ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 104-111.

УДК 517.925

ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ И АСИМПТОТИКИ СИММЕТРИЙНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

Б.И. СУЛЕЙМАНОВ, А.М. ШАВЛУКОВ

Аннотация. Представлено общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с рациональной правой частью, возникающего при построении асимптотик при больших значениях времени совместных решений уравнения Кортевега-де Вриза и стационарной части его высшей неавтономной симметрии. Эта симметрия определяется линейной комбинацией первой высшей автономной симметрии уравнения Кортевега-де Вриза и его классической симметрии Галилея. Данное общее решение зависит от произвольного параметра. По теореме о неявной функции оно локально находится из первого интеграла, явно выписанного в терминах гипергеометрических функций. Частный случай этого общего решения определяет автомодельные решения уравнений Уизема, найденные ранее Г.В. Потеминым в 1988 г. (В известных работах А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского начала 70-х годов было установлено, что эти решения уравнений Уизема в главном порядке описывают возникновение незатухающих осциллирующих волн в широком ряде задач с малой дисперсией.) Результат статьи вновь подтверждает эмпирическое правило: из интегрируемых уравнений в результате различных предельных переходов могут получаться лишь в том или ином смысле интегрируемые уравнения. Выдвигается общая гипотеза: интегрируемые обыкновенные дифференциальные уравнения, подобные рассматриваемому в статье, должны возникать и при описании асимптотик при больших временах других симметрийных решений эволюционных уравнений, допускающих применение метода обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: интегрируемость, уравнение Абеля, уравнение Кортевега-де Вриза, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 34M55, 35Q53

1. Предельные переходы в интегрируемых уравнениях

Согласно хорошо известному эмпирическому закону, при описании асимптотик решений интегрируемых дифференциальных уравнений, в результате разумных предельных переходов, могут фигурировать решения только тоже интегрируемых уравнений (но часто в ином смысле, отличном от смысла интегрируемости допредельных уравнений).

Например, всевозможными континуальными пределами таких интегрируемых дифференциально – разностных уравнений, как цепочки Вольтерра

$$(c_n)'_t = c_n(c_{n+1} - c_{n-1})$$

и Тоды

$$(z_n)''_{tt} = e^{z_{n+1}-z_n} - e^{z_{n+1}-z_n}$$

могут быть лишь в том или ином смысле интегрируемые дифференциальные уравнения. То же касается континуальных пределов интегрируемых цепочек, дискретным по двум независимым переменным. Часть из этих предельных переходов в настоящее время обоснована математически строго [1].

B.I. Suleimanov, A.M. Shavlukov, Integrable Abel equation and asymptotics of symmetry solutions of Korteweg-de Vries equation.

Поступила 1 апреля 2021 г.

Замечание 1.1. *В первую очередь известность научным достижениям Р.И. Ямилова принесли работы, посвященные различным аспектам интегрируемости такого вида цепочек уравнений. В его статьях [2]–[5] приводятся, в частности, и конкретные примеры переходов от интегрируемых цепочек к их континуальным пределам.*

Один из простейших примеров предельного перехода от одного интегрируемого уравнения к другому представляет переход от интегрируемого методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ) с малой дисперсией ($\varepsilon \to 0$)

$$u'_t + uu'_x + \varepsilon^2 u'''_{xxx} = 0,$$

к уравнению Хопфа

$$u'_t + uu'_x = 0,$$

общее решение которого локально задается формулой

$$x - tu = F(u).$$

Это же уравнение Хопфа является бездиссипативным пределом при $\varepsilon \to 0$ уравнения Бюргерса

$$u'_t + uu'_x = \varepsilon^2 u''_{xx},$$

которое линеаризующей заменой Коула-Хопфа $u = -2\varepsilon^2 \Lambda'_x/\Lambda$ сводится к уравнению теплопроводности $\Lambda'_t = \varepsilon^2 \Lambda''_{xx}$.

