced to (1.6) by a non-autonomous Möbius transformations, while the work [2] relates the equation (1.1) to (1.5) by a point transformation in the case $|a-c|+|b-d|=0$ only. A less trivial example of Darboux integrable discrete equation is the equation

$$\frac{u_{n+1,m+1}}{u_{n,m+1}} = \frac{u_{n+1,m}+1}{u_{n,m}+1} \tag{1.7}$$

admitting the integrals

$$\frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}+1} \qquad \text{and} \qquad \frac{u_{n+2,m}-u_{n+1,m}}{u_{n+1,m}-u_{n,m}}.$$

This equation and its integrals were found in [5]. We show below that a point transformation reduce equation (1.1) to (1.7) in the case $a=c$, $b\neq d$ and to the equation obtained from (1.7) by interchanging $n\leftrightarrow m$ in the case $a\neq c$, $b=d$. Hence, equation (1.1) is Darboux integrable if $(a-c)(b-d)=0$. In the present paper, we prove that all other cases of the autonomous Hietarinta equation (1.1) are not Darboux integrable and, moreover, do not admit an integral even in one direction.

As it was demonstrated in [6], [7], the smallest orders of the integrals for Darboux integrable equations can be arbitrary high. To prove Darboux non-integrability, we therefore need to make sure that there are no integrals of order p for all p. Characteristic algebras [8] and Laplace invariants [9], [10] give strong and enough constructive necessary conditions for the existence of integrals of order p for the quad-graph equations, but these methods do not solve the problem of the arbitrariness of p. This is why the Darboux non-integrability of a quad-graph equation is not always obvious.

To demonstrate the absence of integrals for the generic equation (1.1), we employ some specific properties of the Heitarinta equation and prove theorems about the absence of integrals for any quad-graph equation with the same properties[1]. These properties are considered in the next section.

2. Hietarinta equation: transformations and Darboux integrable subcases

Following the work [11], it is convenient to make the point transformation

$$z_{n,m} = \frac{d-cu_{n,m}}{u_{n,m}-1} \tag{2.1}$$

in the equation (1.1), that is, we denote $\frac{z_{n,m}+d}{z_{n,m}+c}$ by $u_{n,m}$ and rewrite (1.1) in terms of this new variable. In the case $a\neq c$ this gives the equation

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m}+B)(u_{n,m+1}+A) = u_{n,m+1}(u_{n+1,m}+B)(u_{n,m}+A), \tag{2.2}$$

where $A=(d-a)/(a-c)$ and $B=(d-b)/(b-c)$. It should be noted that $A\neq B$ because

$$A-B = \frac{(d-c)(b-a)}{(a-c)(b-c)}$$

and the coefficients of (1.1) satisfy the conditions $d\neq c$ and $b\neq a$.

[1] But the author does not know other nonlinear examples of quad-graph equations with these properties.

If $a=c$, then (2.1) maps Hietarinta equation (1.1) into the equation

$$\frac{u_{n+1,m+1}}{u_{n,m+1}}=\frac{u_{n+1,m}+B}{u_{n,m}+B},$$

where the constant B again equals $(d-b)/(b-c)$. The last equation coincides with (1.5) if $B=0$. Otherwise, the scale transformation $u_{n,m}\to Bu_{n,m}$ relates this equation to (1.7).

In the case $B=0$, the equation (2.2) becomes

$$u_{n+1,m+1}\frac{u_{n,m+1}+A}{u_{n,m+1}}=u_{n+1,m}\frac{u_{n,m}+A}{u_{n,m}}.$$

Recall that $d\neq a$ for (1.1) and $A\neq 0$ for (2.2). Denoting $A/u_{n,m}$ by $v_{n,m}$, we obtain

$$\frac{v_{n+1,m+1}}{v_{n+1,m}}=\frac{v_{n,m+1}+1}{v_{n,m}+1}. \tag{2.3}$$

The last equation is Darboux integrable because it coincides with (1.7) up to the change of notation $v\to u$ and the interchange $n\leftrightarrow m$.

Summarizing the results of three previous paragraphs, we arrive at the following statement.

Proposition 2.1. *Hietarinta equation* (1.1) *is Darboux integrable if* $(a-c)(b-d)=0$. *In all other cases, point transformation* (2.1) *reduces* (1.1) *to equation* (2.2) *with non-zero constants* A *and* B *such that* $A\neq B$.

Below we prove that equation (2.2) is not Darboux integrable if $AB(A-B)\neq 0$. To do this, we employ two-point invertible transformations. Alike transformations for differential-difference and continuous analogues of the quad-graph equations were introduced in works [12] and [13], respectively. For discrete equations (1.2), such transformations were, in fact, used in [14] and then considered in a more explicit form in [15]. In particular, these transformations for (2.2) were briefly given in [15], and we reproduce them in the next two paragraphs with detailed calculations to make it easier for the reader to check them.

The mentioned transformation for (2.2) is as follows. We can rewrite (2.2) as

$$u_{n+1,m+1}\frac{u_{n,m+1}+A}{u_{n,m+1}}=\frac{(u_{n+1,m}+B)(u_{n,m}+A)}{u_{n,m}+B}. \tag{2.4}$$

We denote

$$v_{n,m}=u_{n+1,m}\frac{u_{n,m}+A}{u_{n,m}}-A. \tag{2.5}$$

Then equations (2.4) implies that

$$v_{n,m+1}=\frac{(u_{n+1,m}+B)(u_{n,m}+A)}{u_{n,m}+B}-A \tag{2.6}$$

by virtue (i.e., on solutions) of the equation (2.2). The next step is to resolve the system (2.5)-(2.6) with respect to $u_{n,m}$ and $u_{n+1,m}$, that is, to express $u_{n,m}$ and $u_{n+1,m}$ in terms of $v_{n,m}$ and $v_{n,m+1}$. Resolving (2.5) with respect to $u_{n+1,m}$, we obtain

$$u_{n+1,m}=\frac{u_{n,m}(v_{n,m}+A)}{u_{n,m}+A}. \tag{2.7}$$

The substitution of (2.7) into (2.6) results in

$$v_{n,m+1}=\frac{u_{n,m}(v_{n,m}+B)}{u_{n,m}+B}. \tag{2.8}$$

Resolving (2.8) with respect to $u_{n,m}$, we get

$$u_{n,m} = \frac{Bv_{n,m+1}}{B + v_{n,m} - v_{n,m+1}}. \tag{2.9}$$

Substituting (2.9) into (2.7), we find:

$$u_{n+1,m} = \frac{Bv_{n,m+1}(v_{n,m} + A)}{A(v_{n,m} + B) + (B - A)v_{n,m+1}}. \tag{2.10}$$

If we shift (2.9) by 1 in n and compare the result with (2.10), we obtain the equality

$$\frac{Bv_{n+1,m+1}}{B + v_{n+1,m} - v_{n+1,m+1}} = \frac{Bv_{n,m+1}(v_{n,m} + A)}{A(v_{n,m} + B) + (B - A)v_{n,m+1}}. \tag{2.11}$$

Resolving (2.11) with respect to $v_{n+1,m+1}$, we see that

$$v_{n+1,m+1}(v_{n,m} + B)(v_{n,m+1} + A) = v_{n,m+1}(v_{n+1,m} + B)(v_{n,m} + A).$$

The last equation coincides with (2.2) up to the change of notation $u \to v$. Thus, transformation (2.5) maps solutions of (2.2) into solutions of (2.2) again, that is, (2.5) is a Bäcklund auto-transformation for the Hietarinta equation (2.2).

Repeating the arguing in the previous paragraph in the inverse order, it is easy to confirm that

$$\bar{v}_{n,m} = \frac{Bu_{n,m+1}}{B + u_{n,m} - u_{n,m+1}},$$

is in fact (2.9) if we replace the notations as $u \to \bar{v}$, $v \to u$ and this is also an auto-transformation for equation (2.2). Indeed, starting from (2.11) and introducing $u_{n,m}$ by (2.9), we obtain (2.10). Equation (2.8) appears by solving (2.9) with respect to $v_{n,m+1}$, and (2.7) does by substituting (2.8) into (2.10). Equation (2.7) implies (2.5), and (2.6) is obtained by substituting (2.5) into (2.8). The comparison of (2.5) and (2.6) gives us the Heitarinta equation in form (2.4).

Remark 2.1. *Under the condition $B \neq 0$, all formulae* (2.4)-(2.11) *remain valid even if $A = 0$ or $A = B$. Thus,* (2.5) *and*

$$\bar{v}_{n,m} = \frac{Bu_{n,m+1}}{B + u_{n,m} - u_{n,m+1}}$$

are auto-transformations for (2.2) *in these cases, too. But* (2.2) *loses the dependence of $u_{n,m+1}$ or $u_{n,m}$ if $A = 0$ or $A = B$, respectively.*

3. Transformation of integrals

In this section, we formulate some general propositions that are applicable, in particular, to Hietarinta equation (2.2). The key propositions, Lemmata 3.1, 3.2, were proved in [16] in the case of autonomous integrals. For the reader's convenience and to demonstrate that these propositions remain valid for non-autonomous integrals too, below we reproduce corresponding (slightly modified) proofs from [16].

Lemma 3.1. *Let there exist functions $\varphi(x, y)$, $\varphi_y \neq 0$, and $\psi(x, y)$ such that the right-hand side of* (1.2) *satisfies the relation*

$$\varphi(u_{n,m+1}, F(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1})) = \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \tag{3.1}$$

that is, $\varphi(u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}) = \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$ *on solutions of* (1.2)*. In addition, let the identity* $\varphi(x, y) = v$ *be uniquely solvable for* y*. Then each* p*-th order* n*-integral for the equation* (1.2) *can be written in the form*

$$\Phi_{n,m}(\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \varphi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}), \dots, \varphi(u_{n+p-1,m}, u_{n+p,m})). \tag{3.2}$$

Note that Lemma 3.1 only defines the form of the integrals (if they exist) but does not guarantee their existence.

Доказательство. Resolving the identity $\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = v$ with respect to $u_{n+1,m}$, we obtain

$$u_{n+1,m} = g(\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), u_{n,m}). \tag{3.3}$$

Let (1.2) admit a p-th order n-integral $\Omega_{n,m}$. Using expression (3.3) as well as its consequences derived by shifts in n, we rewrite $\Omega_{n,m}$ in terms of $u_{n,m}$, $\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$ and its shifts in n:

$$\Omega_{n,m} = \Phi_{n,m}(u_{n,m}, \varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \varphi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}), \dots, \varphi(u_{n+p-1,m}, u_{n+p,m})). \tag{3.4}$$

The relation (3.1) implies that $\varphi(u_{n+j,m+1}, u_{n+j+1,m+1}) = \psi(u_{n+j,m}, u_{n+j+1,m})$ on solutions of (1.2). Therefore, the shift of (3.4) in m gives:

$$\Omega_{n,m+1} = \Phi_{n,m+1}(u_{n,m+1}, \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \psi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}), \dots, \psi(u_{n+p-1,m}, u_{n+p,m})).$$

Comparing the last identity and (3.4), we see that $\Omega_{n,m}$ satisfies the defining relation (1.3) only if the function $\Phi_{n,m+1}$ in (3.4) is independent of its first argument for all n and m. □

Let us consider the equation (1.7) as an illustrative example. Subtracting 1 from both sides of (1.7) and then replacing them with their reciprocal values, we rewrite this equation in the form

$$\frac{u_{n,m+1}}{u_{n+1,m+1} - u_{n,m+1}} = \frac{u_{n,m} + 1}{u_{n+1,m} - u_{n,m}}.$$

Thus, (1.7) satisfies all conditions of Lemma 3.1 with

$$\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m} - u_{n,m}}, \qquad \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = \frac{u_{n,m} + 1}{u_{n+1,m} - u_{n,m}}.$$

This choice of φ and ψ is not most obvious but convenient for the reasoning in the next paragraph. It is easy to check that

$$\frac{u_{n+2,m} - u_{n+1,m}}{u_{n+1,m} - u_{n,m}} = \frac{v_{n,m} + 1}{v_{n+1,m}}, \tag{3.5}$$

where

$$v_{n,m} = \varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m} - u_{n,m}}.$$

Note that the left-hand side of (3.5) is an n-integral of (1.7) and the right-hand side is the representation in the form (3.2) for this integral.

Applying the scheme of the invertible two-point transformations from Section 2, we see that

$$v_{n,m} = \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m} - u_{n,m}}$$

maps solutions of (1.7) into solutions of the equation (2.3) and the right-hand side of (3.5) is an n-integral for (2.3). The latter is a particular case of a more general fact formulated in the following Lemma.

Lemma 3.2. *Let equation* (1.2) *satisfy the assumptions of Lemma 3.1, the functions* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *be functionally independent and the transformation* $v_{n,m} = \varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$ *map solutions of* (1.2) *into solutions of an equation*

$$v_{n+1,m+1} = Q(v_{n,m}, v_{n+1,n}, v_{n,m+1}). \tag{3.6}$$

Then equation (1.2) *admits an* n*-integral of order* $p > 1$ *only if equation* (3.6) *admits an* n*-integral of order* $p-1$.

