ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 44-73.

УДК 517.957, 512.818.4, 519.142

Светлой памяти наших
учителей и старших коллег —
Алексею Борисовичу Шабату
и Равилю Исламовичу Ямилову
посвящается.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Д.В. МИЛЛИОНЩИКОВ, С.В. СМИРНОВ

Аннотация. В данной работе изучаются характеристические алгебры для систем экспоненциального типа, соответствующих вырожденным матрицам Картана. Эти системы обобщают хорошо известные в теории интегрируемых систем гиперболические уравнения синус-Гордон и Цицейки. Для таких систем, соответствующих матрицам Картана ранга 2, характеристические алгебры описаны явно в терминах образующих и соотношений, и доказано, что они имеют линейный рост. Исследуется связь между высшими симметриями этих систем и структурой их характеристических алгебр. Полностью описаны высшие симметрии экспоненциальной системы, отвечающей матрице Картана аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$. Получены также частичные результаты о симметриях систем, соответствующих другим вырожденным матрицам Картана ранга 2. Высказана гипотеза о структуре высших симметрий произвольной экспоненциальной системы, соответствующей вырожденной матрице Картана. Изучена интересная комбинаторика, связанная с оператором, порождающим характеристическую алгебру в самом простом случае — для интегрируемого по Дарбу уравнения Лиувилля. Найденные комбинаторные свойства могут оказаться весьма полезными для доказательства высказанной гипотезы о структуре высших симметрий. Кроме того, в данной статье давно используемому в литературе понятию характеристической алгебры гиперболической системы придается математически строгий смысл на основе понятия алгебры Ли–Райнхарта и на примерах продемонстрировано, что такая формализация действительно необходима.

Ключевые слова: характеристическая алгебра, высшая симметрия, уравнение Лиувилля, система экспоненциального типа.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30, 17B67, 17B70

1. Введение

В 1981 году А.Б. Шабатом и Р.И. Ямиловым была написана работа [1], в которой рассматривались так называемые *системы экспоненциального типа*, т.е. системы гиперболических уравнений в частных производных вида

$$w_{xy}^j = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} w^k\right), \quad j = 1, 2, \dots, r, \tag{1.1}$$

D.V. Millionschikov, S.V. Smirnov, Characteristic algebras and integrable exponential systems.

Исследование С.В. Смирнова (параграфы 6, 7) выполнено за счет средств РНФ в рамках научного проекта №20-11-20214.

Поступила 21 апреля 2021 г.

где a_{jk} — постоянные коэффициенты, а функции w^j зависят от переменных x и y. Нетрудно проверить, что если матрица $M = (a_{jk})$ является матрицей Картана простой алгебры Ли серии A, то соответствующая система вида (1.1) сводится к двумеризованной цепочке Тоды

$$q_{j,xy} = \exp(q_{j+1} - q_j) - \exp(q_j - q_{j-1}), \quad j = 0, 1, \ldots, r, \tag{1.2}$$

с тривиальными граничными условиями $q_{-1} \equiv \infty$, $q_{r+1} \equiv -\infty$.

Исследование подобных систем вида (1.1) в работе [1] было основано на изучении *характеристических алгебр*, т.е. алгебр Ли, порожденных операторами D_y полного дифференцирования по переменной y в силу системы и $\frac{\partial}{\partial w^j}$. Шабатом и Ямиловым были высказаны две важных гипотезы об интегрируемости систем экспоненциального типа. Первая гипотеза состояла в том, что система (1.1) интегрируема по Дарбу (т.е. допускает полные наборы независимых характеристических интегралов по обеим переменным) тогда и только тогда, когда она является прямой суммой нескольких систем экспоненциального типа, матрицы M которых являются матрицами Картана простых алгебр Ли. Вторая гипотеза утверждала, что системы вида (1.1), не интегрируемые по Дарбу, но интегрируемые методом обратной задачи, соответствуют медленно растущим характеристическим алгебрам. Несмотря на то, что доказательство основной классификационной теоремы в работе [1] содержало некоторые пробелы, которые не устранены и по сей день (что, по-видимому, и явилось причиной того, что этот текст так и остался в статусе препринта), эта работа послужила отправной точкой для большого количества исследований и публикаций на тему систем экспоненциального типа. В частности, в статье [2] были изучены интегрируемые системы экспоненциального типа с матрицами Картана размера 2, а в статье [3] — системы, соответствующие невырожденным матрицам Картана и, в частности, системы, соответствующие алгебрам Ли серии A, были проинтегрированы в явном виде. Отметим также работы уфимской школы [4]–[6], в которых изучались редукции систем экспоненциального типа и их связь с высшими симметриями, и целый ряд работ [7]–[17], в которых исследовались дискретные аналоги систем экспоненциального типа.

Хотя идеи, связанные с понятием характеристической алгебры неявно использовались еще Гурса [18] при его попытках классификации интегрируемых по Дарбу скалярных гиперболических уравнений, соответствующее определение было введено лишь в последней четверти двадцатого века в статье [19]. Впоследствии понятие характеристической алгебры широко использовалось при изучении интегрируемых по Дарбу дискретных и полудискретных уравнений в работах уфимской школы [20]–[30]. Подробное описание применений характеристических алгебр при изучении нелинейных уравнений содержится в книге [31]. Симметрии уравнений Клейна–Гордона изучались в статье [32].

Характеристические алгебры интегрируемых гиперболических уравнений дают примеры градуированных бесконечномерных алгебр Ли линейного роста. В статье [21] была изучена характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон, которая имеет скорость роста $\frac{3}{2}$, а в работе [25] была исследована характеристическая алгебра уравнения Цицейки, растущая со средней скоростью $\frac{4}{3}$. В работах [33], [34] были построены бесконечные линейные базисы для этих алгебр Ли и было показано, что они изоморфны неотрицательной части алгебры петель $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ и скрученной алгебре петель простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ соответственно.

Данная работа направлена на развитие некоторых идей, высказанных в препринте [1], и на продвижение в доказательстве высказанных там гипотез и преследует несколько целей. Во-первых, мы хотим придать должную алгебраическую строгость понятию характеристической алгебры (будут приведены примеры, показывающие, что в дискретном случае это совершенно необходимо): мы покажем, что к этим объектам естественно относиться не как к алгебрам Ли (или кольцам Ли), а как к алгебрам Ли–Райнхарта. Во-вторых, мы исследуем любопытную комбинаторику, связанную с уравнением Лиувилля — самым простым представителем класса экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана. И, в-третьих, мы опишем в явном виде характеристические алгебры экспоненциального типа (1.1) с вырожденными матрицами Картана ранга 2 и опишем высшие симметрии для некоторых из них. Как и в случае систем ранга 1, сводящихся к уравнениям sin-Гордон и Цицейки, характеристические алгебры этих систем имеют линейный рост.

В параграфе 2 дается краткий обзор известных результатов об интегрируемости систем экспоненциального типа, соответствующих матрицам Картана. В параграфе 3 вводится понятие алгебры Ли–Райнхарта, описывается структура характеристических алгебр уравнений sin-Гордон и Цицейки и приводится пример, показывающий, что характеристические алгебры правильно рассматривать именно как алгебры Ли–Райнхарта. Параграф 4 посвящен описанию понятия роста бесконечномерных алгебр Ли. В параграфе 5 изучается любопытная комбинаторика, связанная с характеристическими интегралами и симметриями уравнения Лиувилля. Параграф 6 посвящен явному описанию в терминах образующих и соотношений характеристических алгебр экспоненциальных систем, отвечающих вырожденным матрицам Картана ранга 2. В параграфе 7 описывается иерархия симметрий для системы, отвечающей аффинной матрице Картана $A_2^{(1)}$ и приводятся некоторые частичные результаты о высших симметриях систем, отвечающих другим вырожденным матрицам Картана ранга 2.