Квазиклассическое приближение к решениям интегрируемого МОЗР нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с малой дисперсией

$$-i\varepsilon q'_t = \varepsilon^2 q''_{xx} + 2\delta |q|^2 q = 0 \qquad (\varepsilon \ll 1) \tag{1.1}$$

дает несколько более сложный пример подобного перехода: подстановка

$$q = \sqrt{h} \exp\left(i\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)$$

сводит (1.1) к системе двух вещественных эволюционных уравнений

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \qquad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - 2\delta h = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}},$$

бездисперсионный предел которой есть система

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \qquad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - 2\delta h \ = 0. \tag{1.2}$$

После дифференцирования второго уравнения системы (1.2) по переменной x и замены $v = 2\varphi'_x$ этот бездисперсионный предел принимает вид классической гидродинамической системы

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x - 4\delta h'_x = 0$$

(знаки постоянной δ определяют ее гиперболический и эллиптический варианты), решения которой преобразованием годографа

$$v(t,x), h(t,x) \to t(h,v), x(h,v)$$

выражаются через решения линейной системы уравнений

$$x'_h = vt'_h + 4\delta t'_v, \qquad x'_v = vt'_v - ht'_h.$$

И весьма любопытная трансформация смысла интегрируемости происходит [6]–[9] при переходе к бездисперсионным пределам пространственно многомерных интегрируемых МОЗР уравнений типа, например, уравнения Кадомцева–Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u'_t + uu'_x + \varepsilon^2 u'''_{xxx}\right) = u''_{yy}.$$

Интегрируемость [10] обобщенным методом годографа С.П. Царева [11], [12] гидродинамических уравнений Уизема, получающихся в результате усреднения интегрируемых МОЗР уравнений типа КдВ, НУШ и синус-Гордона, также является одним из подтверждений эмпирического закона, сформулированного в начале статьи.

Например, с помощью именно этого метода в сочетании с алгебро-геометрическим методом И.М. Кричевера [13] Г.В. Потеминым [14] были найдены в явном виде автомодельные решения уравнений Уизема, которые согласно известным результатам А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского [15], [16] задают в главном порядке поведение при $t \to \infty$ универсального специального решения уравнения КдВ

$$u'_t + uu'_x + u'''_{xxx} = 0, \tag{1.3}$$

с асимптотиками $u = -x^{\frac{1}{3}} + o(1)$ при $x \pm \infty$.

Замечание 1.2. *А.В. Гуревич и Л.П. Питаевский в* [16] *высказывали мнение, что система ОДУ, определяющая эти автомодельные решения уравнений Уизема, не может быть решена явно.*

Интегрируемые методом изомонодромных деформаций [17] обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) типа Пенлеве, часто фигурирующие при описании асимптотик при больших временах интегрируемых МОЗР уравнений, также являются примерами подобных предельных уравнений.

Замечание 1.3. *Среди многочисленных важных научных результатов А.Б. Шабату принадлежит и следующий: при описании асимптотики при больших временах начальной задачи общего положения для уравнения КдВ (1.3) в* [18] *и в разделе 8.3 его докторской диссертации* [19] *им приведен первый пример подобного перехода.*

Наряду с самими уравнениями Пенлеве в нелинейных задачах с малым параметром (в том числе тех, что описываются решениями интегрируемых уравнений) при описании различных резких переходных режимов универсальную роль играют и их высшие изомонодромные аналоги. Как сами уравнения Пенлеве, так и их высшие аналоги можно рассматривать в качестве своего рода нелинейных специальных функций волновых катастроф.

Общая теория таких нелинейных специальных функций, основы которой были заложены в работе А.В. Китаева [20] (одновременно и независимо один частный случай – высший аналог второго уравнения Пенлеве – рассматривался первым из авторов данной работы в [21]), на сегодняшний день активно развивается и находит многочисленные применения [22]–[50].

В частности, при описании в окрестности точки сборки решений бездисперсионных уравнений в главном по малому параметру ε порядке используется универсальное специальное решение Гуревича–Питаевского уравнения КдВ (1.3), о котором шла речь в абзаце над Замечанием 1.2. А как было установлено в [24], [26], это специальное решение одновременно удовлетворяет ОДУ

$$u''''_{xxxx} + \frac{5uu''_{xx}}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5(u^3 - tu + x)}{18} = 0, \tag{1.4}$$

являющимся первым высшим представителем иерархии изомонодромных аналогов первого уравнения Пенлеве из упомянутой статьи А.В. Китаева [20].