Доказательство. Let $\Omega_{n,m}$ be a p-th order n-integral of (1.2). Lemma 3.1 implies that

$$\Omega_{n,m} = \Phi_{n,m}(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+p-1,m}), \tag{3.7}$$

where $v_{i,j} = \varphi(u_{i,j}, u_{i+1,j})$. Let T_n^k denote the combination of the shift by k in n and the elimination of the variables $v_{n+i,m+1}$, $i > 0$, by using equation (3.6). Since $v_{n,m}$ satisfies (3.6) for each solution of (1.2), we have

$$\begin{aligned}
v_{n+1,m+1} &= T_n^1(v_{n,m+1}) = Q(v_{n,m}, v_{n+1,m}, v_{n,m+1}),\\
v_{n+2,m+1} &= T_n^1(Q) = Q\left(v_{n+1,m}, v_{n+2,m}, Q(v_{n,m}, v_{n+1,m}, v_{n,m+1})\right),\\
v_{n+k+1,m+1} &= T_n^k(Q) = Q(v_{n+k,m}, v_{n+k+1,m}, T_n^{k-1}(Q)), \qquad k > 1.
\end{aligned}$$

Substituting these formulae into the defining relation for integral (3.7), we obtain

$$\Phi_{n,m+1}(v_{n,m+1}, Q, \dots, T_n^{p-2}(Q)) = \Phi_{n,m}(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+p-1,m}). \tag{3.8}$$

This identity holds as

$$v_{n,m+1} = \varphi(u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}) = \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}),$$

see (3.1), and

$$v_{n+\ell,m} = \varphi(u_{n+\ell,m}, u_{n+\ell+1,m}), \qquad \ell = \overline{0, p-1},$$

other variables $v_{i,j}$ are absent in (3.8). But $\psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$ and $\varphi(u_{n+\ell,m}, u_{n+\ell+1,m})$ are functionally independent and, hence, (3.8) should hold identically for arbitrary $v_{n,m+1}$ and $v_{n,m+\ell}$. Thus, $\Phi_{n,m}(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+p-1,m})$ is an n-integral of the equation (3.6). Taking (3.7) into account, we see that $\Phi_{n,m}$ essentially depends on $v_{n,m}$ and $v_{n+p-1,m}$ if

$$\frac{\partial \Omega_{n,m}}{\partial u_{n,m}} \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Omega_{n,m}}{\partial u_{n+p,m}} \neq 0.$$

The integral $\Phi_{n,m}$ therefore has order $p-1$. The proof is complete. □

Remark 3.1. *In contrast to* (1.2), *we do not assume*

$$\frac{\partial Q}{\partial v_{n+1,m}} \frac{\partial Q}{\partial v_{n,m+1}} \frac{\partial Q}{\partial v_{n,m}} \neq 0$$

for (3.6). *But this inequality follows from assumptions of Lemma 3.2. Indeed, substituting*

$$v_{n,m} = \varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \quad v_{n,m+1} = \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$$

into (3.6), *we obtain*

$$\psi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}) = Q\left(\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}), \varphi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m}), \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})\right) \tag{3.9}$$

and we see that the last relation holds only if Q *depends essentially on its second argument. The functional independence of* $\varphi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$ *and* $\psi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$ *excludes the case when* Q *is independent of both first and third arguments. Differentiating relation* (3.9) *with respect to* $u_{n,m}$, *we see that this relation cannot hold if* Q *is independent of its first or third arguments since* $\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$, $\psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$, $\varphi(u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$ *are functionally independent and these functions should essentially depend on their first argument to be compatible with both* (3.1) *and the inequality in* (1.2).

The next proposition is a direct implication of Lemma 3.2.

Theorem 3.1. *Let equation* (1.2) *satisfy the assumptions of Lemma 3.1, the functions* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *be functionally independent and the transformation* $v_{n,m} = \varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m})$ *map solutions of* (1.2) *into solutions of* (1.2) *again. Then equation* (1.2) *does not admit* n*-integrals.*

Roughly speaking, the above theorem means that a quad-graph equation has no n-integrals if it admits a two-point invertible, in the sense of [13], [15], auto-transformation depending on the shift of $u_{n,m}$ in n.

Доказательство. We argue by contradiction and assume the contrary. Let (1.2) have an n-integrals of order p. If $p > 1$, then, applying Lemma 3.2 several times, we obtain that (1.2) admits a first-order n-integral.

Each first-order integral of (1.2) is of the form $\Phi_{n,m}(\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}))$ by Lemma 3.1, and (3.1) implies that the defining relation for this integral takes the form

$$\Phi_{n,m+1}(\psi(u_{n,m}, u_{n+1,m})) = \Phi_{n,m}(\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m})).$$

But this contradicts the functional independence of ψ and φ. The proof is complete. □

Making the interchange $n \leftrightarrow m$ in Lemmata 3.1, 3.2, Theorem 3.1 and in their proofs, we also prove the following analogue of Theorem 3.1 for m-integrals.

Theorem 3.2. *Let there exit functionally independent functions* $\bar{\varphi}(x, y)$ *and* $\bar{\psi}(x, y)$ *such that the right-hand side of* (1.2) *satisfies the relation*

$$\bar{\varphi}(u_{n+1,m}, F(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1})) = \bar{\psi}(u_{n,m}, u_{n,m+1}),$$

that is, $\bar{\varphi}(u_{n+1,m}, u_{n+1,m+1}) = \bar{\psi}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$ *on solutions of* (1.2). *In addition, let the equation* $\bar{\varphi}(x, y) = \bar{v}$ *be uniquely solvable for* y. *Then equation* (1.2) *does not admit* m*-integrals if the transformation* $\bar{v}_{n,m} = \bar{\varphi}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$ *maps solutions of* (1.2) *into solutions of* (1.2).

As it is demonstrated in Section 2, equation (2.2) satisfies all assumptions of Theorems 3.1, 3.2 in the case $AB(A - B) \neq 0$. The corresponding functions φ, ψ, $\bar{\varphi}$ and $\bar{\psi}$ are

$$\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = u_{n+1,m}\frac{u_{n,m} + A}{u_{n,m}} - A, \qquad \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = \frac{(u_{n+1,m} + B)(u_{n,m} + A)}{u_{n,m} + B} - A,$$

$$\bar{\varphi}(u_{n,m}, u_{n,m+1}) = \frac{Bu_{n,m+1}}{B + u_{n,m} - u_{n,m+1}}, \qquad \bar{\psi}(u_{n,m}, u_{n,m+1}) = \frac{Bu_{n,m+1}(u_{n,m} + A)}{A(u_{n,m} + B) + (B - A)u_{n,m+1}}.$$

Thus, taking Proposition 2.1 into account, we make the following conclusion.

Proposition 3.1. *Hietarinta equation* (1.1) *has no* n*- and* m*-integrals if* $(a - c)(b - d) \neq 0$.

Theorems 3.1 and 3.2 are also applicable to the linear equation

$$u_{n+1,m+1} = \alpha u_{n+1,m} + \beta u_{n,m+1} + \gamma u_{n,m} \tag{3.10}$$

with constant coefficients α, β and γ. Indeed,

$$\varphi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = u_{n+1,m} - \beta u_{n,m}, \qquad \psi(u_{n,m}, u_{n+1,m}) = \alpha u_{n+1,m} + \gamma u_{n,m},$$

$$\bar{\varphi}(u_{n,m}, u_{n,m+1}) = u_{n,m+1} - \alpha u_{n,m}, \qquad \bar{\psi}(u_{n,m}, u_{n,m+1}) = \beta u_{n,m+1} + \gamma u_{n,m}$$

for this equation. The transformations $v_{n,m} = u_{n+1,m} - \beta u_{n,m}$, $\bar{v}_{n,m} = u_{n,m+1} - \alpha u_{n,m}$, which coincide with the discrete Laplace transformations (see [17], [9]), map solutions of (3.10) into solutions of (3.10) again. Thus, Theorems 3.1 and 3.2 imply that (3.10) has no integrals in the case $\gamma + \alpha\beta \neq 0$ because both the pairs φ, ψ and $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ are functionally independent under this condition.

Remark 3.2. *As it was demonstrated in* [9], [10], *to vanish a Laplace invariant is a necessary condition for the existence of autonomous integrals of* (1.2). *Analyzing the proof of Proposition 2 in* [10], *we can make sure that this necessary condition remains valid for non-autonomous integrals of autonomous equations. Since all Laplace invariants of* (3.10) *are equal to* $\gamma+\alpha\beta$, *we see that the Laplace invariants provides an alternative way to prove the absence of integrals for equation* (3.10) *in the case* $\gamma+\alpha\beta \neq 0$. *And this provides another way to prove the Darboux non-integrability of the generic Hietarinta equation if we employ the fact* [11] *that the transformation* $u_{n,m} = \frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} - A$ *maps solutions of the linear equation*

$$v_{n+1,m+1} = v_{n+1,m} + Av_{n,m+1} + (B - A)v_{n,m} \tag{3.11}$$

into solutions of (2.2). *Indeed, since all Laplace invariants of* (3.11) *are equal to* B, *this linear equation is not Darboux integrable in the case* $B \neq 0$ *and the Darboux integrability of the corresponding Hietarinta equation* (2.2) *contradicts the following obvious statement, cf. Lemma 1 in* [7].

Proposition 3.2. *Let a transformation*

$$u_{n,m} = \phi(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+k,m}), \qquad k > 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v_{n,m}}\frac{\partial\phi}{\partial v_{n+k,m}} \neq 0, \tag{3.12}$$

map solutions of an equation

$$v_{n+1,m+1} = Q(v_{n,m}, v_{n+1,m}, u_{n,m+1}) \tag{3.13}$$

into solutions of (1.2) *and let the equation* (1.2) *admit an* n*-integral of order* p. *Then the equation* (3.13) *possesses an* n*-integral of order* $p + k$.

Доказательство. Let $\Omega_{n,m}$ be an n-integral for (1.2). Then defining relation (1.3) holds for each solution of (1.2) and, in particular, for all solutions obtained by formula (3.12) from solutions of (3.13). Therefore,

$$\Omega_{n,m}\left(\phi(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+k,m}), \dots, \phi(v_{n+p,m}, v_{n+p+1,m}, \dots, v_{n+p+k,m})\right)$$

is an n-integral of (3.13). The proof is complete. □

Thus, the Hietarinta equation gives an example of a quad-graph equation that is linearizable but is not Darboux integrable.

It should be noted that Remark 3.2 describes a sketch for the proof of the Darboux non-integrability of (2.2) in a way very similar to that was used in [7] for estimating the minimal orders of integrals for a particular linearizable quad-graph equation. In the present paper, the author prefers another way that does not require introducing the Laplace invariants and therefore seems to be more self-contained.

REFERENCES

1. V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Discrete nonlinear hyperbolic equations. Classification of integrable cases* // Funkt. Analiz Prilozh. **43**:1, 3–21 (2009). [Funct. Anal. Appl. **43**, 3–17 (2009).]
2. J. Hietarinta. *A new two-dimensional lattice model that is 'consistent around a cube'* // J. Phys. A: Math. Gen. **37**:6, L67–L73 (2004).
3. G. Gubbiotti, C. Scimiterna. *Reconstructing a lattice equation: a non-autonomous approach to the Hietarinta equation* // SIGMA **14**, 004 (2018).
4. S.Ya. Startsev. *Darboux integrable discrete equations possessing an autonomous first-order integral* // J. Phys. A: Math. Theor. **47**:10, 105204, 16pp (2014).
5. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. **45**:34, 345205 (2012).

6. A.V. Zhiber, V.V. Sokolov. *Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type* // Uspekhi Matem. Nauk. **56**:1, 63–106 (2001). [Russ. Math. Surv. **56**:1, 61–101 (2001).]
7. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *Examples of Darboux integrable discrete equations possessing first integrals of an arbitrarily high minimal order* // Ufimskij Matem. Zhurn. **4**:3, 177–183 (2012). [Ufa Math. J. **4**:3, 174–180 (2012).]
8. I.T. Habibullin. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // SIGMA **1**, 023 (2005).
9. V.E. Adler, S.Ya. Startsev. *Discrete analogues of the Liouville equation* // Teor. Mat. Fiz. **121**:2, 271–285 (1999). [Theor. Math. Phys. **121**:2, 1484–1495 (1999).]
10. S.Ya. Startsev. *Relationships between symmetries depending on arbitrary functions and integrals of discrete equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **50**:50, 50LT01 (2017).
11. A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani. *Deconstructing an integrable lattice equation* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**:8, L145–L149 (2006).
12. R.I. Yamilov. *Invertible changes of variables generated by Bäcklund transformations* // Teor. Mat. Fiz. **85**:3, 368–375 (1990). [Theor. Math. Phys. **85**:3, 1269–1275 (1990).]
13. V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. *On nonclassical invertible transformation of hyperbolic equations* // Eur. J. Appl. Math. **6**:2, 145–156 (1995).
14. R.I. Yamilov. *Construction scheme for discrete Miura transformation* // J. Phys. A: Math. Gen. **27**:20, 6839–6851 (1994).
15. S.Ya. Startsev. *On non-point invertible transformations of difference and differential-difference equations* // SIGMA **6**, 092 (2010).
16. S.Ya. Startsev. *Non-Point Invertible Transformations and Integrability of Partial Difference Equations* // SIGMA **10**, 066 (2014).
17. S.P. Novikov, I.A. Dynnikov. *Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-dimensional manifolds* // Uspekhi Matem. Nauk. **52**:5, 175–234 (1997). [Russ. Math. Surv. **52**:5, 1057–1116 (1997).]