2. Системы экспоненциального типа и матрицы Картана

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений в частных производных экспоненциального типа, являющуюся многомерным обобщением классического уравнения Лиувилля

$$w^i_{xy} = e^{\rho_i}, \quad \rho_j = a_{i1}w^1 + \dots + a_{ir}w^r, \quad i = 1, \dots, r. \tag{2.1}$$

Лезнов [3] показал, что, если матрица коэффициентов $M = (a_{ij})$ является невырожденной матрицей Картана, то соответствующая экспоненциальная гиперболическая система (2.1) интегрируема по Дарбу. В его доказательстве [3] для матрицы Картана из серии A было явно найдено точное решение системы, зависящее от $2r$ произвольных функций, т.е. было явно построено многомерное обобщение классического решения одномерного уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Позднее в препринте [1] было высказано утверждение (предположение), что основной результат из работы [3] может быть перенесен и на случай произвольной матрицы Картана M, возможно вырожденной, при помощи метода обратной задачи рассеяния. Случай $r = 2$ был полностью разобран в [1, 2]:

$$\begin{cases} w^1_{xy} = e^{(a_{11}w^1 + a_{12}w^2)} \\ w^2_{xy} = e^{(a_{21}w^1 + a_{22}w^2)} \end{cases}, \qquad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Было показано [1, 2], что для вырожденных матриц Картана

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствующие экспоненциальные системы (2.2) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. Характеристические алгебры Ли этих уравнений (мы будем о них говорить в следующем параграфе) изоморфны некоторым подалгебрам Ли в алгебрах Ли $A_1^{(1)}, A_2^{(2)}$. Экспоненциальные системы (2.2), отвечающие невырожденным 2×2-матрицам Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

полупростых алгебр Ли $A_1 \oplus A_1, A_2, C_2, G_2$ являются интегрируемыми в явном виде.

Рассмотрим теперь вырожденную матрицу Картана $M = (a_{ij})$. Ее последнюю строку l_r можно представить в виде линейной комбинации первых $r-1$ строк:

$$l_r = \lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_{r-1} l_{r-1}.$$

Введем новые переменные

$$u^i = a_{i1}w^1 + \cdots + a_{ir}w^r, \quad i = 1, 2, \ldots r-1.$$

Тогда систему (2.1) можно переписать в виде

$$u^i_{xy} = a_{i1}e^{u_1} + a_{i2}e^{u_2} + \cdots + a_{ir-1}e^{u_{r-1}} + a_{ir}e^{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{r-1}u_{r-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Таким образом, для вырожденных матриц Картана размера r соответствующая экспоненциальная система сводится к системе, состоящей из $r-1$ гиперболического уравнения. В частности, вырожденные матрицы Картана размера 2 приводят к скалярным уравнениям sin-Гордон и Цицейки. В параграфе 6 мы изучим системы, к которым сводятся экспоненциальные системы, отвечающие вырожденным матрицам Картана размера 3.

3. Характеристические алгебры Ли–Райнхарта

Напомним конструкцию одного обобщения понятия алгебры Ли, известного в литературе под названием алгебры Ли–Райнхарта.

Определение 3.1 ([35]). *Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и A — коммутативная R-алгебра. Пара $(A, \mathcal{L})$ называется алгеброй Ли–Райнхарта, если*

1) $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли над R, которая действует на A левыми дифференцированиями, т.е.

$$X(ab) = X(a)b + aX(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in \mathcal{L};$$

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ является A-модулем.

Пара $(A, \mathcal{L})$ должна удовлетворять следующим условиям совместности

$$[X, aY] = X(a)Y + a[X, Y] \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathcal{L}, \ a \in A;$$
$$(aX)(b) = a(X(b)) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in \mathcal{L}.$$

Морфмизмом $\varphi : (A, \mathcal{L}) \to (A, \tilde{\mathcal{L}})$ алгебр Ли–Райнхарта $(A, \mathcal{L})$ и $(A, \tilde{\mathcal{L}})$ называется морфизм $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ алгебр Ли над R, согласованный с действием $\mathcal{L}$ на A.

Оказывается, что понятие алгебры Ли–Райнхарта естественным образом возникает в теории характеристических алгебр Ли гиперболических систем. В качестве базового примера разберем пример характеристической алгебры Ли $\chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона.

В [33], [34] было установлено, что в характеристической алгебре Ли

$$\chi(\sinh(u)) = \mathcal{L}ie(X_0, X_1)$$

можно выбрать бесконечный базис $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$, такой, что

$$[X_i, X_j] = c_{ij}X_{i+j}, \qquad c_{ij} = \begin{cases} 1, & j - i \equiv 1 \bmod 3 \\ 0, & j - i \equiv 0 \bmod 3 \\ -1, & j - i \equiv -1 \bmod 3 \end{cases}, \qquad i, j \geq 0. \tag{3.1}$$

Структурные соотношения (3.1) совпадают с каноническими соотношениями для базисных элементов алгебры неотрицательных петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))^{\leqslant 0}$ над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ или в других терминах, — неотрицательной части аффинной алгебры Каца–Муди $A_1^{(1)}$.

Сама характеристическая алгебра Ли $\chi(\sinh(u))$ является обычной алгеброй Ли, но в доказательстве ее коммутационных соотношений существенным образом используется структура некоторой вспомогательной алгебры Ли–Райнхарта. Тут стоит сразу заметить, что в монографии [31], а также в целом ряде статей [25] – [28] и др. использовался термин *кольцо Ли*. Этот выбор был не совсем удачным, сейчас в литературе все чаще применяется более правильный (на наш взгляд) термин *алгебра Ли–Райнхарта* [30].

Напомним некоторые известные конструкции. Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона $u_{xy} = f(u)$, полученное из классического уравнения

$$u_{tt} - u_{zz} = f(u)$$

заменой переменных $x = \frac{z+t}{2}, \quad y = \frac{z-t}{2}$.

Определим сложную функцию $g(x,y)$ при помощи функции многих переменных g и некоторого решения $u(x,y)$ уравнения Клейна–Гордона:

$$u = u(x,y), \quad g(x,y) = g(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = g(u, u_1, u_2, u_3, \dots),$$

где использованы обозначения

$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad u_3 = u_{xxx}, \quad \dots .$$

Классическая конструкция: при вычислении частной производной $\frac{\partial g}{\partial x}$ сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u_1} + \dots = u_1\frac{\partial g}{\partial u} + u_2\frac{\partial g}{\partial u_1} + \dots$$

возникает оператор $D = \frac{\partial}{\partial x}$ частной производной по x

$$D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k} + \dots . \tag{3.2}$$

Определение 3.2. *Многочлен $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = F(u, u_1, u_2, u_3, \dots)$ называется y-интегралом уравнения Клейна–Гордона, если $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.*

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(u, u_1, u_2, \dots) &= u_y\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_1} + u_{xxy}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots \\ &= \underbrace{u_y\frac{\partial F}{\partial u}}_{=0} + \underbrace{f\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots}_{=0}.\end{aligned}$$

Полином F будет y-интегралом, если будут выполняться условия

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad X_f(F) = f\frac{\partial F}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial F}{\partial u_2} + D^2(f)\frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots = 0.$$

Напомним, что характеристической алгеброй $\chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона называется алгебра Ли $\mathcal{L}ie(X_0, X_{\sinh u})$, порожденная двумя дифференциальными операторами $X_0, X_{\sinh u}$, где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_{\sinh u} = \sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_n}$$

и $D_y = X_{\sinh u} + X_0$. Строить нужный нам бесконечный базис в $\chi(\sinh(u))$ будем последовательно, для этого рассматриваем всевозможные коммутаторы высших порядков от образующих X_0, $X_{\sinh u}$.