Замечание 1.4. *Это же* [26], [37] *решение ОДУ (1.4) возникает при описании континуальных пределов изомонодромных цепочек, которые в связи с задачами квантовой теории гравитации рассматривались в* [51], [52].

В.Р. Кудашев в [28] отметил следующее: после дифференцирования (1.4) по x получается стационарная часть неавтономной высшей симметрии уравнения КдВ (1.3), определяемая линейной комбинацией стационарных частей его классической симметрии Галилея $u'_{\tau_G} = 1 - tu'_x$ и его первой высшей автономной симметрии

$$u'_{\tau_5} = \left(u''''_{xxxx} + \frac{5u''_{xx}u}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5u^3}{18}\right)'_x. \tag{1.5}$$

Из симметрийного характера ОДУ (1.4) и результатов статьи [53] вид упомянутых выше решений Г.В. Потемина автомодельных решений уравнений Уизема выводится очень просто [24], [26], [28]. Вообще, в последнюю четверть века различные свойства решений ОДУ (1.4) (и главным образом, конечно, специального решения Гуревича–Питаевкого) с самых разных точек зрения рассматривались во множестве работ – см., например, [30], [32]–[35], [37], [39]–[42], [54].

2. Интегрируемое уравнение Кудашева

Асимптотика при $t \to \infty$ универсального решения Гуревича–Питаевского вне зоны быстрых колебаний задается двумя корнями кубического уравнения сборки

$$u^3 - tu + x = 0, \tag{2.1}$$

а в области незатухающих колебаний зависит от медленной переменной $z = xt^{-\frac{3}{2}}$, быстрой фазы

$$\Phi = t^{\frac{7}{4}} f(z) + f_0(z) \tag{2.2}$$

и имеет вид

$$u = \sqrt{t}(v_0(z,\Phi) + t^{-\frac{7}{4}} v_1(z,\Phi) + t^{-\frac{7}{2}} v_2(z,\Phi) + \dots). \tag{2.3}$$

Это почти очевидным образом следует из вида

$$u = \sqrt{t} v(z) \tag{2.4}$$

решений уравнений сборки (2.1) и вида линеаризаций на фоне (2.4) уравнения КдВ (1.3) и ОДУ (1.4).

В.Р. Кудашев в конце прошлого века попробовал, не обращаясь к методу усреднения Уизема, просто искать совместное асимптотическое решение вида (2.3) уравнений (1.3) и (1.4). При этом он обнаружил, что функция $f(z)$, определяющая главный член быстрой фазы (2.2) формулой

$$R(z) = \frac{7f(z)}{4f'_z} - \frac{3z}{2},$$

связана с решением довольно простого ОДУ первого порядка

$$R'_z = \frac{486R^4 - 171R^2 + 9zR + 5}{9(54R^3 - 9R + z)(2R + 3z)}, \tag{2.5}$$

которое, очевидно, эквивалентно уравнению Абеля второго рода

$$(486R^4 - 171R^2 + 5 + 9Rz)z'_R = 972R^4 - 162R^2 + (1458R^3 - 225R)z + 27z^2. \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. *В терминах решений уравнения (2.5) нетрудно описать и решение более общего ОДУ*

$$r'_x = \frac{486r^4 - 171tr^2 + 9xr + 5t^2}{9(54r^3 - 9tr + x)(2tr + 3x)}. \tag{2.7}$$

В самом деле, при $t = 0$ ОДУ (2.7) сводится к ОДУ $r'_x = r/(3x)$ с общим решением $r = const \cdot x^{\frac{1}{3}}$. А при $t \neq 0$ решения ОДУ (2.5) и (2.7) связаны друг с другом растяжениями

$$r(t,x) = t^{\frac{1}{2}} R(z), \qquad z = xt^{-\frac{3}{2}}.$$

В [37] выписаны формулы, по которым в случае специального решения Гуревича–Питаевского решение $R(z)$ ОДУ (2.5) связано с автомодельными решениями уравнений Уизема из статьи Г.В. Потемина [14]. (Сам В.Р. Кудашев эти формулы знал, но при жизни так и не опубликовал.)