Sergey Yakovlevich Startsev,
Institute of Mathematics,
Ufa Federal Research Centre, RAS,
Chernyshevsky str., 112,
450008, Ufa, Russia
E-mail: `startsev@anrb.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 176-192.

ON DISCRETIZATION OF DARBOUX INTEGRABLE SYSTEMS ADMITTING SECOND-ORDER INTEGRALS

K. ZHELTUKHIN, N. ZHELTUKHINA

Abstract. We consider a discretization problem for hyperbolic Darboux integrable systems. In particular, we discretize continuous systems admitting x- and y-integrals of the first and second order. Such continuous systems were classified by Zhyber and Kostrigina. In the present paper, continuous systems are discretized with respect to one of continuous variables and the resulting semi-discrete system is required to be also Darboux integrable.

To obtain such a discretization, we take x- or y-integrals of a given continuous system and look for a semi-discrete systems admitting the chosen integrals as n-integrals. This method was proposed by Habibullin. For all considered systems and corresponding sets of integrals we were able to find such semi-discrete systems. In general, the obtained semi-discrete systems are given in terms of solutions of some first order quasilinear differential systems. For all such first order quasilinear differential systems we find implicit solutions. New examples of semi-discrete Darboux integrable systems are obtained. Also for each of considered continuous systems we determine a corresponding semi-discrete system that gives the original system in the continuum limit.

Keywords: Darboux integrability, discretization.

Mathematics Subject Classification: 37K60

1. Introduction

In the present paper we study the problem of the discretization of integrable equations so that the integrability property is preserved. In particular, we consider hyperbolic systems

$$p^i_{xy} = f^i(x, y, p, p_x, p_y) \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{1.1}$$

where $p = (p^1, \ldots, p^m)$, $p_x = (p^1_x, \ldots, p^m_x)$ and $p_y = (p^1_y, \ldots, p^m_y)$.

For such hyperbolic systems it is convenient to use Darboux integrability [1]. The above system is said to be integrable if it admits m functionally independent non-trivial x-integrals and m functionally independent non-trivial y-integrals. A function $I(x, y, p, p_y, p_{yy}, \ldots)$ is called an x-integral of the system (1.1) if

$$D_x I(x, y, p, p_y, p_{yy}, \ldots) = 0 \qquad \text{for all solutions of (1.1)}, \tag{1.2}$$

where D_x is the total derivative with respect to x. One can define y-integrals in a similar way. Darboux integrable systems are extensively studied, see [2]-[11] and a review paper [12].

The extension of the notion of Darboux integrability to discrete and semi-discrete Darboux integrable systems was developed by Habibullin and Pekcan [13], see also [14]. In recent years there is an interest in studying such systems, see [15]-[25]. A semi-discrete system

$$q^i_{1x} = f^i(x, n, q, q_x, q_1) \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{1.3}$$

K. Zheltukhin, N. Zheltukhina, On discretization of Darboux integrable systems admitting second-order integrals.

© K. Zheltukhin, N. Zheltukhina. 2021.

Submitted August 3, 2020.

where $q = (q^1, \dots, q^m)$, $q_x = (q_x^1, \dots, q_x^m)$ and $q_1 = (q^1(x, n+1), \dots, q^m(x, n+1))$, is called Darboux integrable if it admits m functionally independent non-trivial x-integrals and m functionally independent non-trivial n-integrals. A function $J(x, n, q, q_x, q_{xx}, \dots)$ is called an n-integral of the system (1.3) if

$$DJ(x, n, q, q_x, q_{xx}, \dots) = J(x, n, q, q_x, q_{xx}, \dots) \qquad \text{for all solutions of (1.3)}, \tag{1.4}$$

where D is the shift operator, that is $Dq = q_1$. Note that $Dq_k = q_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. The x-integrals $I(x, n, q, q_1, q_2, \dots)$ for system (1.3) are defined in the same way as for continuous systems.

A hypothesis states that any continuous Darboux integrable system can be discretized with respect to one of the independent variables such that the resulting semi-discrete system is Darboux integrable and admits the set of x- or y-integrals of the original system as $n-$integrals [26]. The results of our work support the above conjecture. We complete the discretization of continuous Darboux integrable equations derived by Zhiber and Kostrigina in [8]. In their paper, Zhiber and Kostrigina considered the classification problem for continuous Darboux integrable systems with two integrals of the first order and two integrals of the second order. They found all such systems together with their x- and y-integrals. Following [8], we have two types of systems. The first system is

$$\begin{cases} u_{xy} = \dfrac{u_x u_y}{u+v} + \left(\dfrac{1}{u+v} + \dfrac{\alpha}{u+\alpha^2 v} \right) u_x v_y, \\ v_{xy} = \dfrac{\alpha^2 v_x v_y}{u+\alpha^2 v} + \left(\dfrac{1}{\alpha(u+v)} + \dfrac{1}{u+\alpha^2 v} \right) u_x v_y, \end{cases} \tag{1.5}$$

with α being a nonzero constant. We mention that in the case $\alpha = 1$, system (1.5) was discretized in [26]. For $\alpha \neq 1$, it possesses y-integrals

$$I_1 = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) v \left(\frac{u_x}{u+v}\right)^{1-\alpha} - v_x \left(\frac{u_x}{u+v}\right)^{-\alpha}, \tag{1.6}$$

$$J_1 = \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{(\alpha+1)u_x + \alpha v_x}{\alpha(u+v)}, \tag{1.7}$$

and the x-integrals have the same form in u, u_y, u_{yy} and v, v_y, v_{yy} variables.

The second system reads as

$$\begin{cases} u_{xy} = \dfrac{v u_x u_y}{uv+d} + \left(\dfrac{1}{uv+d} + \dfrac{1}{\alpha(uv+c)} \right) u u_x v_y, \\ v_{xy} = \dfrac{u v_x v_y}{uv+c} + \left(\dfrac{\alpha}{uv+d} + \dfrac{1}{uv+c} \right) v u_x v_y, \end{cases} \tag{1.8}$$

where α, c and d are nonzero constants. For $\alpha = -1$ it possesses y-integrals

$$I_2 = \frac{(d-c)v^2 u_x^2}{2(uv+d)^2} - \frac{c u_x v_x}{uv+d} \tag{1.9}$$

and

$$J_2 = \frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{(d-c)v u_x - c u v_x}{c(uv+d)}, \tag{1.10}$$

where c and d are non-zero constants and the x-integrals have the same form in u, u_y, u_{yy} and v, v_y, v_{yy} variables.

For $\alpha \neq -1$ it possesses y-integrals

$$I_3 = \frac{u_x^\beta v_x}{(uv+d)^\beta} + \frac{\beta v^2 u_x^{\beta+1}}{(uv+d)^{\beta+1}} \tag{1.11}$$

and

$$J_3 = -\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{2vu_x + uv_x}{uv + d}, \tag{1.12}$$

where d and $\beta = -\alpha \neq 1$ are nonzero constants, and the x-integrals have the same form in u, u_y , u_{yy} and v, v_y, v_{yy} variables.

In order to discretize the systems (1.5) and (1.8), we employ a method introduced by Habibullin et. all [20], see also [24]-[26]. According to this approach, one takes the x- or y-integrals of a system and looks for a semi-discrete system admitting such integrals as n-integrals. In general, one gets a set of semi-discrete systems admitting these n-integrals. For all sets of the y-integrals of systems (1.5) and (1.8) we obtain corresponding semi-discrete systems. Note that initially we allow the parameters α, c and d in integrals (1.6), (1.7) and (1.9)-(1.12) to depend on n. It turns out that only d may depend non-trivially on n in one case. In all cases we are able to choose a semi-discrete system that gives the original system in the continuum limit. Also in examples, where we can write a semi-discrete system explicitly, we show that the system is Darboux integrable.

The following theorems are formulated for a hyperbolic type semi-discrete system

$$\begin{cases} u_{1x} = f(x, n, u, v, u_x, v_x, u_1, v_1), \\ v_{1x} = g(x, n, u, v, u_x, v_x, u_1, v_1), \end{cases} \tag{1.13}$$

where variables u, v depend on a continuous variable $x \in \mathbb{R}$ and a discrete variable $n \in \mathbb{Z}$.

Theorem 1.1. *Let $\alpha \neq 1$. System (1.13) admits n-integrals (1.6) and (1.7) if and only if it is of the form*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 + v_1}{u + v} \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} u_x, \\ v_{1x} = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha} \dfrac{v_1 \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - v \mathcal{D}_1}{u + v} u_x + \mathcal{D}_1 v_x. \end{cases} \tag{1.14}$$

The function $\mathcal{D}_1$ is equal to 1 or given implicitly by $H(n, K_1, L_1) = 0$, where, for each n, the symbol H denotes an arbitrary smooth function and

$$K_1 = \frac{\alpha v_1 \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - \alpha v \mathcal{D}_1^{1+\alpha^{-1}} + (1 - \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}) u_1}{(\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - 1)^{\alpha+1}}, \tag{1.15}$$

$$L_1 = \frac{(u_1 - \mathcal{D}_1^{1+\alpha^{-1}} u) e^{\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}}}{\mathcal{D}_1 (\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - 1)^{a}} + \frac{(-1)^{\alpha} e^{\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}} (\alpha v_1 \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - \alpha v \mathcal{D}_1^{1+\alpha^{-1}} + (1 - \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}) u_1)}{(\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - 1)^{\alpha+1}}. \tag{1.16}$$

Let us construct some examples.

Example 1.1. *In the case $\mathcal{D}_1 = 1$ system (1.14) becomes*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 + v_1}{u + v} u_x, \\ v_{1x} = \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right) \dfrac{v_1 - v}{u + v} u_x + v_x. \end{cases} \tag{1.17}$$

This system is Darboux integrable. Indeed, it possesses two independent non-trivial n-integrals (1.6), (1.7) and two independent non-trivial x-integrals

$$\mathcal{F}_1 = \frac{v - v_1}{v_1 - v_2} \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{F}_2 = \frac{u_1 - u}{(v_1 - v)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} - \alpha (v_1 - v)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{1.18}$$

The x-integrals can be found by considering the x-ring corresponding to the system.

Example 1.2. *Letting $K_1 = 0$ and $\alpha = -1$, we get*

$$\mathcal{D}_1 = \frac{u_1 + v_1}{u_1 + v}.$$

Using (1.14), *we find the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 + v}{u + v} u_x, \\ v_{1x} = \dfrac{u_1 + v_1}{u_1 + v} v_x. \end{cases} \tag{1.19}$$

This system is Darboux integrable. It possesses two independent non-trivial n-integrals (1.6), (1.7) *and two independent non-trivial x-integrals*

$$\mathcal{F}_1 = \frac{(u_2 + v_1)(v - v_1)}{(u_1 + v_1)(v_1 - v_2)} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_2 = \frac{(u - u_1)(u_1 + v_1)}{(-u_1 + u_2)(u_1 + v)}. \tag{1.20}$$

Example 1.3. *Choosing $K_1 = 0$ and $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, we get*

$$\mathcal{D}_1 = \frac{4u_1 + 2v_1}{v + \sqrt{v^2 + 16u_1^2 + 8u_1 v_1}}.$$

By (1.14), *we obtain the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 + v_1}{u + v} \left(\dfrac{v + \sqrt{v^2 + 16u_1^2 + 8u_1 v_1}}{4u_1 + 2v_1} \right)^2 u_x, \\ v_{1x} = -\left(\dfrac{v_1}{u + v} \left(\dfrac{v + \sqrt{v^2 + 16u_1^2 + 8u_1 v_1}}{4u_1 + 2v_1} \right)^2 \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{v(4u_1 + 2v_1)}{(u + v)(v + \sqrt{v^2 + 16u_1^2 + 8u_1 v_1})} \right) u_x \\ \qquad + \dfrac{4u_1 + 2v_1}{v + \sqrt{v^2 + 16u_1^2 + 8u_1 v_1}} v_x. \end{cases} \tag{1.21}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.6) *and* (1.7).

Example 1.4. *Considering $L_1 = 0$ and $\alpha = -1/2$, we get*

$$\mathcal{D}_1 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16u^2 + 8uv}}{2v + 4u}.$$

By (1.14) *we then arrive at the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 + v_1}{u + v} \left(\dfrac{2v + 4u}{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16u^2 + 8uv}} \right)^2 u_x, \\ v_{1x} = -\left(\dfrac{v_1}{u + v} \left(\dfrac{2v + 4u}{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16u^2 + 8uv}} \right)^2 - \dfrac{v(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16u^2 + 8uv})}{(u + v)(2v + 4u)} \right) u_x \\ \qquad + \dfrac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16u^2 + 8uv}}{2v + 4u} v_x. \end{cases} \tag{1.22}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.6) *and* (1.7).

Remark 1.1. *In both previous examples let us consider the corresponding x-rings. Let*

$$X = D_x, \qquad Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_x}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial v_x},$$
$$E_1 = [Y_1, X], \qquad E_2 = [Y_2, X], \qquad E_3 = [E_1, E_2].$$

We observe that

$$X = u_x E_1 + v_x E_2 + Y_1 + Y_2.$$

The following multiplication table

$[E_i, E_j]$	E_1	E_2	E_3
E_1	0	E_3	$-2(u+v)^{-1}E_3$
E_2	$-E_3$	0	$-2(u+v)^{-1}E_3$
E_3	$2(u+v)^{-1}E_3$	$2(u+v)^{-1}E_3$	0

shows that the x-rings are finite-dimensional. Therefore, systems (1.21) and (1.22) are Darboux integrable.