На первом шаге зафиксируем линейную оболочку $\langle X_0, X_{\sinh u}, Y_1\rangle$, где $Y_1 = [X_0, X_{\sinh u}]$ и рассмотрим в ней другой базис

$$X_0, \quad X_1 = X_{\sinh u} + Y_1, \quad X_2 = X_{\sinh u} - Y_1.$$

Новые операторы могут быть записаны следующим образом

$$X_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(e^u)\frac{\partial}{\partial u_n}, \qquad X_2 = -\sum_{n=1}^{+\infty} D_x^{n-1}(e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Заметим, что эти операторы можно выразить через многочлены Белла $B_n(u_1,\ldots,u_n)$, о которых будем говорить более подробно в параграфе 5:

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{+\infty} B_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n}, \qquad X_2 = -e^{-u} \sum_{n=1}^{+\infty} B_{n-1}(-u_1,\ldots,-u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Первая идея доказательства [33], [34] — это представить характеристическую алгебру Ли $\chi(\sinh(u))$ как алгебру Ли $\mathcal{L}ie(X_0,X_1,X_2)$, порожденную не двумя, а тремя элементами X_0,X_1,X_2. Преимущество представления $\chi(\sinh(u)) = \mathcal{L}ie(X_0,X_1,X_2)$ заключается в следующих двух коммутационных соотношениях

$$[X_0,X_1] = X_1, \qquad [X_0,X_2] = -X_2,$$

которые означают, что векторы X_1,X_2 являются собственными для оператора $\operatorname{ad} X_0$, равно как и все их высшие коммутаторы. Именно это соображение и будет ключевым во всех вычислениях.

Второй идеей доказательства из [33], [34] является наблюдение, что коммутационные соотношения (3.1) можно находить без получения явных формул для самих операторов $X_3,X_4,X_5,\ldots$. Данная идея не является оригинальной и основана на известной элементарной лемме.

Лемма 3.1 ([31]). *Пусть дифференциальный оператор*

$$X = \sum_{i=1}^{+\infty} P_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad P_i = P_i(u,u_1,\ldots,u_n,\ldots),$$

коммутирует с оператором D. Тогда $X = 0$.

Сразу отметим, что в равенстве $[D,X_0] = 0$ нет никакого противоречия с предыдущей леммой, т.к. оператор $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}$ не имеет указанный в условии леммы 3.1 вид.

Не сложно проверить и другие коммутационные соотношения

$$[D,X_1] = -e^u X_0, \qquad [D,X_2] = e^{-u}X_0.$$

Появление функциональных множителей вида e^u, e^{-u} в правых частях этих формул и указывает на необходимость рассмотрения алгебр Ли–Райнхарта вместо обычных алгебр Ли.

Приведем в качестве примера еще одно коммутационное соотношение, где так же возникают функциональные множители e^u, e^{-u}

$$[D,X_3] = [D,[X_1,X_2]] = -\left[e^u X_0, X_2\right] + \left[X_1, e^{-u}X_0\right] = e^u X_2 - e^{-u}X_1.$$

Что можно сказать об алгебре Ли $\mathcal{L}ie(D,X_0,X_1,X_2)$, порожденной операторами D,X_0,X_1,X_2? Именно ее и надо реализовывать как подалгебру Ли в алгебре Ли–Райнхарта $(A,\mathcal{L})$, где A обозначает коммутативную алгебру квазимногочленов вида

$$A = \left\{ \sum_{k=-n}^{m} e^{ku}P_k, \quad P_k \in \mathbb{C}[u_1,u_2,u_3,\ldots], \quad n,m\in\mathbb{N} \right\},$$

а алгебра Ли $\mathcal{L}$ является алгеброй квазиполиномиальных дифференциальных операторов

$$X = f_0\frac{\partial}{\partial u} + f_1\frac{\partial}{\partial u^1} + f_2\frac{\partial}{\partial u^2} + \ldots, \quad f_i \in A, \quad i\in\mathbb{N}.$$

Заметим сразу, что

$$[D, -e^u X_0] = -D(e^u)X_0 = -e^u u_1 X_0, \qquad [D, e^{-u}X_0] = -e^{-u}u_1 X_0.$$

Продолжив этот процесс рекуррентно, мы видим, что алгебре Ли $\mathcal{L}ie(D, X_0, X_1, X_2)$ принадлежат и операторы с коэффициентами в виде квазимногочленов произвольных весов

$$-e^u B_n(u_1, \ldots, u_n)X_0, \qquad e^{-u}B_k(-u_1, \ldots, -u_n)X_0, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Было бы интересно изучить $\mathcal{L}ie(D, X_0, X_1, X_2)$ с точки зрения бесконечномерных $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли. Представляется, что она должна быть изоморфна одной из известных таких алгебр.

Однако главной целью всех наших вычислений является все же доказательство коммутационных соотношений (3.1).

$$[D, X_4] = -\left[[D, X_1], X_3\right] - [X_1, [D, X_3]] = [e^u X_0, X_3] - \left[X_1, e^u X_2 + e^{-u}X_1\right] = -e^u X_3,$$

где $X_4 = -[X_1, X_3]$.

Докажем, что $[X_1, X_4] = 0$. Для этого вычислим такой двойной коммутатор

$$[D, [X_1, X_4]] = [[D, X_1], X_4] + [X_1, [D, X_4]] = -\left[e^u X_0, X_4\right] - [X_1, e^u X_3] = -e^u X_4 + e^u X_4 = 0.$$

Аналогичным образом доказывается [34], что $[X_2, X_5] = 0$.

Далее определяем индуктивно все операторы канонического бесконечного базиса для характеристической алгебры Ли $\chi(\sinh(u))$ формулами

$$X_{3k+1} = -[X_1, X_{3k}], \qquad X_{3k+2} = [X_2, X_{3k}], \qquad X_{3k+3} = [X_1, X_{3k+2}], \qquad k \geq 1.$$

И уже для этих операторов по индукции доказываются коммутационные соотношения (3.1).

Следуя работе [2], можно предложить и другой способ алгебраических рассуждений. Он заключается в том, что у базисных операторов «убираются» функциональные множители вида $e^{\lambda u}$, иными словами, мы вводим новые операторы

$$L_{3k+1} = e^{-u}X'_{3k+1}, \qquad L_{3k+2} = e^u X'_{3k+2}, \qquad L_{3k+3} = X'_{3k+3}.$$

Очевидно, что новые дифференциальные операторы L_i удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (3.1), что и операторы X_i, но при этом они будут полиномиальными, т.е. они будут являться дифференцированиями алгебры полиномов $\mathbb{C}[u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots]$.

Коммутационные соотношения с участием оператора D изменят свой вид. Выпишем два основных таких соотношения.

$$[D, L_1] = -u_1 L_1, \quad [D, L_2] = u_1 L_2. \tag{3.3}$$

Мы приходим к конструкции так называемой *полиномиальной алгебры Ли*, предложенной Бухштабером [36]. Полиномиальная алгебра Ли по Бухштаберу — это алгебра Ли–Райнхарта в ситуации, когда алгебра A является некоторой алгеброй многочленов (чаще всего от конечного числа переменных), и при этом должны выполняться два важных дополнительных условия:

1) алгебра Ли $\mathcal{L}$, участвующая в определении, должна быть свободным модулем (чаще всего конечномерным) над алгеброй A;

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ и полиномиальная алгебра A должны быть градуированными, причем градуировки должны быть согласованы в естественном смысле.

Как было показано в [37] на примере $\chi(\sinh(u))$, изучение характеристических алгебр Ли приводит к необходимости рассматривать полиномиальные алгебры Ли A от бесконечного числа переменных, причем алгебры Ли, являются, вообще говоря, модулями счетного ранга над полиномиальной алгеброй A.