Однако после вывода В.Р. Кудашевым уравнения (2.6) сразу же возник естественный вопрос: согласно изложенному в разделе 1 данной статьи эвристическому закону это уравнение, несомненно, должно быть интегрируемым. Но каким образом?

Ниже приводится ответ на этот вопрос, найденный в прошлом году с помощью системы компьютерной алгебры Maple.

Оказывается, уравнение Кудашева (2.6) обладает первым интегралом, который явно записывается в терминах гипергеометрических функций ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;y) \equiv F(\alpha,\beta;\gamma;y)$. Этот интеграл имеет вид (I – произвольная постоянная)

$$I = \frac{997920i\sqrt{15}(F(-\frac{7}{6},-\frac{1}{6};\frac{2}{3};c_1)(a_1b_6+b_8) + \frac{12789F(-\frac{1}{6},\frac{5}{6};\frac{5}{3};c_1)a_1c_2}{220})}{c_1^{\frac{1}{3}}(F(-\frac{5}{6},\frac{1}{6};\frac{4}{3};c_1)b_7 + 77711400F(\frac{1}{6},\frac{7}{6};\frac{7}{3};c_1)a_1(b_5+b_9))},$$

где функции a_i, b_i, c_i задаются формулами:

$$a_1(R) = R^2 - \frac{1}{3}, a_2(R) = R^4 - \frac{25}{111}R^2 + \frac{1}{1332}, a_3(R,z) = R^3 - \frac{2R}{7} + \frac{z}{14},$$
$$a_4(R) = R^6 - \frac{55}{174}R^4 + \frac{19}{1044}R^2 - \frac{1}{6264}, a_5(R) = R^6 - \frac{503}{3198}R^4 + \frac{25}{6396}R^2 - \frac{1}{115128},$$
$$a_6(R) = R^2(3R^2-1), a_7(R) = -\frac{2665}{1421}R^6 + \frac{2515}{8526}R^4 - \frac{125}{17052}R^2 + \frac{5}{306936},$$
$$a_8(R) = \sqrt{3R^4 - R^2}, a_9(R) = R^2 - \frac{1}{24}, a_{10}(R) = 660R^4 - 76R^2 + 1,$$
$$a_{11}(R) = 1980R^6 - 888R^4 + 79R^2 - 1,$$
$$b_1(R,z) = 2i\sqrt{15}a_8(R)(3R^2-1) + 126R^4 + 9zR - 36R^2,$$
$$b_2(R) = \sqrt{21}(31968R^6 - 8532R^4 + 324R^2 - 1) + a_8(R)(-83160R^4 + 9576R^2 - 126),$$
$$b_3(R) = -\frac{148\sqrt{21}a_2(R)a_8(R)a_9(R)}{1155} + R^8 - \frac{74}{165}R^6 + \frac{79R^4 - R^2}{1980},$$
$$b_4(R) = -\frac{533i\sqrt{35}a_1(R)a_5(R)}{1421} + 5a_4(R)R^2, b_5(R) = a_1(R)R^2\left(3i\sqrt{35}a_5(R) + \frac{4263a_4(R)}{533}\right),$$
$$b_6(R) = \frac{1}{220}\left(i\sqrt{35}a_6(R)^{\frac{3}{2}}a_{10}(R) + 19188\sqrt{21}a_3(R)a_5(R)R - 7308i\sqrt{15}a_1(R)a_4(R)R^2\right),$$
$$b_7(R,z) = 15120i\sqrt{15}a_6(R)^{\frac{3}{2}}a_{11}(R) - 124338240R(i\sqrt{15}a_1(R)R(\sqrt{21}a_1(R)a_5(R)$$
$$- \frac{1036a_2(R)a_8(R)a_9(R)}{533}) - \frac{29841a_3(R,z)a_4(R)R^2}{533} + 7\sqrt{21}a_3(R)a_5(R)a_8(R)),$$
$$b_8(R,z) = \frac{444a_8(R)}{385}\left(3i\sqrt{35}a_1(R)^2a_2(R)a_9(R) - \frac{29841a_3(R,z)a_4(R)R}{148}\right),$$
$$b_9(R) = a_8(R)\left(-\sqrt{21}a_1(R)a_5(R) - \frac{1421i\sqrt{15}a_4(R)R^2}{533}\right),$$
$$c_1(R,z) = -\frac{2993760i\sqrt{15}a_1(R)b_3(R)}{b_1(R,z)b_2(R)},$$
$$c_2(R) = a_8(R)b_4(R) + a_1(R)R^2\left(\sqrt{21}a_7(R) + i\sqrt{15}a_4(R)\right).$$

В следующей таблице приводятся приближенно вычисленные значения I, соответствующие решениям пяти различных начальных задач для ОДУ (2.6).