Remark 1.2. *We consider the function $\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}$ defined implicitly by*

$$H(K_1, L_1) = K_1 = 0,$$

that is, by

$$\alpha v_1 \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}} - \alpha v \mathcal{D}_1^{1+\alpha^{-1}} + (1 - \mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}})u_1 = 0,$$

and expand it into a series of the form

$$\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}(u_1, v, v_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v_1 - v)^n,$$

where the coefficients a_n depend on variables u_1 and v only. This yields

$$\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}(u_1, v, v_1) = 1 + \frac{\alpha}{u_1 + \alpha^2 v}(v_1 - v) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (v_1 - v)^n$$

and

$$\mathcal{D}_1(u_1, v, v_1) = 1 + \frac{\alpha^2}{u_1 + \alpha^2 v}(v_1 - v) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (v_1 - v)^n.$$

Letting $u_1 = u + \varepsilon u_y$, $v_1 = v + \varepsilon v_y$ and passing to the limit as $\varepsilon \to 0$, one can see that system (1.14) becomes (1.5).

Theorem 1.2. *System* (1.13) *admits n-integrals* (1.9) *and* (1.10) *if and only if it is of the form*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{v(u_1 v_1 + d)\mathcal{D}_2}{v_1(uv + d)} u_x, \\ v_{1x} = \dfrac{(d-c) v v_1 (\mathcal{D}_2^2 - 1)}{2c(uv + d)\mathcal{D}_2} u_x + \dfrac{v_1}{v \mathcal{D}_2} v_x. \end{cases} \tag{1.23}$$

The function $\mathcal{D}_2$ is defined implicitly by $H(n, K_2, L_2) = 0$, where, for each n, the symbol H denotes an arbitrary smooth function and

$$K_2 = \frac{v_1(\mathcal{D}_2 - 1)M^{-\frac{2d}{c+d}}}{v\mathcal{D}_2}\left(-2cdu_1v_1 + uv\mathcal{D}_2M\right), \qquad L_2 = \frac{v\mathcal{D}_2M^{\frac{2d}{c+d}}}{v_1}, \tag{1.24}$$

where

$$M = 2cd + \frac{(c+d)(\mathcal{D}_2 - 1)u_1v_1}{\mathcal{D}_2}.$$

Example 1.5. *Let $K_2 = 0$, then we get*

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(2cd + (c+d)uv)u_1v_1}{(2cd + (c+d)u_1v_1)uv}.$$

Using (1.23)*, we obtain the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1(u_1v_1 + d)(2cd + (c+d)uv)}{u(uv+d)(2cd + (c+d)u_1v_1)}u_x, \\ v_{1x} = \dfrac{(d-c)}{2c(uv+d)}\left(\dfrac{u_1v_1^2(2cd + (c+d)uv)}{u(2cd + (c+d)u_1v_1)} - \dfrac{uv^2(2cd + (c+d)u_1v_1)}{u_1(2cd + (c+d)uv)}\right)u_x \\ \qquad + \dfrac{u(2cd + (c+d)u_1v_1)}{u_1(2cd + (c+d)uv)}v_x. \end{cases} \tag{1.25}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.9) *and* (1.10)*. One can confirm that this system possesses also the following two n-integrals*

$$I_2^* = \frac{(2cd + (c+d)uv)u_x}{u(uv+d)}, \qquad J_2^* = \frac{(c-d)uv^2u_x}{2c(uv+d)(2cd + (c+d)uv)} + \frac{uv_x}{2cd + (c+d)uv}.$$

Considering the corresponding x-ring we can also find the x-integrals given by

$$\mathcal{F}_1 = \frac{u_1}{u}\left(\frac{2cd + (c+d)uv}{2cd + (c+d)u_1v_1}\right)^{\frac{c-d}{c+d}}, \qquad \mathcal{F}_2 = \frac{u_1v_1 - uv}{u_2v_2 - uv}.$$

Example 1.6. *Let $K_2 = 0$, then*

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(c+d)u_1v_1}{2cd + (c+d)u_1v_1}.$$

Using (1.23) *we get the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{(c+d)u_1v(u_1v_1 + d)}{(uv+d)(2cd + (c+d)u_1v_1)}u_x, \\ v_{1x} = \dfrac{(d-c)v}{2c(uv+d)}\left(\dfrac{(c+d)u_1v_1^2}{2cd + (c+d)u_1v_1} - \dfrac{2cd + (c+d)u_1v_1}{(c+d)u_1}\right)u_x \\ \qquad + \dfrac{2cd + (c+d)u_1v_1}{(c+d)u_1v}v_x. \end{cases}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.9) *and* (1.10) *and two independent x-integrals*

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{c+d}\left(\frac{2cd + (c+d)u_1v_1}{vu_1}\right)^{\frac{c+d}{2d}} + \frac{u}{u_1}\left(\frac{2cd + (c+d)u_1v_1}{vu_1}\right)^{\frac{c-d}{2d}}$$

and

$$\mathcal{F}_2 = \frac{v_1u_1^{\frac{d-c}{2d}}\left(2cd + (c+d)u_1v_1\right)^{\frac{c+d}{2d}}}{v^{\frac{c+d}{2d}}\left(2cd + (c+d)(u_1v_1 + u_2v_2)\right)}.$$

Remark 1.3. *We consider a function $\mathcal{D}_2$ defined implicitly by*

$$H(K_2, L_2) = L_2 - (2cd)^{2d/(c+d)} = 0$$

and expand it into a series of the form

$$\mathcal{D}_2(u_1, v, v_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v_1 - v)^n,$$

where coefficients a_n depend on variables u_1 and v only. This gives:

$$\mathcal{D}_2(u_1, v, v_1) = 1 + \frac{c}{v(uv+c)}(v_1 - v) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (v_1 - v)^n.$$

By letting $u_1 = u + \varepsilon u_y$, $v_1 = v + \varepsilon v_y$ and passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ one can see that system (1.23) becomes (1.8) with $\alpha = -1$.

Theorem 1.3. *System* (1.13) *admits n-integrals* (1.11) *and* (1.12) *if and only if it is of the form*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{u_1 v_1 + d_1}{\mathcal{D}_3(uv+d)} u_x, \\ v_{1x} = \left(\dfrac{-\beta v_1^2}{\mathcal{D}_3(uv+d)} + \dfrac{\beta v^2 \mathcal{D}_3^{\beta}}{uv+d} \right) u_x + \mathcal{D}_3^{\beta} v_x. \end{cases} \tag{1.26}$$

The function $\mathcal{D}_3$ is given implicitly by $H(n, K_3, L_3) = 0$, where, for each n, the symbol H denotes an arbitrary smooth function and

$$K_3 = \frac{(v_1 - v\mathcal{D}_3^{\beta})^{\beta^{-1}}(d_1 u - d u_1 \mathcal{D}_3)}{\mathcal{D}_3}, \tag{1.27}$$

$$L_3 = (v_1 - v\mathcal{D}_3^{\beta})^{(1-\beta)\beta^{-1}} \Big(d_1 \mathcal{D}_3^{\beta-1} - d_1 + (\beta - 1) u_1 (v_1 - v\mathcal{D}_3^{\beta}) \Big). \tag{1.28}$$

Here $d_1 = Dd$ and D is the shift operator.

Example 1.7. *Considering $K_3 = 0$, we find*

$$\mathcal{D}_3 = \frac{v_1^{1/\beta}}{v^{1/\beta}}.$$

Using (1.26), *we get the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{(u_1 v_1 + d_1) v^{1/\beta}}{(uv+d) v_1^{1/\beta}} u_x, \\ v_{1x} = \left(-\dfrac{\beta v_1^2 v^{1/\beta}}{v_1^{1/\beta}(uv+d)} + \dfrac{\beta v^2 v_1}{v(uv+d)} \right) u_x + \dfrac{v_1}{v} v_x. \end{cases} \tag{1.29}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.11) *and* (1.12) *and two independent x-integrals*

$$\mathcal{F}_1 = \left(1 - \left(\frac{v_1}{v} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right) \left(-d_1 u + d u_1 \left(\frac{v_1}{v} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta - 1}$$

and

$$\mathcal{F}_2 = \frac{v^{\frac{1-\beta}{\beta}} - v_2^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{v^{\frac{1-\beta}{\beta}} - v_1^{\frac{1-\beta}{\beta}}}.$$

One can confirm that this system possesses also the following two n-integrals

$$I_3^* = \frac{v^{1/\beta} u_x}{uv+d}, \qquad J_3^* = \frac{v_x}{v} + \frac{\beta v u_x}{uv+d}.$$

Example 1.8. *Let $K_3 = 0$, we find*

$$\mathcal{D}_3 = \frac{d_1 u}{du_1}.$$

By (1.26) *we get the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{(u_1v_1+d_1)du_1}{(uv+d)d_1u}u_x, \\ v_{1x} = \left(-\dfrac{\beta d v_1^2 u_1}{d_1 u(uv+d)} + \dfrac{\beta d_1^\beta v^2 u^\beta}{d^\beta u_1^\beta (uv+d)}\right) u_x + \dfrac{d_1^\beta u^\beta}{d^\beta u_1^\beta} v_x. \end{cases} \tag{1.30}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.11) *and* (1.12) *and two independent x-integrals*

$$\mathcal{F}_1 = \frac{d_1^\beta u^\beta v - d^\beta u_1^\beta v_1}{d_2^\beta u_1^\beta v_1 - d_1^\beta u_2^\beta v_2}$$

and

$$\mathcal{F}_2 = \frac{(d_1^\beta u^\beta v - d^\beta u_1^\beta v_1)(dd_1^\beta u^\beta u - d_1 d^\beta u_1^\beta u + (1-\beta)uu_1)}{dd_1uu_1}.$$

We confirm that this system possesses also the following two n-integrals

$$I_3^{**} = \frac{du_x}{u(uv+d)}, \qquad J_3^{**} = \frac{u^\beta v_x}{d^\beta} + \frac{\beta v^2 u^\beta u_x}{d^\beta(uv+d)}.$$

Example 1.9. *Considering $L_3 = 0$ with $\beta = 2$, we get $\mathcal{D}_3 = \dfrac{d_1+R}{2u_1v}$, where*

$$R = \sqrt{d_1^2 + 4u_1v(u_1v_1 - d_1)}.$$

Then by (1.26) *we arrive at the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{(u_1v_1+d_1)(d_1-R)}{2(uv+d)(d_1-u_1v_1)}u_x, \\ v_{1x} = \left(\dfrac{v_1^2(R-d_1)}{d_1-u_1v_1} + \dfrac{d_1^2+2u_1v(u_1v_1-d_1)+d_1R}{u_1^2}\right)\dfrac{u_x}{uv+d} \\ \qquad + \dfrac{d_1^2+2u_1v(u_1v_1-d_1)+d_1R}{2u_1^2v^2}v_x. \end{cases} \tag{1.31}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.11) *and* (1.12).

Example 1.10. *Considering $L_3 = 0$ with $\beta = 1/2$, we see that*

$$\mathcal{D}_3^{1/2} = \frac{2d_1 + u_1v_1 + R}{2u_1v},$$

where

$$R = \sqrt{(2d_1+u_1v_1)^2 - 8d_1u_1v}.$$

Employing (1.26)*, we get the system*

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{(u_1v_1+d_1)(2d_1+u_1v_1-R)^2}{16d_1^2(uv+d)}u_x, \\ v_{1x} = \left(\dfrac{-v_1^2(2d_1+u_1v_1-R)^2}{32d_1^2} + \dfrac{v(2d_1+u_1v_1+R)}{4u_1}\right)\dfrac{u_x}{uv+d} + \dfrac{2d_1+u_1v_1+R}{2u_1v}v_x. \end{cases} \tag{1.32}$$

This system possesses two independent non-trivial n-integrals (1.11) *and* (1.12)*.*

Remark 1.4. *In both previous examples the corresponding x-rings have the following multiplication table*

$[E_i, E_j]$	E_1	E_2	E_3
E_1	0	E_3	$\frac{-2v}{d+uv}E_3$
E_2	$-E_3$	0	$\frac{-2u}{d+uv}E_3$
E_3	$\frac{2v}{d+uv}E_3$	$\frac{2u}{d+uv}E_3$	0

where the fields X, Y_1, Y_2, E_1, E_2 and E_3 are introduced in the same way as in Remark 1. This shows that the x-rings are finite-dimensional and the corresponding systems (1.31) *and* (1.32) *are Darboux integrable.*

Remark 1.5. *We consider a function $\mathcal{D}_3$ given implicitly by $H(K_3, L_3) = L_3 = 0$ and expand it into a series of the form*

$$\mathcal{D}_3(u_1, v, v_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(v_1 - v)^n,$$

where coefficients a_n depend on variables u_1 and v only. Then

$$\mathcal{D}_3(u_1, v, v_1) = 1 + \frac{u_1}{\beta u_1 v - d_1}(v_1 - v) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(v_1 - v)^n.$$

By letting $u_1 = u + \varepsilon u_y$, $v_1 = v + \varepsilon v_y$ and passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ one can see that system (1.26) becomes (1.8). We observe that $\beta = -\alpha$ and constants α, c, d satisfy the identity $d = \alpha c$.