Определим теперь $\mathbb{Z}$-градуировки полиномиальной алгебры $A = \mathbb{C}[u_1, u_2, \dots, u_p, ...]$ и алгебры Ли $\mathcal{L}$ для характеристической алгебры Ли уравнения синус-Гордон, задав веса $w(u_i)$ образующих $u_1, u_2, u_3, \dots$ алгебры A и веса $w(L_i), w(D)$ базисных операторов $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ алгебры Ли $\mathcal{L}$

$$w(u_i) = -i, \quad w(D) = -1, \quad w(L_i) = i, \quad \text{где} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Полиномиальная алгебра Ли $(\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots], \mathcal{L})$ счетного ранга определяется при помощи счетного базиса $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ алгебры Ли $\mathcal{L}$, т.е. базиса левого модуля $\mathcal{L}$ над алгеброй многочленов $A = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, \dots]$.

1) базисные элементы $D, L_1, L_2, L_3, \dots$ должны удовлетворять коммутационным соотношениям (3.1) и (3.3).

2) действие алгебры $\mathcal{L}$ на алгебре многочленов $\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots]$ задается действием базисных операторов на переменных u_i

$$D(u_i) = u_{i+1}, \quad L_1(u_i) = B_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-1}), \quad L_2(u_i) = B_{i-1}(-u_1, \dots, -u_{i-1}), \quad i \geq 1.$$

3) действие базисных операторов L_k при $k \geq 3$, определяется по индукции, начиная с действия образующих L_1, L_2

$$L_3(u_i) = L_1 L_2(u_i) - L_2 L_1(u_i) = L_1(B_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}) - L_2 B_i(-u_1, -u_2, \dots, -u_{i-1}).$$

Коммутаторы $[D, L_k]$ для $k \geq 3$, определяются аналогично:

$$[D, L_3] = [D, [L_1, L_2]] = [[D, L_1], L_2] + [L_1[D, L_2]] = L_1 - L_2.$$

Анализ других примеров из приложений показывает, что и сами характеристические алгебры Ли могут иметь дополнительную структуру алгебры Ли–Райнхарта, что может существенно упростить поиск высших симметрий гиперболических систем. Это направление сейчас активно развивается [30].

Понятие характеристической алгебры допускает обобщение на случай полудискретных и полностью дискретных гиперболических уравнений [20], [22]. Если уравнение не симметрично по отношению к двум независимым переменным (а в полудискретном случае это всегда так), то необходимо определить две характеристические алгебры — по каждому из характеристических направлений. Мы не будем приводить здесь общей теории из работ [20], [22], а лишь ограничимся рассмотрением одного поучительного примера и дадим все необходимые для него определения.

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$u_{n+1,x} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n,x}), \tag{3.4}$$

где u — функция двух независимых переменных: непрерывной переменной x и дискретной n, зависимость от которой по традиции указывается в виде нижнего индекса. Аналитическая функция $I = I(u_{n,x}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots)$ называется *x-интегралом* уравнения (3.4), если ее полная производная по x в силу уравнения равна нулю: $D(I) = 0$, где

$$D = u_{n,xx} \frac{\partial}{\partial u_{n,x}} + u_{n,x} \frac{\partial}{\partial u_n} + f \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} + (Tf) \frac{\partial}{\partial u_{n+2}} + (T^2 f) \frac{\partial}{\partial u_{n+3}} \dots,$$

а T — оператор сдвига по дискретной переменной: $Tf = f(u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+1,x})$. Нетрудно заметить, что если функция I является интегралом уравнения (3.4), то она не может зависеть от $u_{n,x}$, поскольку в этом случае при применении оператора D мы получим слагаемое, содержащее $u_{n,xx}$, которое ни с чем не может сократиться. Таким образом, всякий x-интеграл также должен удовлетворять условию $X_0(I) = 0$, где $X_0 = \frac{\partial}{\partial u_{n,x}}$.

Алгебра Ли χ_x, порожденная операторами D и X_0, называется *x-характеристической алгеброй* уравнения (3.4). Из предыдущих рассуждений следует, что функция I является x-интегралом уравнения (3.4) если и только если она аннулирует характеристическую алгебру χ_x. По аналогии с идеями из работ [1], [2] естественно предположить, что уравнение (3.4) допускает нетривиальные x-интегралы если и только если его характеристическая алгебра конечномерна. Однако, как показывает следующий пример, в таком виде это утверждение неверно.

Пример 3.1. Рассмотрим полудискретный аналог уравнения Лиувилля

$$u_{n+1,x} - u_{n,x} = e^{u_{n+1}} + e^{u_n}.$$

Это уравнение было детально изучено в статье [38], где было показано, что по своим свойствам оно совершенно аналогично непрерывному уравнению Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Например, оно обладает x-интегралом

$$I = (1 + e^{u_{n+1} - u_{n+2}})(1 + e^{u_{n+1} - u_n}).$$

Изучим характеристическую алгебру χ_x этого уравнения. Нетрудно проверить, что в данном случае для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$T^k f = u_{n,x} + e^{u_n} + 2\left(e^{u_{n+1}} + e^{u_{n+2}} + \dots + e^{u_{n+k}}\right) + e^{u_{n+k+1}}.$$

Поэтому оператор D можно представить в виде $D = X_0 + u_{n,x} Y + W$, где

$$Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}, \quad W = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(e^{u_n} + 2\sum_{j=1}^{i-1} e^{u_{n+j}} + e^{u_{n+i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}.$$

Рассматривая коммутационные соотношения, нетрудно убедиться в том, что

$$[X_0, D] = Y, \quad [Y, D] = W,$$

откуда следует, что $Y, W \in \chi_x$. Поскольку $D \in \chi_x$, то $u_{n,x} Y = D - X_0 - W \in \chi_x$. Далее,

$$[u_{n,x} Y, W] = u_{n,x} W \in \chi_x,$$
$$[u_{n,x} Y, u_{n,x} W] = (u_{n,x})^2 W \in \chi_x,$$
$$[u_{n,x} Y, (u_{n,x})^2 W] = (u_{n,x})^3 W \in \chi_x,$$

и т.д. Легко видеть, что в данном случае характеристическая алгебра χ_x является бесконечномерной, как алгебра Ли над полем констант. Тем не менее, она является конечномерным модулем над кольцом многочленов от переменной $u_{n,x}$ и порождена полями X_0, Y и W, как алгебра Ли–Райнхарта.

Характеристические алгебры могут быть определены и эффективно использованы при изучении произвольных систем гиперболических уравнений. Рассмотренный пример показывает, что при переходе от экспоненциальных систем к общему случаю (как в дискретном, так, вообще говоря, и в непрерывном случае), характеристическую алгебру нужно определять не как алгебру Ли, а как алгебру Ли–Райнхарта и рассматривать ее размерность именно в этом смысле. Т.е. именно понятие алгебры Ли–Райнхарта дает в данном случае подходящую алгебраическую конструкцию.

4. Рост характеристических алгебр Ли

Появление и развитие теории характеристических алгебр в ее применении к теории симметрий гиперболических систем произошло по времени чуть позже появления первых работ Каца и Муди, в которых были заложены основы теории аффинных алгебр — *контрагредиентных алгебр Ли*, как они тогда назывались.

В конце 60-х годов Виктор Кац приступил к изучению простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$, удовлетворяющих следующему условию на размерности однородных компонент

$$\dim \mathfrak{g}_k \le P(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $P(t)$ — некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами. Такие бесконечномерные алгебры Ли Кац стал называть алгебрами Ли *конечного роста*.

Кац доказал [39], что бесконечномерная простая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечного роста, удовлетворяющая некоторым двум техническим условиям, изоморфна одной алгебре Ли (и только одной) из следующего списка (см. [40] для уточнения определений и обозначений)

- аффинные алгебры без центра — шесть бесконечных серий и семь исключительных алгебр

$$A_n^{(1)},\quad B_n^{(1)},\quad C_n^{(1)},\quad D_n^{(1)},\quad A_n^{(2)},\quad D_n^{(2)},\quad E_6^{(2)},\quad D_4^{(3)},\quad E_6^{(1)},\quad E_7^{(1)},\quad E_8^{(1)},\quad F_4^{(1)},\quad G_2^{(1)};$$

- алгебры Ли Картановского типа W_n, S_n, K_n, H_n.