Начальное условие	Приближенное значение I	Промежуток счета по R
$z(0) = 0$	$0.0960605 + 0.1663816i$	$R \in [-10, 10]$
$z(1) = 0$	$0.0194046 + 0.0336097i$	$R \in [-11, 11]$
$z(5) = 7$	$0.0308202 + 0.0533821i$	$R \in [-1, 15]$
$z(50) = 75$	$0.03177193 + 0.05503056i$	$R \in [-1, 60]$
$z(-0.57735) = 0.3849$	$0.000591 + 0.0010237i$	$R \in [-10, 0]$

Таблица 1: Приближенные значения I, соответствующие пяти различным начальным задачам.

3. Заключение

По мнению авторов статьи ее результат потенциально имеет не только частное значение. Возникает, например, предположение о том, что системы двух неавтономных ОДУ

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{(2A-1)(-288A^3+192A^2+24sA-27A-4s+4B)}{(A+2s)(-576A^3+504A^2-126A+48sA+8B-12s+9)}, \\ B'_s &= \left(36A+3s-54A^2-\frac{9}{2}\right)A'_s+\frac{108A^3-108A^2-6sA+6B+27A+4s}{2A+4s}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{(2A-1)(288A^3-192A^2+24sA+27A-4s-4B)}{(A-2s)(-576A^3+504A^2-126A-48sA+8B+12s+9)}, \\ B'_s &= (36A-3s-54A^2-\frac{9}{2})A'_s-\frac{108A^3-108A^2+6sA+6B+27A-4s}{2A-4s}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

рассматривавшиеся в публикациях Р.Н. Гарифуллина [44], [46], тоже должны иметь по два первых интеграла, которые можно явно выписать в терминах гипергеометрических функций. (Посредством решений систем ОДУ (3.1) и (3.2) описываются асимптотики при $t \to \infty$ вида

$$u = t(v_0(z,\Phi)+t^{-\frac{5}{4}}v_1(z,\Phi)+t^{-\frac{5}{2}}v_2(z,\Phi)+\dots), \quad \Phi = t^{\frac{5}{2}}f(s)+n(s) \quad \left(s=\frac{x}{t^2}\right)$$

совместных решений уравнения КдВ (1.3) и ОДУ пятого порядка

$$\left(u''''_{xxxx}+\frac{5u''_{xx}u}{3}+\frac{5(u'_x)^2}{6}+\frac{5u^3}{18}\right)'_x \pm \frac{2u+xu'_x-3t(u'''_{xxx}+uu'_x)}{6}=0,$$

определяемых двумя линейными комбинациями стационарных частей первой высшей неавтономной симметрии (1.5) и классической симметрии растяжения $u_{\tau_r}=2u+xu'_x-3t(u'''_{xxx}+uu'_x)$.)