2. Proof of Theorem 1.1

It follows from the identity $DJ_1 = J_1$ that

$$\frac{u_{1xx}}{u_{1x}} - \left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\frac{u_{1x}}{u_1+v_1} - \frac{v_{1x}}{u_1+v_1} = \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{(\alpha+1)u_x + \alpha v_x}{\alpha(u+v)},$$

that is

$$\frac{f_x + f_u u_x + f_v v_x + f_{u_1} f + f_{v_1} g + f_{u_x} u_{xx} + f_{v_x} v_{xx}}{f} - \left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\frac{f}{u_1+v_1} - \frac{g}{u_1+v_1} = \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{(\alpha+1)u_x + \alpha v_x}{\alpha(u+v)}. \tag{2.1}$$

By comparing the coefficients at v_{xx} and u_{xx}, we get

$$f_{v_x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{f_{u_x}}{f} = \frac{1}{u_x}.$$

Hence,

$$f(x, n, u, v, u_1, v_1, u_x, v_x) = A(x, n, u, v, u_1, v_1)u_x. \tag{2.2}$$

It follows from $DI_1 = I_1$ that

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right) v_1 \left(\frac{Au_x}{u_1+v_1}\right)^{1-\alpha_1} - g\left(\frac{Au_x}{u_1+v_1}\right)^{-\alpha_1} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) v \left(\frac{u_x}{u+v}\right)^{1-\alpha} - v_x\left(\frac{u_x}{u+v}\right)^{-\alpha}.$$

We first consider the case $\alpha_1 \neq \alpha$. We have:

$$g = Tu_x + Mu_x^{1+\alpha_1-\alpha} + Nv_x u_x^{\alpha_1-\alpha},$$

where

$$T = \left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)\frac{v_1 A}{u_1+v_1}, \quad M = -\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{v(u+v)^{\alpha-1}A^{\alpha_1}}{(u_1+v_1)^{\alpha_1}}, \qquad N = \frac{(u+v)^{\alpha}A^{\alpha_1}}{(u_1+v_1)^{\alpha_1}}.$$

Substituting the expression for g and f into (2.1) and comparing the coefficients at u_x^0, u_x, v_x, $u_x^{1+\alpha_1-\alpha}$ and $v_x u_x^{\alpha_1-\alpha}$, we get

$$\frac{A_x}{A} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{A_u}{A} + A_{u_1} + \frac{A_{v_1}}{A}T - \left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)\frac{A}{u_1+v_1} - \frac{T}{u_1+v_1} = -\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{u+v}, \tag{2.4}$$

$$\frac{A_v}{A} = -\frac{1}{u+v}, \tag{2.5}$$

$$M\left(\frac{A_{v_1}}{A} - \frac{1}{u_1+v_1}\right) = 0, \tag{2.6}$$

$$N\left(\frac{A_{v_1}}{A} - \frac{1}{u_1+v_1}\right) = 0. \tag{2.7}$$

It follows from (2.5)-(2.7) that

$$A = \frac{u_1+v_1}{u+v}S(n,u,u_1),$$

where $S(n,u,u_1)$ is a function depending on n, u, u_1 only. Substitute this expression for A into (2.4), we find that

$$(u+v)(u_1+v_1)\frac{S_u}{S} + (u_1+v_1)^2 S_{u_1} + \left(v_1 - \frac{u_1}{\alpha_1} - \frac{(1+\alpha_1)v_1(u_1+v_1)^2}{\alpha_1}\right)S + \frac{u_1+v_1}{\alpha} = 0. \tag{2.8}$$

Differentiating the last equation three times with respect to v_1, we get

$$-6\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)S = 0, \quad \text{hence,} \quad S = 0.$$

Hence, $A = 0$ is the only solution when $\alpha \neq \alpha_1$.

Now we consider the case when α is a constant, that is α is independent of n. We have:

$$g = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{Av_1}{u_1+v_1} - \frac{vA^{\alpha}}{u+v}\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^{\alpha}\right)u_x + \left(A\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^{\alpha} v_x. \tag{2.9}$$

We substitute the expressions for f and g into (2.1) and compare the coefficients at v_x, u_x and the free term. This gives:

$$\frac{A_x}{A}=0, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{A_u}{A}+A_{u_1}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[A_{v_1}\frac{v_1}{u_1+v_1}-\frac{vA^\alpha A_{v_1}}{A(u+v)}\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^\alpha-\frac{A}{u_1+v_1}\right.\\&\left.-\frac{Av_1}{(u_1+v_1)^2}+\frac{vA^\alpha}{(u+v)(u_1+v_1)}\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^\alpha+\frac{1}{u+v}\right]=0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\frac{A_v}{A}+\frac{A_{v_1}A^\alpha}{A}\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^\alpha-\frac{A^\alpha}{u_1+v_1}\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^\alpha+\frac{1}{u+v}=0. \tag{2.12}$$

Let

$$\mathcal{D}_1=\left(\frac{u+v}{u_1+v_1}\right)^\alpha A^\alpha. \tag{2.13}$$

In terms of the function $\mathcal{D}_1$, the equations (2.11) and (2.12) cast into the form

$$(u+v)\mathcal{D}_{1u}+(u_1+v_1)\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}\mathcal{D}_{1u_1}+\frac{\alpha+1}{\alpha}(v_1\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}-v\mathcal{D}_1)\mathcal{D}_{1v_1}-\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}-1)=0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathcal{D}_{1v}}{\mathcal{D}_1}+\mathcal{D}_{1v_1}=0. \tag{2.15}$$

The set of solutions of the above system is not empty. For example, $\mathcal{D}_1=1$ is a singular solution leading to Darboux integrable system (1.17). Let $\mathcal{D}_1\neq 1$. It is convenient to regard $\mathcal{D}_1$ as a function of n, u, v, u_1, v_1 defined implicitly by the equation as follows

$$W(n,u,v,u_1,v_1,\mathcal{D}_1)=0.$$

Then in terms of function $W=W(n,u,v,u_1,v_1,\mathcal{D}_1)$, equations (2.14) and (2.15) can be rewritten as

$$(u+v)W_u+(u_1+v_1)\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}W_{u_1}+\frac{\alpha+1}{\alpha}(v_1\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}-v\mathcal{D}_1)W_{v_1}+\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1^{\alpha^{-1}}-1)W_{\mathcal{D}_1}=0, \tag{2.16}$$

$$\frac{W_v}{\mathcal{D}_1}+W_{v_1}=0. \tag{2.17}$$

Under the change of variables

$$\tilde v=v,\qquad \tilde v_1=v_1-v\mathcal{D}_1,\qquad \tilde u=u,\qquad \tilde u_1=u_1,\qquad \tilde{\mathcal{D}}_1=\mathcal{D}_1,$$

the above equations cast into the form

$$\begin{aligned}(\tilde u+\tilde v)W_{\tilde u}+(\tilde u_1+\tilde v_1+\tilde v\tilde{\mathcal{D}}_1)\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}}W_{\tilde u_1}+\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\tilde v_1\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}}+\frac{1}{\alpha}\tilde v(\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}-\tilde{\mathcal{D}}_1)\right)W_{\tilde v_1}&\\+(\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}-\tilde{\mathcal{D}}_1)W_{\tilde{\mathcal{D}}_1}=0,&\\ W_{\tilde v}=0.&\end{aligned}$$

We differentiate the first equation with respect to $\tilde v$, then use the identity $W_{\tilde v}=0$, and get two new equations

$$\begin{aligned}&W_{\tilde u}+\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}W_{\tilde u_1}+\frac{1}{\alpha}(\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}-\tilde{\mathcal{D}}_1)W_{\tilde v_1}=0,\\&\tilde uW_{\tilde u}+(\tilde u_1+\tilde v_1)\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}}W_{\tilde u_1}+\frac{\alpha+1}{\alpha}\tilde v_1\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}}W_{\tilde v_1}+(\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}-\tilde{\mathcal{D}}_1)W_{\tilde{\mathcal{D}}_1}=0.\end{aligned}$$

In the latter system, we make the change of variables

$$u_1^*=\tilde u_1-\tilde{\mathcal{D}}_1^{1+\alpha^{-1}}\tilde u,\qquad v_1^*=\alpha\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}}\tilde v_1+(1-\tilde{\mathcal{D}}_1^{\alpha^{-1}})\tilde u_1,\qquad u^*=\tilde u,\qquad v^*=\tilde v,\qquad \mathcal{D}_1^*=\tilde{\mathcal{D}}_1$$

and we get:

$$W_{u^*} = 0,$$

$$\Big((\mathcal{D}_1^{*\alpha^{-1}} + \alpha^{-1}(1 - \mathcal{D}_1^{*-\alpha^{-1}}))u_1^* + \alpha^{-1}v_1^*\mathcal{D}_1^{*-\alpha^{-1}}\Big)W_{u_1^*}$$
$$+ \frac{\alpha+1}{\alpha}v_1^*\mathcal{D}_1^{*\alpha^{-1}}W_{v^*} + \mathcal{D}_1^*(\mathcal{D}_1^{*\alpha^{-1}} - 1)W_{\mathcal{D}_1^*} = 0.$$

The last equation has a general solution $H(n, K_1, L_1) = 0$, where K_1, L_1 rewritten in old variables are given by (1.15), (1.16) and H is a smooth function for each n. Now, using identities (2.13), (2.2) and (2.9), we obtain system (1.14). This completes the proof.

3. Proof of Theorem 1.2

The identity $DJ_2 = J_2$ implies that

$$\frac{f_x + f_u u_x + f_v v_x + f_{u_1} f + f_{v_1} g + f_{u_x} u_{xx} + f_{v_x} v_{xx}}{f} + \frac{(d_1 - c_1)v_1 f - c_1 u_1 g}{c_1(u_1 v_1 + d_1)} = \frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{(d-c)v u_x - c u v_x}{c(uv+d)}. \tag{3.1}$$

Comparing the coefficients at u_{xx} and v_{xx} in the above identity, we get

$$f_{v_x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{f_{u_x}}{f} = \frac{1}{u_x}.$$

Hence,

$$f = A(x, n, u, v, u_1, v_1)u_x. \tag{3.2}$$

The identity $DI_2 = I_2$ implies

$$\frac{(d_1 - c_1)v_1^2 A^2 u_x}{2(u_1 v_1 + d_1)^2} - \frac{cAg}{u_1 v_1 + d_1} = \frac{(d-c)v^2 u_x}{2(uv+d)^2} - \frac{c v_x}{uv + d}. \tag{3.3}$$

It follows from (3.3) that

$$g = \left(\frac{(d_1 - c_1)v_1^2 A}{2c_1(u_1 v_1 + d_1)} - \frac{(d-c)v_1^2(u_1 v_1 + d_1)}{2c_1 A(uv+d)^2}\right)u_x + \frac{c(u_1 v_1 + d_1)}{c_1 A(uv+d)}v_x. \tag{3.4}$$

Substituting the expressions for f and g into (3.1) and comparing the coefficients at u_x, v_x and the free term, we get

$$\frac{A_x}{A} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{A_u}{A} + A_{u_1} + \left(\frac{A_{v_1}}{A} - \frac{u_1}{u_1 v_1 + d_1}\right)\left(\frac{(d_1 - c_1)v_1^2 A}{2c_1(u_1 v_1 + d_1)} - \frac{(d-c)v^2(u_1 v_1 + d_1)}{2c_1 A(uv+d)^2}\right) + \frac{(d_1 - c_1)v_1 A}{c_1(u_1 v_1 + d_1)} - \frac{(d-c)v}{c(uv+d)} = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{A_v}{A} + \frac{c(u_1 v_1 + d_1)}{c_1 A(uv+d)}\left(\frac{A_{v_1}}{A} - \frac{u_1}{u_1 v_1 + d_1}\right) + \frac{u}{uv+d} = 0. \tag{3.7}$$

One can check that

$$A = \frac{v(u_1 v_1 + d)}{v_1(uv + d)}$$

is a particular solution provided $d_1 = d$ and $c_1 = c$.