В дополнение к своей теореме Кац сформулировал гипотезу, что отказ от дополнительных технических условий из его теоремы добавит к этому списку лишь одну простую $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли — алгебру Витта W. Гипотеза Каца была доказана Матье в 1990 году [40].

Появление термина *рост алгебры Ли* в работе Каца тоже не случайно, ведь теория роста групп и алгебр появилась и стала очень популярной именно в те самые годы [41]: конец 60-х и начало 70-х годов (понятие роста группы появилось чуть раньше). Термин *конечный рост* из работы [39] все-таки не прижился в алгебраической литературе, обычно сейчас говорят про *полиномиальный рост*.

Дадим современное определение функции роста алгебры Ли (см. детали в [41]). Предположим, что бесконечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена конечномерным подпространством $V_1(\mathfrak{g})$. Обозначим через $V_n(\mathfrak{g})$ подпространство $V_1(\mathfrak{g})$, натянутое на высшие коммутаторы длины не больше $n \geq 2$ с произвольной расстановкой скобок. Возникает цепочка бесконечномерных подпространств

$$V_1(\mathfrak{g}) \subset V_2(\mathfrak{g}) \subset \dots \subset V_n(\mathfrak{g}) \subset \dots, \quad \cup_{i=1}^{+\infty} V_i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}.$$

Определим функцию роста $F_\mathfrak{g}(n) = \dim V_n(\mathfrak{g})$. Однако такое определение не является инвариантным — оно очевидным образом зависит от выбора порождающего множества V_1.

Например, если выбрать другое порождающее множество $\tilde{V}_1(\mathfrak{g})$ такое, что $\tilde{V}_1(\mathfrak{g}) \subset V_m(\mathfrak{g})$ для некоторого натурального m, то возникнет такая оценка на две функции роста

$$\tilde{F}_\mathfrak{g}(n) = \dim \tilde{V}_n(\mathfrak{g}) \leq \dim V_{mn}(\mathfrak{g}) = F_\mathfrak{g}(mn).$$

Ростом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется класс эквивалентности ее функций роста [41]. Функции роста $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называются *эквивалентными*, если найдутся такие константы $c, m, \tilde{c}, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, что

$$f(n) \leq cg(mn), \quad g(n) \leq \tilde{c} f(\tilde{m} n),$$

для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

Выделяются три типа роста алгебр Ли: 1) полиномиальный; 2) экспоненциальный (так растет свободная алгебра Ли от конечного числа образующих; 3) промежуточный, или субэкспоненциальный рост.

Полиномиальный тип роста удобно характеризуется при помощи другого инварианта, который называется в литературе *размерностью Гельфанда–Кириллова* [42]

$$\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \dim V_n(\mathfrak{g})}{\log n}.$$

Конечность размерности Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g}$ означает, что существует полином $P(x)$ такой, что $\dim V_n(\mathfrak{g}) < P(n)$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является конечномерной, то ее размерность Гельфанда–Кириллова равняется нулю: $\mathrm{GKdim}\, \mathfrak{g} = 0$. Неформально можно сказать еще так: если размерность Гельфанда–Кириллова алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равна некоторому вещественному числу α, то функция роста алгебры Ли $\mathfrak{g}$ растет со скоростью степенной функции Cn^{α}, где C — некоторая положительная константа.

При изучении роста характеристических алгебр Ли нужно иметь в виду целый ряд дополнительных обстоятельств. Первое из них отражено в следующей лемме, которая характеризует, в частности, характеристические алгебры Ли экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана.

Лемма 4.1 ([34]). *Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — бесконечномерная алгебра Ли, порожденная конечномерным подпространством*

$$V_1(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

где $\mathfrak{g}_0$ — коммутативная подалгебра Ли в $\tilde{\mathfrak{g}}$, а подпространство $\mathfrak{g}_1$ размерности q инвариантно относительно действия $\mathfrak{g}_0$ на $\tilde{\mathfrak{g}}$. Предположим также, что $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{g}_1$ диагонализируем и его соответствующие веса $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathfrak{g}_0^*$ нетривиальны. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$, порожденную подпространством $\mathfrak{g}_1$. Тогда функции роста $F_{\mathfrak{g}}(n)$ и $F_{\tilde{\mathfrak{g}}}(n)$ отличаются друг от друга на константу

$$F_{\tilde{\mathfrak{g}}}(n) = F_{\mathfrak{g}}(n) + \dim \mathfrak{g}_0.$$

Следствие 4.1. *У алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ размерности Гельфанда–Кириллова совпадают.*

В уже разобранном примере характеристической алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = \chi(\sinh(u))$ уравнения синус-Гордона коммутативная подалгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \langle X_0 \rangle$ одномерна, а двумерное подпространство $\mathfrak{g}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$ определялось как линейная оболочка

$$\mathfrak{g}_1 = \langle X(\sinh(u)), [X_0, X(\sinh(u))] \rangle.$$

Общий вывод таков: если характеристическая алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет свойствам в условии леммы 4.1, то можно изучать рост ее коммутанта $\mathfrak{g} = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ вместо роста всей алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Второе свойство, которое характеризует характеристические алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ экспоненциальных систем, отвечающих матрицам Картана — это естественная положительная градуировка их коммутантов $\mathfrak{g} = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$.

Определение 4.1. *$\mathbb{N}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется естественно градуированной, если*

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_{k+1}, \quad \text{где} \quad k \geq 1. \tag{4.1}$$

Для естественно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ можно определить одну выделенную функцию роста $F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n)$ [34], выбрав в качестве порождающего подпространства $V_1(\mathfrak{g})$ однородную компоненту $\mathfrak{g}_1$. Очевидны следующие свойства

$$F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n) = \dim V_n(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathfrak{g}_i = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{n+1}),$$

где $\mathfrak{g}^{n+1}$ обозначает $(n+1)$-й идеал нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 4.2. *$\mathbb{N}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется алгеброй Ли* ограниченной ширины, *если размерности всех ее однородных компонент равномерно ограничены некоторой константой C*

$$\dim \mathfrak{g}_k \leq C, \quad \text{где } k \geq 1.$$

Наибольшая размерность среди размерностей $\dim \mathfrak{g}_k$ однородных компонент алгебры Ли ограниченной ширины называется ее шириной $d(\mathfrak{g})$.

Для произвольной естественно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ ширины $d(\mathfrak{g})$ функция $F^{gr}_{\mathfrak{g}}(n)$ растет не быстрее, чем $d(\mathfrak{g})n$:

$$F^{gr}_{\mathfrak{g}}(n) \le d(\mathfrak{g})n.$$

Следовательно, размерность Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GKdim}\,\mathfrak{g}$ произвольной алгебры Ли конечной ширины равна единице: $\mathrm{GKdim}\,\mathfrak{g} = 1$.

В работе [34] показано, что характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки растут со средней линейной скоростью $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$ соответственно. В параграфе 6 мы покажем, что характеристические алгебры систем, соответствующие вырожденным матрицам Картана ранга 2, также имеют линейный рост.

В ряде работ, в частности в монографии [31], высказывалась гипотеза, что интегрируемость экспоненциальных гиперболических нелинейных систем определяется ростом соответствующей характеристической алгебры Ли. Нам представляется, что и интегрируемость и медленный рост характеристических алгебр Ли — все это косвенные проявления свойств матриц Картана. В любом случае не стоит сильно надеяться на ограничения, возникшие только из-за медленного роста. Отметим также, что $\mathbb{Z}$-градуированные алгебр Ли из списка Каца являются простыми и это очень сильное условие. Характеристические же алгебры Ли, если и обладают, то неотрицательной градуировкой, а значит уже в принципе не могут быть простыми. К требованиям медленного роста необходимо добавить ряд дополнительных требований. Все это в данный момент можно рассматривать только как план будущих исследований.