Гипотеза: подобного вида асимптотики при больших временах совместных решений различных нелинейных интегрируемых МОЗР эволюционных уравнений с ОДУ типа высших Пенлеве, определяемых неавтономными симметриями и, более общо, инвариантными многообразиями этих эволюционных уравнений, также должны описываться интегрируемыми в схожем смысле ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.А. Калякин. *Об асимптотических переходах от дискретных моделей к непрерывным* // Теор. матем. физ. **76**:3, 323–327 (1988).
2. Р.И. Ямилов. *О классификации дискретных эволюционных уравнений* // Успехи мат. наук. **38**:6(234), 155–156 (1983).
3. D. Levi, P. Winternitz, R.I. Yamilov. *Symmetries of the continuous and discrete Krichever-Novikov equation* // SIGMA. **7**, 097 (2011).
4. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *On integrability of a discrete analogue of Kaup-Kupershmidt equation* // Уфимск. матем. журнал. **9**:3, 158–164 (2017).
5. Р.Н. Гарифуллин, Р.И. Ямилов. Об интегрируемости решеточных уравнений с двумя континуальными пределами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. **152**, 159–164 (2018).
6. V.E. Zakharov. *Dispersionless limit of integrable systems in 2 + 1 dimensions* // In: Singular Limits of Dispersive Waves, Ercolani, N.M. et al. (eds.), NY: Plenum Press, 1994, P. 165—174.
7. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova. *Hydrodynamic reductions of multi- dimensional dispersionless PDEs: the test for integrability* // J. Math. Phys. **45**:6, 2365–2377 (2004).
8. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova. *On integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems* // Comm. Math. Phys. **48**, 187–206 (2004).
9. E.V. Ferapontov, B. Kruglikov. *Dispersionless integrable systems in 3D and Einstein-Weyl geometry* // J. Diff. Geom. **97**, 215–254 (2014).
10. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков. *Гидродинамика слабо деформированнных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория* // Успехи мат. наук. **44**:6(270), 29–98 (1989).
11. С.П. Царев. *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа* // Докл. АН СССР. **282**:3, 534–537 (1985).
12. С.П. Царев. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **54**:5, 1048–1068.

13. И.М. Кричевер. *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений* // Функц. анализ и его прил. **22**:3, 37–52 (1988).
14. Г.В. Потемин. *Алгебро-геометрическое построение автомодельных решений уравнений Уизема* // Успехи мат. наук. **43**:5(263), 211–212 (1988).
15. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский. *Опрокидывание простой волны в кинетике разреженной плазмы* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **60**:6, 2155–2174 (1971).
16. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский. *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **65**:2, 590–604 (1973).
17. А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас. *Трансцеденты Пенлеве. Метод задачи Римана* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая линамика», 2005.
18. А.Б. Шабат. *Об уравнении Кортевега–де Фриса* // Докл. АН СССР. **211**:6, 1310–1313 (1973).
19. А.Б. Шабат. *Операторы преобразования и нелинейные уравнения* //Диссертация ... д. ф. -м. н. Уфа: БГУ. 1974 г.
20. А.В. Китаев. *Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве* // Записки ЛОМИ. **187**, 53–74 (1991).
21. Б.И. Сулейманов. *Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустики* // Записки ЛОМИ. **187**, 110–128 (1991).
22. Б.И. Сулейманов. *О «нелинейном» обобщении специальных функций волновых катастроф, описываемых двукратными интегралами* // Мат. заметки. **52**:5, 102–106 (1992).
23. Б.И. Сулейманов, И.Т. Хабибуллин. *Симметрии уравнения Кадомцева—Петвиашвили, изомонодромные деформации и «нелинейные» обобщения специальных функций волновых катастроф* // Теор. матем. физ. **97**:2, 213–216 (1993).
24. Б.И. Сулейманов. *О решении уравнения Кортевега—де Вриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией* // Письма в ЖЭТФ. **58**:11, 606–610 (1993).
25. Б.И. Сулейманов. *О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик*// Теор. матем. физ. **98**:2, 198–206 (1994).
26. Б.И. Сулейманов. *Возникновение бездиссипативных ударных волн и «непертурбативная» квантовая теория гравитации* //Журн. Экс. и Теор. Физ. **105**:5, 1089–1099 (1994).
27. A.V. Kitaev. *Caustics in* $1+1$ *integrable systems* // J. Math. Phys. **35**:2, 2934–2954 (1994).
28. V.R. Kudashev. *KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equaton symmetry* // arXiv preprint putt-soll 9404002. (1994)-arxiv.org.
29. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах* // Письма в ЖЭТФ. **62**:4, 358–362 (1993).
30. V. Kudashev, B. Suleimanov. *A soft mechanism for generation the dissipationless shock waves* // Phys. Letters A. **221**:3, 4, 204–208 (1996). 1996.
31. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Малоамплитудные дисперсионные колебания на фоне приближения нелинейной геометрической оптики* // Теор. матем. физ. **118**:3, 413–422 (1999).
32. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов. *Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн* // Прикл. мат. мех. **65**:3, 456–466 (2001).
33. B. Dubrovin. *On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: Universality of critical behaviour* // Comm. Math. Phys. **267**, 117–139 (2006).
34. T. Claeys, M. Vanlessen. *The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation* // Nonlinearity. **20**:5, 1163–1184 (2007).
35. T. Grava, C. Klein. *Numerical study of a multiscale expansion of the Korteweg–de Vries equation and Painlevé-II equation* // Proc. of the Royal Society A. **464**:2091, 733–757 (2008).
36. B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein. *On Universality of Critical Behavior in the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation, Elliptic Umbilic Catastrophe and the Tritronquée Solution to the Painlevé-I Equation* // J. Nonl. Science. **19**:1, 57–94 (2009).
37. R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov. *Phase Shift in the Whitham Zone for the Gurevich-Pitaevskii Special Solution of the Korteweg–de Vries Equation* // Phys. Lett. A. **374**:13, 14, 1420–1424 (2010). 2010.
38. Р.Н. Гарифуллин, Б.И. Сулейманов. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // Журн. Экс. и Теор. Физ. **137**:1, 149–165 (2010).
39. T. Claeys. *Asymptotics for a special solutions to the second member of the Painleve I hierarhy* // J. Phys. A. **43**:43, 434012. 18 pp. (2010).
40. T. Claeys, T. Grava. *Solitonic asymptotics for the Korteweg-de Vries equation in the small dispersion limit* // SIAM J. Math. Anal. **42**:5, 2132–2154 (2010).