Now assuming that

$$A \neq \frac{v(u_1 v_1 + d)}{v_1(uv+d)},$$

we introduce a new function

$$\mathcal{D}_2 = \frac{v_1(uv+d)}{v(u_1v_1+d_1)}A. \tag{3.8}$$

In terms of $\mathcal{D}_2$, system (3.6) becomes

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{2x} = 0,\\
&(uv+d)\mathcal{D}_{2u} + \frac{v(u_1v_1+d_1)\mathcal{D}_2}{v_1}\mathcal{D}_{2u_1} + \frac{vv_1}{2c_1}\left((d_1-c_1)\mathcal{D}_2 - (d-c){\mathcal{D}_2}^{-1}\right)\mathcal{D}_{2v_1}\\
&\qquad - \frac{dv}{c}\mathcal{D}_2 + \frac{(d_1+c_1)v}{2c_1}{\mathcal{D}_2}^2 + \frac{v(d-c)}{2c_1} = 0,\\
&c_1v\mathcal{D}_2\mathcal{D}_{2v} + cv_1\mathcal{D}_{2v_1} + (-c\mathcal{D}_2 + c_1{\mathcal{D}_2}^2) = 0.
\end{aligned}$$

In the same way as in the proof of Theorem 1.1, we introduce a function $W(n,u,v,u_1,v_1,\mathcal{D}_2)$. For the function $W = W(n,u,v,u_1,v_1,\mathcal{D}_2)$ the last two equations become

$$\begin{aligned}
&(uv+d)W_u + \frac{v(u_1v_1+d_1)}{v_1}\mathcal{D}_2W_{u_1} + \frac{vv_1}{2c_1}\left((d_1-c_1)\mathcal{D}_2 - (d-c){\mathcal{D}_2}^{-1}\right)W_{v_1}\\
&\qquad + \left(\frac{dv}{c}\mathcal{D}_2 - \frac{(d_1+c_1)v}{2c_1}{\mathcal{D}_2}^2 - \frac{v(d-c)}{2c_1}\right)W_{\mathcal{D}_2} = 0,\\
&c_1v\mathcal{D}_2W_v + cv_1W_{v_1} + (c\mathcal{D}_2 - c_1{\mathcal{D}_2}^2)W_{\mathcal{D}_2} = 0.
\end{aligned}$$

In new variables

$$\tilde{u} = u, \qquad \tilde{u}_1 = u_1, \qquad \tilde{v} = v(c_1\mathcal{D}_2 - c), \qquad \tilde{v}_1 = v_1(c_1\mathcal{D}_2 - c)\mathcal{D}_2^{-1}, \qquad \tilde{\mathcal{D}_2} = \mathcal{D}_2,$$

the last system can be rewritten as

$$\begin{aligned}
&\Big((c_1\tilde{\mathcal{D}_2} - c)\tilde{u}\tilde{v} + d(c_1\tilde{\mathcal{D}_2} - c)^2\Big)W_{\tilde{u}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_1}\Big(\tilde{u}_1\tilde{v}_1\tilde{\mathcal{D}_2}(c_1\tilde{\mathcal{D}_2} - c) + d_1(c_1\tilde{\mathcal{D}_2} - c)^2\Big)W_{\tilde{u}_1}\\
&\qquad + \tilde{v}^2\left(\frac{c_1d\tilde{\mathcal{D}_2}}{c} - \frac{(d_1+c_1)\tilde{\mathcal{D}_2}^2}{2} + \frac{c-d}{2}\right)W_{\tilde{v}}\\
&\qquad + \tilde{v}\tilde{v}_1\left(\frac{(d_1-c_1)\tilde{\mathcal{D}_2}^2}{2} - \frac{cd_1\tilde{\mathcal{D}_2}}{c_1} + \frac{c+d}{2}\right)W_{\tilde{v}_1} = 0,\\
&W_{\tilde{\mathcal{D}_2}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Special solutions of (3.9) may exist only when $\tilde{\mathcal{D}_2} = c_1/c$. We differentiate equation (3.9) with respect to $\tilde{\mathcal{D}_2}$ three times and get the following system of three equations

$$(dc^2 - c\tilde{u}\tilde{v})W_{\tilde{u}} + c^2d_1\frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_1}W_{\tilde{u}_1} + \frac{(c-d)\tilde{v}^2}{2}W_{\tilde{v}} + \frac{(c+d)\tilde{v}\tilde{v}_1}{2}W_{\tilde{v}_1} = 0, \tag{3.10}$$

$$(c_1\tilde{u}\tilde{v} - 2dc_1c)W_{\tilde{u}} - \left(2d_1c_1c\frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_1} + c\tilde{u}_1\tilde{v}\right)W_{\tilde{u}_1} + \frac{c_1d\tilde{v}^2}{c}W_{\tilde{v}} - \frac{cd_1\tilde{v}\tilde{v}_1}{c_1}W_{\tilde{v}_1} = 0, \tag{3.11}$$

$$dc_1^2W_{\tilde{u}} + \left(\frac{d_1c_1^2\tilde{v}}{\tilde{v}_1} + c_1\tilde{u}_1\tilde{v}\right)W_{\tilde{u}_1} - \frac{(d_1+c_1)\tilde{v}^2}{2}W_{\tilde{v}} + \frac{(d_1-c_1)\tilde{v}\tilde{v}_1}{2}W_{\tilde{v}_1} = 0, \tag{3.12}$$

that has no solutions if $c_1 \neq c$ or $d_1 \neq d$. In the case $c_1 = c$ and $d_1 = d$ the system becomes

$$W_{\tilde{u}} - \frac{\tilde{v}^2(2c^2d + (c-d)\tilde{u}_1\tilde{v}_1)}{2c(\tilde{u}\tilde{u}_1\tilde{v}\tilde{v}_1 + cd(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}_1\tilde{v}_1))}W_{\tilde{v}} - \frac{\tilde{v}\tilde{v}_1(2c^2d + (c+d)\tilde{u}_1\tilde{v}_1)}{2c(\tilde{u}\tilde{u}_1\tilde{v}\tilde{v}_1 + cd(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}_1\tilde{v}_1))}W_{\tilde{v}_1} = 0, \tag{3.13}$$

$$W_{\tilde{u}_1} - \frac{\tilde{v}\tilde{v}_1(-2c^2d + (c+d)\tilde{u}\tilde{v})}{2c(\tilde{u}\tilde{u}_1\tilde{v}\tilde{v}_1 + cd(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}_1\tilde{v}_1))}W_{\tilde{v}} + \frac{\tilde{v}_1^2(2c^2d + (-c+d)\tilde{u}\tilde{v})}{2c(\tilde{u}\tilde{u}_1\tilde{v}\tilde{v}_1 + cd(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}_1\tilde{v}_1))}W_{\tilde{v}_1} = 0. \tag{3.14}$$

Under the change of variables

$$u_1^* = \tilde{u}_1, \qquad v_1^* = \tilde{v}_1, \qquad v^* = \frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_1}\left(2c^2 d + (c+d)\tilde{u}_1\tilde{v}_1\right)^{\frac{2d}{c+d}},$$

$$u^* = \tilde{u}\tilde{v}_1\left(2c^2 d + (c+d)\tilde{u}_1\tilde{v}_1\right)^{\frac{c-d}{c+d}} - 2c^2 d\tilde{u}_1\tilde{v}_1^2\tilde{v}^{-1}\left(2c^2 d + (c+d)\tilde{u}_1\tilde{v}_1\right)^{-\frac{2d}{c+d}},$$

equations (3.13) and (3.14) become $W_{v_1^*} = 0$ and $W_{u_1^*} = 0$, respectively. We rewrite these first integrals in old variables and get the general solution in an implicit form $H(n, K_2, L_2) = 0$, where, for each n, H is a smooth function and K_2, L_2 are given by (1.24). The form of system (1.23) follows from (3.2), (3.4) and (3.8). The proof is complete.

4. Proof of Theorem 1.3

The identity $DJ_3 = J_3$ implies

$$-\frac{f_x + f_u u_x + f_v v_x + f_{u_1} f + f_{v_1} g + f_{u_x} u_{xx} + f_{v_x} v_{xx}}{f} + \frac{2v_1 f + u_1 g}{u_1 v_1 + d_1} = -\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{2v u_x + u v_x}{uv + d}. \tag{4.1}$$

Comparing the coefficients at u_{xx} and v_{xx} in the above identity, we get

$$f_{v_x} = 0, \qquad \frac{f_{u_x}}{f} = \frac{1}{u_x}.$$

Hence,

$$f = A(x, n, u, v, u_1, v_1) u_x. \tag{4.2}$$

It follows from the identity $DI_3 = I_3$ that

$$\frac{f^{\beta_1} g}{(u_1 v_1 + d_1)^{\beta_1}} + \frac{\beta_1 v_1^2 f^{\beta_1+1}}{(u_1 v_1 + d_1)^{\beta_1+1}} = \frac{u_x^{\beta} v_x}{(uv+d)^{\beta}} + \frac{\beta v^2 u_x^{\beta+1}}{(uv+d)^{\beta+1}}. \tag{4.3}$$

First we consider the case $\beta_1 \neq \beta$. We have:

$$g = T v_x u_x^{\beta-\beta_1} + M u_x^{1+\beta-\beta_1} + N u_x, \tag{4.4}$$

where

$$T = \frac{A^{-\beta_1}(u_1 v_1 + d_1)^{\beta_1}}{(uv+d)}, \quad M = \frac{\beta v^2 A^{-\beta_1}(u_1 v_1 + d_1)^{\beta_1}}{(uv+d)^{\beta+1}}, \quad N = -\frac{\beta_1 v_1^2 A}{(u_1 v_1 + d_1)}.$$

We substitute this expression for g into equation (4.1) and compare the coefficients at u_x^0, u_x, $u_x^{\beta-\beta_1}$, v_x, $u_x^{1+\beta-\beta_1}$ in the resulting equation. This gives:

$$\frac{A_x}{A} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{A_u}{A} + A_{u_1} + \frac{A_{v_1} N}{A} + \frac{2Av_1}{u_1 v_1 + d_1} + \frac{u_1 N}{u_1 v_1 + d_1} = \frac{2v}{uv+d}, \tag{4.6}$$

$$\frac{A_v}{A} = \frac{u}{uv+d}, \tag{4.7}$$

$$T\left(\frac{A_{v_1}}{A} + \frac{u_1}{u_1 v_1 + d_1}\right) = 0, \tag{4.8}$$

$$M\left(\frac{A_{v_1}}{A} + \frac{u_1}{u_1 v_1 + d_1}\right) = 0. \tag{4.9}$$

If $T = 0$ or $M = 0$, then $A = 0$. Hence, in order to have $A \neq 0$, we assume that $TM \neq 0$. If $TM \neq 0$, then equations (4.7)-(4.9) imply

$$A = \frac{uv + d}{u_1 v_1 + d_a} S,$$

where $S = S(n, u, u_1)$ is a function depending on n, u and u_1 only. We substitute the above expression for A into (4.6) and we find that

$$(u_1v_1 + d_1)^2(uv + d)\frac{S_u}{S} + (u_1v_1 + d_1)(uv + d)^2 S_{u_1} + v_1(uv + d)^2 S - v(u_1v_1 + d_1)^2 = 0. \quad (4.10)$$

Then we differentiate the last equation twice with respect to v_1 and we obtain:

$$2u_1^2(uv + d)\frac{S_u}{S} - 2u_1^2 v = 0,$$

that is,

$$\frac{S_u}{S} = \frac{v}{uv + d}.$$

This contradicts to the fact that S is independent of v, v_1. Hence, $\beta_1 = \beta$.

We proceed to the case when β is a constant, that is, β is independent of n. Let

$$\mathcal{D}_3 = \frac{u_1v_1 + d_1}{A(uv + d)}. \quad (4.11)$$

Then it follows from (4.3) that

$$g = \left(-\frac{\beta v_1^2}{\mathcal{D}_3(uv + d)} + \frac{\beta v^2 \mathcal{D}_3^\beta}{(uv + d)}\right) u_x + \mathcal{D}_3^\beta v_x. \quad (4.12)$$

Being rewritten in terms of $\mathcal{D}_3$, identity (4.1) casts into the form

$$\frac{\mathcal{D}_{3x}}{\mathcal{D}_3} + \left(\frac{\mathcal{D}_{3u}}{\mathcal{D}_3} + \frac{u_1v_1 + d_1}{{\mathcal{D}_3}^2(uv + d)}\mathcal{D}_{3u_1} + \frac{\beta(v^2\mathcal{D}_3^\beta - v_1^2\mathcal{D}_3^{-1})}{\mathcal{D}_3(uv + d)}\mathcal{D}_{3v_1} + \frac{v_1}{\mathcal{D}_3(uv + d)} - \frac{v}{(uv + d)}\right) u_x$$
$$+ \left(\frac{\mathcal{D}_{3v}}{\mathcal{D}_3} + \mathcal{D}_3^{\beta-1}\mathcal{D}_{3v_1}\right) v_x = 0.$$

We compare the coefficients at u_x, v_x and the free term and we get:

$$\mathcal{D}_{3x} = 0,$$
$$\frac{uv + d}{\mathcal{D}_3}\mathcal{D}_{3u} + \frac{u_1v_1 + d_1}{{\mathcal{D}_3}^2}\mathcal{D}_{3u_1} + \frac{\beta v^2\mathcal{D}_3^\beta - \beta v_1^2\mathcal{D}_3^{-1}}{\mathcal{D}_3}\mathcal{D}_{3v_1} + \frac{v_1}{\mathcal{D}_3} - v = 0, \quad (4.13)$$
$$\mathcal{D}_{3v} + \mathcal{D}_3^\beta\mathcal{D}_{3v_1} = 0. \quad (4.14)$$

We introduce a function W in the same way as in the proof of Theorem 1.1 and in new variables

$$\tilde{v}_1 = v_1 - v\mathcal{D}_3^\beta, \qquad \tilde{v} = v, \qquad \tilde{u} = u, \qquad \tilde{u}_1 = u_1, \qquad \tilde{\mathcal{D}}_3 = \mathcal{D}_3,$$

equations (4.14) and (4.13) for the function $W = W(n, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{\mathcal{D}}_3)$ can be rewritten as follows

$$W_{\tilde{v}} = 0,$$
$$\tilde{\mathcal{D}}_3(\tilde{u}\tilde{v} + d)W_{\tilde{u}} + (\tilde{u}_1(\tilde{v}_1 + \tilde{v}\tilde{\mathcal{D}}_3^\beta) + d_1)W_{\tilde{u}_1}$$
$$+ \tilde{\mathcal{D}}_3(\tilde{v}(\tilde{\mathcal{D}}_3 - \tilde{\mathcal{D}}_3^\beta) - \tilde{v}_1)W_{\tilde{\mathcal{D}}_3} - \beta\tilde{v}_1(\tilde{v}_1 + \tilde{v}\tilde{\mathcal{D}}_3^\beta)W_{\tilde{v}_1} = 0.$$