5. Комбинаторика уравнения Лиувилля

Этот параграф посвящен свойствам интегралов и симметрий уравнения Лиувилля с точки зрения формальной алгебры и комбинаторики. Рассмотрим уравнение Лиувилля $u_{xy} = f(u) = e^u$. Легко проверяется явным вычислением, что многочлен

$$q_2 = 2u_2 - u_1^2 = 2u_{xx} - u_x^2$$

будет y-интегралом уравнения Лиувилля.

Определим полиномиальный дифференциальный оператор X формулой $X_{e^u} = e^u X$, т.е.

$$X = \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + (u_1^2 + u_2)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots .$$

Коэффициенты этого оператора известны в комбинаторике под названием полных многочленов Белла B_k

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})\frac{\partial}{\partial u_k}.$$

В книге Риордана [43] можно найти много интересных комбинаторных свойств многочленов Белла, они также имеют множество приложений.

Порождающей функцией для многочленов Белла $B_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i\frac{t^i}{i!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(u_1, \dots, u_n)\frac{t^n}{n!}.$$

В [43] приведена также и такая рекуррентная формула для многочленов Белла $B_n(u_1, \dots, u_n)$:

$$(D + u_1)B_k = B_{k+1}, \quad k \ge 0.$$

Следствие 5.1. *Верно равенство:*

$$B_n(u_1, \dots, u_n) = (D + u_1)^n(1). \tag{5.1}$$

При помощи формулы (5.1) удобно последовательно выписывать многочлены Белла

$$
\begin{aligned}
B_1(u_1) &= (D+u_1)(1) = u_1,\\
B_2(u_1,u_2) &= (D+u_1)(u_1) = u_2+u_1^2,\\
B_3(u_1,u_2,u_3) &= (D+u_1)(u_2+u_1^2) = u_3+3u_1u_2+u_1^3,\\
B_4(u_1,u_2,u_3,u_4) &= (D+u_1)(B_3(u_1,u_2,u_3)) = u_1^4+6u_1^2u_2+4u_1u_3+3u_2^2+u_4.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Полные многочлены Белла могут быть рекуррентно определены и другим способом:

$$B_0=1, \quad B_{n+1}(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{n-i}(u_1,u_2,\ldots,u_{n-i})u_{i+1}.$$

Определим градуировку в алгебре полиномов $A=\mathbb{K}[u_1,u_2,u_3,\ldots]$ на ее образующих

$$w(u_k)=k, \quad k=1,2,3,\ldots,$$

распространив ее потом по мультипликативности на все многочлены. Например, многочлен $q_2=2u_2-u_1^2$ является однородным веса 2. Заметим, что эта градуировка отличается знаком от градуировки алгебры $A=\mathbb{K}[u_1,u_2,u_3,\ldots]$, введенной в параграфе 3.

Таким образом, алгебра A является положительно градуированной

$$A=\oplus_{n=1}^{+\infty}A_n, \quad A_n=\{P\in A, w(P)=n\}.$$

Оператор X уменьшает вес $w(P)$ каждого однородного полинома $P\in A_n$ на единицу, а оператор D и оператор умножения на u_1 наоборот — эти операторы увеличивают вес каждого однородного многочлена ровно на единицу

$$X: A_n\to A_{n-1}, \quad D: A_n\to A_{n+1}, \quad u_1: A_n\to A_{n+1}, \quad n\geq 1.$$

Определим возрастающую фильтрацию $\{A^m, m\geq 0\}$ алгебры A

$$A^0=\langle 1\rangle\subset A^1=\langle 1,u_1\rangle\subset A^2=\langle 1,u_1,u_1^2,u_2\rangle\subset\cdots\subset A^m=\{P\in A, w(P)\leq m\}\subset A^{m+1}\subset\ldots,$$

т.е. фильтрующее подпространство A^m определим, как линейную оболочку однородных многочленов P с весами $w(P)$ не выше m.

Предложение 5.1. *Оператор X, ограниченный на произвольное (конечномерное) подпространство A^m становится нильпотентным: $X|_{A^m}^{m+1}=0$.*

Так как X является дифференцированием алгебры A, то его ядро $\operatorname{Ker}X$ является подалгеброй в A. Более того, подалгебра $\operatorname{Ker}X$ является D-инвариантной, в силу следующих коммутационных соотношений

$$[D,X]=DX-XD=-u_1X \quad \Leftrightarrow \quad (D+u_1)X=XD. \tag{5.3}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее элементарное обобщение коммутационного соотношения (5.3)

$$X(D+ku_1)=(D+(k+1)u_1)X+k\,\mathrm{Id}, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.4}$$

Рассмотрим однородные y-интегралы весов $3,4,\ldots,k,\ldots$, которые определяются рекуррентно при помощи оператора D и самого первого элемента ядра $q_2=2u_2-u_1^2$ (отличного от константы):

$$q_3=D(q_2)=2u_1u_2-2u_3, \quad q_4=D^2(q_2)=2u_2^2+2u_1u_3-2u_4, \quad \ldots, \quad q_k=D^{k-2}(q_2), \quad \ldots.$$

Можно рассматривать полиномы q_k как полиномиальную деформацию переменных $2u_k$

$$q_k=2u_k+Q_k(u_1,\ldots,u_{k-1}),$$

где квадратичные полиномы $Q_k(u_1,\ldots,u_{k-1})$ зависят от переменных u_j с номерами j строго меньшими, чем k. Тем самым, полиномы вида $q_2^{k_2}q_3^{k_3}\ldots q_m^{k_m}$, где $k_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m\geq 1$, образуют бесконечный набор линейно независимых многочленов.

Мы приходим к известной теореме.

Теорема 5.1 (Шабат, Жибер, 1979). *Подалгебра* $\operatorname{Ker} X$ *изоморфна полиномиальной алгебре* $\mathbb{K}[q_2, q_3, \dots, q_k, \dots]$, *где* $q_k = D^{k-2}(q_2), \quad k \geq 2$.

Если мы думаем про доказательство этой *алгебраической* теоремы, то на данный момент нами доказано лишь включение подалгебр

$$\mathbb{K}[q_2, q_3, q_4, \dots] \subset \operatorname{Ker} X. \tag{5.5}$$

А доказательство того, что это включение является на самом деле равенством, мы проведем чуть позже в этом параграфе.

При помощи оператора X определим еще одну возрастающую фильтрацию алгебры A

$$\tilde{A}^0 = \{0\} \subset \tilde{A}^1 \subset \tilde{A}^2 \subset \dots \subset \tilde{A}^m = \{P \in A, X^m P = 0\} \subset \tilde{A}^{m+1} \subset \dots, \tag{5.6}$$

т.е. в этом случае фильтрующее подпространство $\tilde{A}^m$ определяется как ядро оператора X^m. Заметим, что подпространства $\tilde{A}^m$ уже не будут конечномерными. При этом имеется очевидная связь между двумя фильтрациями в силу предложения 5.1

$$A^m \subset \tilde{A}^{m+1}, \quad m \geq 0.$$

Также отметим, что $\tilde{A}^1 = \operatorname{Ker} X$.