41. T. Claeys. *Pole-free solutions of the first Painlevé Hierarchy and non-generic critical behavior for the KdV equation* // Physica D: Nonlinear Phenomena. **241**:23, 2226–2236 (2011).
42. T. Grava, A. Kapaev, C. Klein. *On the Tritronquée Solutions of P_I^2* // Constr. Approx. **41**:3, 425–466 (2015).
43. B. Dubrovin, M. Elaeva. *On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity* // Russian J. Math. Phys. **19**:4, 449–460 (2012).
44. Р.Н. Гарифуллин. *Сдвиг фазы для совместного решения уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимск. матем. журн. **4**:2, 80–86 (2012). **4**:2, 52-61 (2012).]
45. M. Bertola, A. Tovbis. *Universality for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation at the Gradient Catastrophe Point: Rational Breathers and Poles of the Tritronquée Solution to Painlevé I* // Comm. Pure and Appl. Math. **66**, 678–752 (2013).
46. Р.Н. Гарифуллин. *О совместном решении уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимск. матем. журн. **8**:4, 53–62 (2016).
47. Б.И. Сулейманов. *Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае* // Письма в ЖЭТФ. **106**:6, 375–380 (2017).
48. Б.И. Сулейманов. *Об аналогах функций волновых катастроф, являющихся решениями нелинейных интегрируемых уравнений* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. **163**, 81–95 (2019).
49. D. Bilman, L. Ling, P.D. Miller. *Extreme superposition: rogue waves of infinite order and the Painlevé-III hierarchy* // Duke Math. J. **169**, 671–760 (2020).
50. V.E. Adler. *Nonautonomous symmetries of the KdV equation and step-like solutions*// J. of Nonlinear Math. Phys. **27**:3, 478–493 (2020).
51. E. Bresin, E. Marinari, G. Parisi. *A nonperturbative ambiguty free solution of a string model* // Phys. Lett. B. **242**:1, 35-38 (1990).
52. M. Douglas, N. Seiberg, S. Shenker. *Flow and unstability in quantum gravity* // Phys. Lett. B. **244**:3,4, 381–386 (1990).
53. В.Р. Кудашев, С.Е. Шарапов. *Наследование симметрий при усреднении уравнения КдФ по Уизему и гидродинамические симметрии уравнений Уизема* // Теор. матем. физ. **87**:1, 40–47 (1991).
54. Б.И. Сулейманов. *«Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы* // Функц. анализ и его прил. **48**:3, 520–62 (2014).

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bisul@mail.ru

Азамат Мавлетович Шавлуков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: aza3727@yandex.ru