We differentiate the latter equation with respect to $\tilde{v}$, employ the identity $W_{\tilde{v}} = 0$, and get a new system of equations:

$$\tilde{u}\tilde{\mathcal{D}}_3 W_{\tilde{u}} + \tilde{u}_1\tilde{\mathcal{D}}_3^\beta W_{\tilde{u}_1} + (\tilde{\mathcal{D}}_3^2 - \tilde{\mathcal{D}}_3^{\beta+1})W_{\tilde{\mathcal{D}}_3} - \beta\tilde{v}_1\tilde{\mathcal{D}}_3^\beta W_{\tilde{v}_1} = 0,$$
$$d\tilde{\mathcal{D}}_3 W_{\tilde{u}} + (\tilde{u}_1\tilde{v}_1 + d_1)W_{\tilde{u}_1} - \tilde{\mathcal{D}}_3\tilde{v}_1 W_{\tilde{\mathcal{D}}_3} - \beta\tilde{v}_1^2 W_{\tilde{v}_1} = 0,$$

which can be rewritten as

$$W_{\tilde u} + \frac{d_1\tilde{\mathcal D}_3 - d_1\tilde{\mathcal D}_3^\beta + \tilde{\mathcal D}_3\tilde u_1\tilde v_1}{d_1\tilde u - d\tilde{\mathcal D}_3^\beta\tilde u_1 + \tilde u\tilde u_1\tilde v_1}W_{\tilde{\mathcal D}_3} - \frac{\beta d_1\tilde v_1\tilde{\mathcal D}_3^{\beta-1}}{d_1\tilde u - d\tilde{\mathcal D}_3^\beta\tilde u_1 + \tilde u\tilde u_1\tilde v_1}W_{\tilde v_1} = 0,$$

$$W_{\tilde u_1} - \frac{\tilde{\mathcal D}_3(d\tilde{\mathcal D}_3 - d\tilde{\mathcal D}_3^\beta + \tilde u\tilde v_1)}{d_1\tilde u - d\tilde{\mathcal D}_3^\beta\tilde u_1 + \tilde u\tilde u_1\tilde v_1}W_{\tilde{\mathcal D}_3} + \frac{\beta\tilde v_1(d\tilde{\mathcal D}_3^\beta - \tilde u\tilde v_1)}{d_1\tilde u - d\tilde{\mathcal D}_3^\beta\tilde u_1 + \tilde u\tilde u_1\tilde v_1}W_{\tilde v_1} = 0.$$

In these equations, we make the change of variables

$$u^* = \tilde u\tilde v_1^{1/\beta}d_1^{1/(1-\beta)}\tilde{\mathcal D}_3^{-1} - dd_1^{\beta/(1-\beta)}\tilde u_1\tilde v_1^{1/\beta},$$
$$\mathcal D_3^* = \tilde v_1^{(1-\beta)/\beta}\tilde{\mathcal D}_3^{\beta-1} - \tilde v_1^{(1-\beta)/\beta} + (\beta-1)d_1^{-1}\tilde u_1\tilde v_1^{1/\beta},$$
$$u_1^* = \tilde u_1, \qquad v^* = \tilde v, \qquad v_1^* = \tilde v_1,$$

and these equations become $W_{v_1^*} = 0$ and $W_{u_1^*} = 0$, respectively. We rewrite these first integrals in old variables and get that the general solution is given implicitly by $H(n, K_3, L_3) = 0$, where, for each n, the symbol H denotes an arbitrary smooth function and K_3, L_3 are given by (1.27), (1.28). The form of system (1.26) follows from (4.2), (4.12) and (4.11). The proof is complete.

Acknowledgments

We thank the referee for valuable suggestions and remarks.

REFERENCES

1. G. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.* V. **2**. Gautier Villas, Paris (1915).
2. A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *Exponential systems of type I and Cartan matrices* // Preprint, Bashkir Branch of Academy of Sciences of USSR, Ufa (1981). (in Russian).
3. A.N. Leznov, V.G. Smirnov, A.B. Shabat. *Internal symmetry group and integrability conditions for two-dimensional dynamical systems* // Teor. Matem. Fiz. **51**:1, 10–21 (1982). [Theor. Math. Phys. **51**:1, 322–330 (1982).]
4. V.V. Sokolov, A.V. Zhiber. *On the Darboux integrable hyperbolic equations* // Phys. Lett. A. **208**:4-6, 303–308 (1995).
5. A.V. Zhiber, V.V. Sokolov, S.Ya. Startsev. *Darboux integrable nonlinear hyperbolic equations* // Dokl. Akad. Nauk. **343**:6, 746–748 (1995). [Dokl. Math. **52**:1, 128–130 (1995).]
6. A.V. Zhiber, V.V. Sokolov. *Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type* // Uspekhi Matem. Nauk. **56**:1(337), 63–106 (2001). [Russ. Math. Surv. **56**:1(337), 61–101 (2001).]
7. A.V. Zhiber, R.D. Murtazina. *On the characteristic Lie algebras for the equations* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // J. Math. Sci. **151**:4, 3112–3122 (2008).
8. O.S. Kostrigina, A.V. Zhiber. *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic systems of equations* // J. Math. Phys. **52**:3, 033503 (2011)
9. R.D. Murtazina. *Nonlinear hyperbolic equations with characteristic ring of dimension* 3 // Ufimskij Matem. Zhurn. **3**:4, 113-118 (2011). (in Russian).
10. I.M. Anderson, M.E. Fels. *The Cauchy problem for Darboux integrable systems and non-linear d'Alembert formulas* // SIGMA. **9**, 017 (2013).
11. I.M. Anderson, M.E. Fels, P.J. Vassiliou. *On Darboux integrability* // in "Symmetry and perturbation theory", Proc. 6th Int. Conf. Italy, 2007. World Scientific, Hackensack, 13–20 (2008).
12. A.B. Zhiber, R.D. Murtazina, I.T. Habibullin, A.B. Shabat. *Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics* // Ufimskij Matem. Zhurn. **4**:3, 17–85 (2012). [Ufa Math. J. **4**:3, 17–85 (2012).]
13. I.T. Habibullin, A. Pekcan. *Characteristic Lie algebra and the classification of semi-discrete models* // Theor. Math. Phys. **151**:3, 781–790 (2007).

14. V.E. Adler, S.Ya. Startsev. *On discrete analogues of the Liouville equation* // Teor. Matem. Fiz. **121**:2, 217–284 (1999). [Theor. Math. Phys. **121**:2, 1484–1495 (1999).]
15. I.T. Habibullin. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // SIGMA. **1**, 023 (2005).
16. I.T. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva. *Cartan matrices and integrable lattice Toda field equations* // J. Phys. A **44**:46, 465202 (2011).
17. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *On some algebraic properties of semi-discrete hyperbolic type equations* // Turkish J. Math. **32**:3, 277-292 (2008).
18. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. **49**:10, 102702 (2008).
19. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t1)$ // J. Math. Phys. **50**:10, 102710 (2009).
20. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Sakieva. *On Darboux-integrable semi-discrete chain* // J. Phys. A **43**:43, 434017 (2010).
21. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Sakieva. *Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability* // J. Math. Phys. **52**:9, 093507 (2011).
22. I.T. Habibullin, E.V. Gudkova. *Classification of integrable discrete Klein-Gordon models* // Physica Scripta. **83**:4, 045003 (2010).
23. S.V. Smirnov. *Semidiscrete Toda lattices* // Teor. Matem. Fiz. **172**:3, 387–402 (2012). [Theor. Math. Phys. **172**:3, 1217–1231 (2012).]
24. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina. *Discretization of Liouville type nonautonomous equations* // J. Nonl. Math. Phys. **23**:4, 620–642 (2016).
25. K. Zheltukhin, N. Zheltukhina. *On the discretization of Laine equations* // J. Nonl. Math. Phys. **25**:1, 166–177 (2018).
26. K. Zheltukhin, N. Zheltukhina. *On the discretization of Darboux integrable Systems* // J. Nonl. Math. Phys. **27**:4, 616–632 (2020).

Kostyantyn Zheltukhin,
Department of Mathematics, Middle East Technical University,
Ankara, Turkey
E-mail: zheltukh@metu.edu.tr

Natalya Zheltukhina,
Department of Mathematics, Faculty of Science, Bilkent University,
Ankara, Turkey
E-mail: natalya@fen.bilkent.edu.tr

ABSTRACTS

A.B. Borisov

On integrability of $O(3)$–model

Abstract. A three-dimensional $O(3)$ model for a unit vector $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ has numerous application in the field theory and in the physics of condensed matter. We prove that this model is integrable under some differential constraint, that is, under certain restrictions for the gradients of fields $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ parametrizing the vector $\mathbf{n}(\mathbf{r})$). Under the presence of the differential constraint, the equations of the models are reduced to a one-dimensional sine-Gordon equation determining the dependence of the field $\Theta(\mathbf{r})$ on an auxiliary field $a(\mathbf{r})$ and to a system of two equations $(\nabla S)(\nabla S) = 0$, $\Delta S = 0$ for a complex-valued function $S(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\Phi(\mathbf{r})$. We show the solution of this system provide all known before exact solutions of models, namely, two-dimensional magnetic instantons and three-dimensional structures of hedgehog type. We find an exact solution for the field $S(\mathbf{r})$ as an arbitrary implicity function of two variables, which immediately represent the solution for the fields $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ in an implicit form. We show that the found in this way exact solution of the system for the field $S(\mathbf{r})$ leads one to exact solution of equations of $O(3)$–model in the form of an arbitrary implicit function of two variables.

Keywords: integrable system, $O(3)$–model, differential substitution, quasilinear equation, general solution

B.S. Bychkov, G.B. Shabat

On generalizations of Chebyshev polynomials and Catalan numbers

Abstract. We provide possible directions of generalizations of earlier found relations between the Chebyshev polynomials and the Catalan numbers arising in studying commuting difference operators. These generalizations are mostly related with ideas proposed by N.H. Abel in his publication in 1826, which then were reproduced by many authors in a modern language. As generalization of Chebyshev polynomials, we propose to consider polynomials with exactly two critical values well-studied in a so-called theory of dessins d'enfants. The Catalan numbers are located in the first column of the table of Harer–Zagier numbers related with the distribution by genius of orientable sewing of polygons with even number of sides. The commuting difference operators are implicitly contained in the Abel theory, who studied quasi-elliptic integrals, namely, the elliptic integrals of 3rd kind integrated in terms of logarithms. In the present work we formulate conjectures on relation between the main Abel theorem and commuting self-infinite matrices. In the work we provide calculations supporting the conjectured relations.

Keywords: Chebyshev polynomials, Catalan numbers, Harer-Zagier numbers, polynomial Pell equation, dessins d'enfants.

R.N. Garifullin

On integrability of semi-discrete Tzitzeica equation

Abstract. In the paper we consider a semi-discrete version of Tzitzeica equation
$$\frac{du_{n+1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} + (e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}},$$
which was found in a recent paper [R.N. Garifullin and I.T. Habibullin 2021 J. Phys. A: Math. Theor. 54 205201]. It was shown that this equation possess higher symmetries along the discrete and continuous directions. These higher symmetries are equations of Sawada-Kotera equation type and of discere Sawada-Kotera equation type. In the work we construct the Lax pair for this equation and for its higher symmetries. The found Lax pair is written out in terms of 3×3 matrices and this indicates the integrability of the found equations. To solve this problem, we employ the known relation between one of the higher symmetries with a well-studied KaupвЂ“Kupershmidt equation. The found Lax pairs can be employed in further studies of this equation, namely, for finding its conservations laws, the recursion operators and wide classes of solutions. Moreover, we write out two Lax representations in the form of scalar operators. The first representation is written in terms of the powers of the differentiation operators with respect to the continuous variable x, while the other is written via the powers of the operator of the shift along the discrete variable n.

Keywords: integrability, Lax pairs, higher symmetries, Tzitzeica equation.

A.V. Zhiber, M.N. Kuznetsova

Integrals and characteristic Lie rings of semi-discrete systems of equations

Abstract. The paper is devoted to the study of systems of semi-discrete equations $\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$ within the framework of an approach based on the concept of a characteristic Lie ring. Here $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \ldots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$. Among integrable nonlinear partial differential equations and systems, we find Darboux integrable nonlinear hyperbolic equations and systems. A feature of such equations is the existence of integrals along each characteristic direction, the so-called x - and y -integrals. This allows us to reduce the integration of a partial differential equation to integrating a system of ordinary differential equations. Darboux integrable equations and systems can be efficiently investigated and classified by means of characteristic Lie rings. Papers by Leznov, Smirnov, Shabat, Yamilov underlie an algebraic approach for studying nonlinear hyperbolic systems. Currently, the algebraic approach is extended to semi-discrete and discrete equations. In this paper, we prove that the system has N essentially independent x-integrals if and only if the characteristic Lie ring corresponding to a continuous characteristic direction is finite-dimensional.

Keywords:semi-discrete system of equations, characteristic ring, x-integral, Darboux integrable system.

O.V. Kaptsov, M.M. Mirzaokhmedov

General solutions of some linear equations with variable coefficients

Abstract. In the work we find general solutions to some classes of linear wave equations with variable coefficients. Such equations describe the oscillations of rods, acoustic waves, and also some models of gas dynamics are reduced to these equations.