Для всех натуральных m справедливы включения

$$X\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m-1}, \quad u_1\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m+1}, \quad D\tilde{A}^m \subset \tilde{A}^{m+1}.$$

Первое включение следует из определения $\tilde{A}^m$, а для доказательства второго достаточно заметить, что выполняются соотношения

$$X^{m+1}(u_1 F) = (m+1)X^m F + u_1 X^{m+1} F, \quad \text{где} \quad m \geq 0, \tag{5.7}$$

которые доказываются несложной индукцией по m, начиная с очевидного равенства

$$X(u_1 F) = F + u_1 X F.$$

Последнее включение следует из такого соотношения с участием оператора D:

$$X^{m+1}(DF) = (D + (m+1)u_1)X^{m+1}F + \frac{m(m+1)}{2}X^m F, \quad m \geq 1. \tag{5.8}$$

Оно так же доказывается индукцией по степени m, начиная с (5.3):

$$\begin{aligned} X^{m+1}DF &= X(D + mu_1)X^m F + X(\frac{(m-1)m}{2}X^{m-1}F) \\ &= (D + (m+1)u_1)\, X^{m+1}F + \left(\frac{(m-1)m}{2} + m\right) X^m F. \end{aligned}$$

В качестве следствия (5.7, 5.8) приведем и такую формулу

$$X^{m+1}(D + ku_1)F = (D + (m+k+1)u_1)\, X^{m+1}F + \frac{(m+1)(m+2k)}{2}X^m F. \tag{5.9}$$

Замечание 5.1. *Многочлены* P *из ядра оператора* $\operatorname{Ker} X$ *являются собственными векторами оператора* XD *с собственным значением* $\lambda = 0$:

$$XD(P) = (D + u_1)XP = 0.$$

Лемма 5.1. *Пусть* F *— произвольный многочлен из алгебры* A, *тогда ряд*

$$\pi(F) = F - u_1 XF + \frac{u_1^2}{2!}X^2 F - \frac{u_1^3}{3!}X^3 F + \dots + (-1)^k \frac{u_1^k}{k!}X^k F + \dots \tag{5.10}$$

содержит конечное число ненулевых слагаемых и определенный таким образом многочлен πF *будет аннулировать оператор* X.

Доказательство леммы состоит в прямом вычислении

$$X\pi(F) = XF - X(u_1)XF - u_1X^2F + \frac{X(u_1^2)}{2!}X^2F - \dots.$$

Так как

$$X(u_1) = 1, \qquad X(u_1^2) = 2u_1, \qquad X(u_1^k) = ku_1^{k-1},$$

то в том случае, когда $F \in A^m$ для некоторого натурального m, имеем:

$$X\tilde{F} = \frac{X^m}{m!}F = 0.$$

Из доказательства следует в частности, что для многочлена $F \in \tilde{A}^{m+1}$ выполняется

$$\pi(F) = F - u_1XF + \frac{u_1^2}{2!}X^2F - \frac{u_1^3}{3!}X^3F + \dots + (-1)^m\frac{u_1^{m-1}}{(m-1)!}X^mF.$$

В частности для $F \in \operatorname{Ker} X^2$ верно, что $F - u_1XF \in \operatorname{Ker} X$.

Замечание 5.2. *Отображение $\pi : A \to A$, определенное формулой (5.10), является проектором на подалгебру* $\operatorname{Ker} X$*: $\pi^2 = \pi$.*

Также несложно найти ядро этого проектора:

$$\operatorname{Ker}\pi = u_1A = \{u_1F,\ F \in A\}. \tag{5.11}$$

В самом деле, используем формулу (5.7) при вычислении $\pi(u_1F)$ для произвольного $F \in A$

$$\begin{aligned}\pi(u_1F) &= u_1F - u_1X(u_1F) + \frac{u_1^2}{2!}X^2(u_1F) - \frac{u_1^3}{3!}X^3(u_1F) + \dots\\ &= u_1F - u_1F - u_1^2XF + \frac{u_1^2}{2!}(2XF + u_1X^2F) - \frac{u_1^3}{3!}(3X^2F + u_1X^3F) + \dots = 0.\end{aligned}$$

В качестве следствия получим формулу для размерности ядра оператора X, ограниченного на подпространство A^n элементов веса n:

$$\dim\operatorname{Ker}\pi|_{A^n} = \dim u_1A^{n-1} = p(n-1),$$

согласно (5.11). Откуда выводим формулу

$$\dim\operatorname{Ker}X|_{A^n} = \dim\operatorname{Im}\ \pi|_{A^n} = \dim A^n - \dim\operatorname{Ker}\pi|_{A^n} = p(n) - p(n-1), \tag{5.12}$$

где $p(n)$ обозначает число разбиений числа n, а разность $p(n)-p(n-1)$, очевидным образом, равняется числу разбиений числа n на слагаемые строго больше 1: разбиение числа n, содержащее единицу, получается из некоторого разбиения $n-1$, к которому прибавили одну единицу.

Следствие 5.2. *Включение (5.5) из теоремы 5.1 Жибера–Шабата является изоморфизмом.*

Также мы доказали, что оператор $X|_{A^n} : A^n \to A^{n-1}$ является отображением полного ранга: $\dim\operatorname{Im}X|_{A^n} = \dim A^{n-1} = p(n-1)$.

Напомним про определяющее уравнение высших симметрий уравнения Клейна–Гордона (уравнение формальной группы Ли–Бэклунда высших симметрий)

$$F_{xy} = f'(u)F, \quad u_\tau = F(u, u_x, u_{xx}, \dots),$$

которое может быть сведено к следующей алгебраической форме

$$(D + u_1)XF = XDF = F.$$

Это означает, что симметрия $F = F(u_1, u_2, \dots)$ является собственным вектором оператора XD с собственным значением $\lambda = 1$.

Лемма 5.2. *Для всех целых m оператор $D + mu_1$ имеет нулевое ядро:*

$$\operatorname{Ker}(D + mu_1) = \{0\}.$$

Воспользуемся стандартным лексикографическим порядком в алгебре A и выделим старший моном $\gamma u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}$ в разложении элемента ядра $F \in \operatorname{Ker}(D+mu_1)$. Это означает, в частности, что u_n является самой старшей переменной, среди участвующих в разложении полинома F:

$$F = \gamma u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} + \dots, \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

Многоточие обозначает суммы мономов от переменных $u_1, \dots, u_n$, куда переменная u_n может входить с кратностями строго меньше k_n. Применим к F оператор $(D + mu_1)$

$$DF + u_1 F = \gamma k_n u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n - 1} u_{n+1} + \dots,$$

т.е. моном $\gamma k_n u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n-1} u_{n+1}$ будет самым старшим в разложении $(D + mu_1)F$, т.к. кратность переменной u_n в мономе, где присутствует u_{n+1}, будет максимальной. Значит $\gamma = 0$ и, продолжая эти рассуждения, получаем, что $F = 0$.

Предложение 5.2. *Пусть F — симметрия, т.е. является собственным вектором оператора XD с $\lambda = 1$. Тогда $X^2(F) = 0$.*

Из определения симметрии $F = XDF$ и коммутационных соотношений (5.4) при $k = 1$ получаем такую цепочку равенств

$$XF = X^2 DF = X(D + u_1)XF = ((D + 2u_1)X + Id)\, XF = (D + 2u_1)X^2 F + XF.$$

Откуда следует, что $(D + 2u_1)X^2 F = 0$, после чего применив лемму 5.2, получаем утверждение предложения.

Теорема 5.2 (Жибер, Шабат, 1979, [32]). *Произвольная x-симметрия F (собственный вектор оператора XD с $\lambda = 1$) может быть записана в виде*

$$F = (D + u_1)Q, \quad Q \in \operatorname{Ker} X = \mathbb{K}[q_2, q_3, \dots].$$

Мы повторим здесь на более строгом языке доказательство из [32]. В одну сторону: пусть $XQ = 0$, тогда

$$\begin{aligned} (D + u_1)X(D + u_1)Q &= (D + u_1)\left((D + 2u_1)X + Id\right) Q \\ &= (D + u_1)(D + 2u_1)XQ + (D + u_1)Q \\ &= (D + u_1)Q. \end{aligned}$$

Доказательство в обратную сторону следует из определения симметрии $(D+u_1)XF = F$. Введем элемент $Q = XF$. Из предложения 5.2 следует, что $F = (D + u_1)Q$, при этом $XQ = X^2 F = 0$.