To construct general solutions, we employ special types of Euler-Darboux transformations, namely, Levi type transformations. These transformations are first order differential substitutions. For constructing each transformation, we need to solve two linear second order ordinary differential equations. The solutions of one of these equations are determined by the solutions of the other equations by means of a differential substitution and Liouville formula. In the general case, it is not easy to solve these ordinary differential equations. However, it is possible to provide some formula for the superposition of the transformation of Levi type.

Starting with a classical wave equation with constant coefficients and employing the found transformations, we can construct infinite series of equations possessing explicit general solutions. By means of Matveev method we obtain limiting forms of iterated transformations. We provide a series of particular examples of the equations possessing general solutions.

Keywords: linear equations with variable coefficients, general solutions, limiting Levi transformations.

D.V. Millionschikov, S.V. Smirnov

Characteristic algebras and integrable exponential systems

Abstract. In the present work we study characteristic algebras for exponential systems corresponding to degenerate Cartan matrices. These systems generalize hyperbolic sine-Gordon and Tzitzeica equations well-known in the theory of integrable systems. For such systems, corresponding to Cartan matrices of rank 2, we describe explicitly characteristic algebras in terms of generators and relations and we prove that they have linear growth. We study the relations between the higher symmetries of these systems and the structure of their characteristic algebras. We describe completely the higher symmetries of exponential systems corresponding to the Cartan matrix of affine Lie algebra $A_2^{(1)}$. We also obtain partial results on symmetries of such systems corresponding to other degenerate Cartan matrices of rank 2. We propose a conjecture on the structure of higher symmetries of arbitrary exponential system corresponding to a degenerate Cartan matrix. We study an interesting combinatorics related with an operator generating a characteristic algebra in the simplest case for a Darboux integrable Liouville equation. The found combinatorial properties can be very useful for proving the aforementioned conjecture on the structure of higher symmetries. Moreover, in the present paper we give a rigorous meaning to notion of a characteristic algebra of a hyperbolic system used for a long time in the literature. We do this by means of the notion of Lie-Rinehart algebra and at the examples we demonstrate that such formalization is indeed needed.

Keywords: characteristic algebra, higher symmetry, Liouville equation, exponential system.

V.Yu. Novokshenov

Discrete Riemann-Hilbert problem and interpolation of entire functions

Abstract. We consider two problems in complex analysis which were developed in Ufa in 1970s years. These are a Riemann-Hilbert problem about jump of a piecewise-analytic function on a contour and a problem of interpolation of entire functions on a countable set in the complex plane. A progress in recent years led to comprehension that they have much common in subject. The first problem arrives as an equivalent of the inverse scattering problem applied for integrating nonlinear differential equations of mathematical physics. The second problem is a natural generalization of Lagrange formula for polynomial with given values on a finite set of points. It is shown that both problems can be united by generalization of the Riemann-Hilbert problem on a case of "discrete contour", where a "jump" of analytic function takes place. This formulation of discrete matrix Riemann-Hilbert (dmRH) problem is applied now for various problems of exactly solvable difference equations as well as estimates of spectrum of random matrices. It is shown in the paper how dmRH provides a way to integrate nonlinear difference equations such as a discrete Painlevé equation. On the other hand, it is shown how assignment of residues to meromorphic matrix functions is effectively reduced to an interpolation problem of entire functions on a countable set in $\mathbb{C}$ with the only accumulation point at infinity. Other application of dmRH includes calculation of Fredholm determinants emerging in combinatorics and representation of groups theory.

Keywords: Riemann-Hilbert problem, inverse scattering problem, entire functions, interpolation, canonical product, discrete Painlevé equations, Fredholm determinant, asymptotic expansions.

A.O. Smirnov, V.B. Matveev

Finite-gap solutions of nonlocal equations in Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy

Abstract. Nonlinear nonlocal models exist in many fields of physics. The most known of them are models possessing $\mathcal{PT}$-symmetries. Apart of $\mathcal{PT}$-symmetric models, nonlocal models with inverse time and/or coordinates are actively studied. Other types of nonlocalities arise much rare. As a rule, in works devoted to nonlinear nonlocal equations, soliton or quasi-rational solutions to such equations are studied.

In the present work we consider nonlocal symmetries, to which all equations in the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy. On the base of the properties of solutions satisfying nonlocal reductions of the equations in the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy, we propose a modification of theta-functional formula for Baker-Akhiezer functions. We find the conditions for the parameters of spectral curves associated with multi-phase solutions possessing no exponential growth at infinity. We show that under these conditions, the variables separate. The most part of statement of our work remain true for soliton and quasi-rational solutions since they are limiting cases for the multi-phase solutions.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy, nonlocal equation, PT-symmetry, finite-gap solution, spectral curve, theta function.

B.I. Suleimanov, A.M. Shavlukov

Integrable Abel equation and asymptotics of symmetry solutions of Korteweg-de Vries equation

Abstract. We provide a general solution for a first order ordinary differential equation with a rational right-hand side, which arises in constructing asymptotics for large time of simultaneous solutions of the Korteweg - de Vries equation and the stationary part of its higher non-autonomous symmetry. This symmetry is determined by a linear combination of the first higher autonomous symmetry of the Korteweg-de Vries equation and of its classical Galileo symmetry. This general solution depends on an arbitrary parameter. By the implicit function theorem, locally it is determined by the first integral explicitly written in terms of hypergeometric functions. A particular case of the general solution defines self-similar solutions of the Whitham equations, found earlier by G.V. Potemin in 1988. In the well-known works by A.V. Gurevich and L.P. Pitaevsky in early 1970s, it was established that these solutions of the Whitham equations describe the origination in the leading term of non-damping oscillating waves in a wide range of problems with a small dispersion. The result of this article supports once again an empirical rule saying under various passages to the limits, integrable equations can produce only integrable, in certain sense, equations. We propose a general conjecture: integrable ordinary differential equations similar to that considered in the present paper should also arise in describing the asymptotics at large times for other symmetry solutions to evolution equations admitting the application of the method of inverse scattering problem.

Keywords: integrability, Abel equation, Korteweg-de Vries equation, asymptotics.

V.E. Adler

Differential substitutions for non-Abelian equations of KdV type

Abstract. The work is devoted to constructing differential substitutions connecting the non-Abelian KdV equation with other third-order evolution equations. One of the main results is the construction of a non-Abelian analog of the exponential Calogero–Degasperis equation in a rational form. Some generalizations of the Schwarzian KdV equation are also obtained. Equations and differential substitutions under study contain arbitrary non-Abelian parameters. The construction method is based on the auxiliary linear problem for KdV, in which the usual spectral parameter is replaced by a non-Abelian one. The wave function, corresponding to a fixed value of this parameter, also satisfies a certain evolution equation. Passing to the left and right logarithmic derivatives of the wave function leads one to two versions of the modified KdV equation. In addition, a gauge transformation of the original linear problem leads to a linear problem for one of these versions, mKdV-2. After that, the described procedure is repeated, and the resulting evolution equation for the wave function contains already two arbitrary non-Abelian parameters. For the logarithmic derivative, we obtain an analog of the Calogero–Degasperis equation, which is thus a second modification of the KdV equation. Combining the found Miura-type transformations with discrete symmetries makes it possible to obtain chains of Bäcklund transformations for the modified equations.

Keywords: non-Abelian equation, Lax pair, Miura transformation.

V.S. Gerdjikov

On mKdV equations related to Kac-Moody algebras $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$

Abstract. We outline the derivation of the mKdV equations related to the Kac–Moody algebras $A_5^{(1)}$ and $A_5^{(2)}$. First we formulate their Lax representations and provide details how they can be obtained from generic Lax operators related to the algebra $sl(6)$ by applying proper Mikhailov type reduction groups $\mathbb{Z}_h$. Here h is the Coxeter number of the relevant Kac–Moody algebra. Next we adapt Shabat's method for constructing the fundamental analytic solutions of the Lax operators L. Thus we are able to reduce the direct and inverse spectral problems for L to Riemann–Hilbert problems (RHP) on the union of $2h$ rays l_ν. They leave the origin of the complex λ-plane partitioning it into equal angles π/h. To each l_ν we associate a subalgebra $\mathfrak{g}_\nu$ which is a direct sum of $sl(2)$–subalgebras. In this way, to each regular solution of the RHP we can associate scattering data of L consisting of scattering matrices $T_\nu \in \mathcal{G}_\nu$ and their Gauss decompositions. The main result of the paper states how to find the minimal sets of scattering data $\mathcal{T}_k$, $k = 1, 2$, from T_0 and T_1 related to the rays l_0 and l_1. We prove that each of the minimal sets $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ allows one to reconstruct both the scattering matrices T_ν, $\nu = 0, 1, \dots 2h$ and the corresponding potentials of the Lax operators L.

Keywords: mKdV equations, Kac–Moody algebras, Lax operators, minimal sets of scattering data.

I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov

Generalized invariant manifolds
for integrable equations and their applications

Abstract. In the article we discuss the notion of the generalized invariant manifold introduced in our previous study. In the literature, the method of the differential constraints is well known as a tool for constructing particular solutions for the nonlinear partial differential equations. Its essence is in adding to a given nonlinear PDE, another much simpler, as a rule ordinary, differential equation, consistent with the given one. Then any solution of the ODE is a particular solution of the PDE as well. However the main problem is to find this consistent ODE. Our generalization is that we look for an ordinary differential equation that is consistent not with the nonlinear partial differential equation itself, but with its linearization. Such generalized invariant manifold is effectively sought. Moreover, it allows one to construct such important attributes of integrability theory as Lax pairs and recursion operators for integrable nonlinear equations. In this paper, we show that they provide a way to construct particular solutions to the equation as well.

Keywords: invariant manifold, integrable system, recursion operator, Lax pair, algebro-geometric solutions, Dubrovin equations, spectral curves.

D. Levi, M.A. Rodríguez

Yamilov's theorem for differential and difference equations

Abstract. S-integrable scalar evolutionary differential difference equations in $1+1$ dimensions have a very particular form described by Yamilov's theorem. We look for similar results in the case of S-integrable 2-dimensional partial difference equations and 2-dimensional partial differential equations. To do so, on one side we discuss the semi-continuous limit of S-integrable quad equations and on the other, we semi-discretize partial differential equations. For partial differential equations, we show that any equation can be semi-discretized in such a way to satisfy Yamilov's theorem. In the case of partial difference equations, we are not able to find a form of the equation such that its semi-continuous limit always satisfies Yamilov's theorem. So we just present a few examples, in which to get evolutionary equations, we need to carry out a skew limit. We also consider an S-integrable quad equation with non-constant coefficients which in the skew limit satisfies an extended Yamilov's theorem as it has non-constant coefficients. This equation turns out to be a subcase of the Yamilov discretization of the Krichever-Novikov equation with non-constant coefficient, an equation suggested to be integrable by Levi and Yamilov in 1997 and whose integrability has been proved only recently by algebraic entropy. If we do a strait limit, we get non-local evolutionary equations, which show that an extension of Yamilov's theorem may exist in this case.

Keywords: differential difference equations, continuous and discrete integrable systems, Yamilov's theorem.

S.Ya. Startsev

On Darboux non-integrability of Hietarinta equation

Abstract. The autonomous Hietarinta equation is a well-known example of the quad-graph discrete equation which is consistent around the cube. In a recent work, it was conjectured that this equation is Darboux integrable, that is, for each of two independent discrete variables there exist non-trivial functions that remain unchanged on solutions of the equation after the shift in this discrete variable. We demonstrate that this conjecture is not true for generic values of the equation coefficients.

To do this, we employ two-point invertible transformations introduced by R.I. Yamilov. We prove that an autonomous difference equation on the quad-graph cannot be Darboux integrable if a transformation of the above type maps solutions of this equation into its solutions. This implies that the generic Hietarinta equation is not Darboux integrable since the Hietarinta equation in the general case possesses the two-point invertible auto-transformations. Along the way, all Darboux integrable subcases of the Hietarinta equation are found. All of them are reduced by point transformations to already known integrable equations.

At the end of the article, we also briefly describe another way to prove the Darboux non-integrability of the Hietarinta equation. This alternative way is based on the known fact that a difference substitution relates this equation to a linear one. Thus, the Hietarinta equation gives us an example of a quad-graph equation that is linearizable but not Darboux integrable.

Keywords: Hietarinta equation, quad-graph equation, Bäcklund auto-transformation, Darboux integrability, C-integrability.

K. Zheltukhin, N. Zheltukhina

On discretization of Darboux integrable systems admitting second-order integrals

Abstract. We consider a discretization problem for hyperbolic Darboux integrable systems. In particular, we discretize continuous systems admitting x- and y-integrals of the first and second order. Such continuous systems were classified by Zhyber and Kostrigina. In the present paper, continuous systems are discretized with respect to one of continuous variables and the resulting semi-discrete system is required to be also Darboux integrable.

To obtain such discretization, we take x- or y-integrals of a given continuous system and look for a semi-discrete systems admitting the chosen integrals as n-integrals. This method was proposed by Habibullin. For all considered systems and corresponding sets of integrals we were able to find such semi-discrete systems. In general, the obtained semi-discrete systems are given in terms of solutions of some first order quasilinear differential systems. For all such first order quasilinear differential systems we find implicit solutions. New examples of semi-discrete Darboux integrable systems are obtained. Also for each of considered continuous systems we determine a corresponding semi-discrete system that gives the original system in the continuum limit.

Keywords: Darboux integrability, discretization.

CONTENTS