Обозначим собственные пространства оператора XD, относящиеся к $\lambda = 0, 1$, как V_0 и V_1 соответственно.

Предложение 5.3. *Верно равенство:*

$$V_0 \oplus V_1 = \operatorname{Ker} X^2.$$

Ранее мы доказали включение $V_0 \oplus V_1 \subset \operatorname{Ker} X^2$. Рассмотрим конечномерную версию, ограничив все операторы на подпространство A^n многочленов веса n. Подпространство $V_1(n) = V_1 \cap A^n$ изоморфно подпространству $V_0(n-1) = V_0 \cap A^{n-1}$, согласно теореме 5.2 и лемме 5.2. Тем самым

$$\dim(V_0(n) \oplus V_1(n)) = p(n) - p(n-1) + p(n-1) - p(n-2) = p(n) - p(n-2).$$

С другой стороны, оператор $X : A^n \to A^{n-1}$ сюръективен для любого n, а значит сюръективен и оператор $X^2 : A^n \to A^{n-2}$, тем самым $\dim \operatorname{Ker} X^2|_{A^n} = p(n) - p(n-2)$.

Возникает естественный вопрос: «Какие еще есть собственные векторы у оператора XD?»

Прежде, чем дать общий ответ на этот вопрос, проанализируем примеры в малых размерностях.

1) Вес $n = 1$. У оператора XD имеется единственный собственный вектор u_1 с собственным значением $\lambda_1 = 1$.

2) Вес $n = 2$. Рассмотрим базис u_1^2, u_2. Тогда матрицей оператора XD будет $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. У этой матрицы два собственных значения: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_2 = 3$. Соответствующими собственными векторами будут два многочлена

$$q_2 = u_1^2 - 2u_2, \quad B_2 = u_1^2 + u_2.$$

3) В весе $n = 3$ зафиксируем базис u_1^3, u_1u_2, u_3. Матрица оператора XD в этом базисе будет равна

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственными числами будут $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_3 = 6$.

А три ее собственных вектора равняются соответственно

$$\begin{aligned} q_3 &= u_1u_2 - 2u_3, && (\lambda_0 = 0), \\ u_1^3 &- 2u_3, && (\lambda_1 = 1), \\ 2u_1^2 &+ 5u_1u_2 + u_3, && (\lambda_3 = 6). \end{aligned}$$

4) В весе $n = 4$ выберем базис из многочленов $u_1^4, u_1^2u_2, u_1u_3, u_2^2, u_4$. Матрица оператора XD будет уже пятого порядка

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственными числами будут: $\lambda_0 = 0$ (кратности 2), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_4 = 10$.

Среди собственных векторов этой матрицы есть: два интеграла q_2^2 и q_4 ($\lambda_0 = 0$), одна симметрия $(D + u_1)(q_3) = q_4$, а также и другие собственные векторы:

$$-u_1^4 - 2u_1^2u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + u_4 \quad \text{и} \quad 6u_1^4 + 26u_1^2u_2 + 9u_1u_3 + 8u_2^2 + u_4,$$

относящиеся к $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_4 = 10$ соответственно.

Мы приходим к теореме, которая естественным образом обобщает теорему 5.2.

Теорема 5.3. *1) Оператор $(D + u_1)X = XD$, ограниченный на подпространство A_n многочленов веса $n \geq 2$, диагонализируем;*

2) Его спектром является следующий набор неотрицательных целых чисел

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \ldots, \quad \lambda_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}, \quad \lambda_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

3) Кратность собственного значения λ_k равняется

$$p(n-k) - p(n-k-1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, n;$$

4) Произвольный собственный вектор P, соответствующий собственному значению λ_k, где $k \in \{0, 1, \dots, n-2, n\}$, может быть записан в виде

$$P = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + ku_1)F,$$

где F обозначает некоторый однородный многочлен веса $(n-k)$ из ядра $\operatorname{Ker} X$.

Начнем доказательство теоремы с пункта 4).

Пусть $XF = 0$; тогда применим к многочлену $P = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)F$ оператор XD:

$$\begin{aligned} XD(D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)F &= (D + u_1)X(D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)F \\ &= (D + u_1)((D + 2u_1)X + id)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)F \\ &= (D + u_1)(D + 2u_1)X(D + 3u_1)\dots(D + nu_1)F + P. \end{aligned}$$

Меняя последовательно местами операторы X и $(D+ku_1)$ с учетом соотношения (5.4), мы в итоге получаем соотношение

$$XDP = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)XF + P + 2P + \dots + nP = \frac{n(n+1)}{2}P,$$

где использовали тот факт, что $XF = 0$.

Следующее предложение является элементарным следствием леммы 5.2.

Предложение 5.4. *Линейное отображение $\varphi_k : V_0(n-k) \to V_k(n)$, определенное формулой*

$$\varphi_k(F) = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + ku_1)F,$$

является мономорфизмом.

Из него сразу выводится простая оценка для размерностей собственных подпространств $V_k(n)$

$$\dim V_k(n) \geq \dim \operatorname{Im} \varphi_k = \dim V_0(n-k) = \dim \operatorname{Ker}_{n-k}\, X = p(n-k) - p(n-k-1), \quad (5.13)$$

где $p(n)$ обозначает число разбиений числа n.

Рассмотрим прямую сумму $\oplus_{k=0,\neq n-1}^{n} V_k(n)$ собственных подпространств оператора $XD|_{A_n}$. Согласно (5.13), имеем такую оценку для ее размерности

$$\dim\left(\oplus_{k=0,\neq n-1}^{n} V_k(n)\right) \geq \sum_{k=0}^{n-2}(p(n-k) - p(n-k-1)) + 1 = p(n) = \dim A_n.$$

Откуда делаем вывод, что это неравенство является равенством, равно как и все неравенства (5.13). Отсюда следует пункт 1), т.е.

$$A_n = V_0(n) \oplus V_1(n) \oplus \dots \oplus V_{n-2}(n) \oplus V_n(n),$$

и пункт 2) о размерностях собственных подпространств V_k. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 5.3. *Имеется простая связь между собственными подпространствами V_k оператора XD и фильтрацией $\tilde{A}^m$ полиномиальной алгебры A*

$$V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k = \operatorname{Ker} X^{k+1} = \tilde{A}^{k+1}.$$

Мы уже доказали это утверждение для $k = 0, 1$. Причем оператор $X : V_1 \to V_0$ являлся изоморфизмом, понижающим градуировку. В общем случае

$$XV_k \subset V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Напомним, что согласно формуле (5.9), отображение $(D + qu_1)$ переводит элемент $F \in \operatorname{Ker} X^m$ в элемент более высокой фильтрации из $\operatorname{Ker} X^{m+1}$.

Максимальное собственное значение $\lambda_n = \frac{n(n+1)}{2}$ оператора $XD|_{A_n}$ имеет кратность один, а соответствующий ему собственный вектор коллинеарен однородному полиному P_n в A_n, который задается элегантной формулой, похожей на формулу (5.2) для полиномов Белла:

$$P_n = (D + u_1)(D + 2u_1)\dots(D + nu_1)(1). \tag{5.14}$$

У нас уже появлялись в примерах первые полиномы из этой последовательности

$$P_1 = u_1, \quad P_2 = u_1^2 + u_2, \quad P_3 = 2u_1^2 + 5u_1u_2 + u_3, \quad P_4 = 6u_1^4 + 26u_1^2u_2 + 9u_1u_3 + 8u_2^2 + u_4.$$

Несложно установить по индукции значения двух крайних коэффициентов многочлена P_n

$$P_n = (n-1)!u_1^n + \dots + u_n.$$

Появление у оператора XD собственного вектора P_n кратности один со строго положительными координатами — это явное проявление классической теоремы Перрона–Фробениуса об операторе с матрицей специального вида, состоящей из неотрицательных элементов.

Напомним, что как и в теореме Перрона–Фробениуса соответствующее вектору P_n собственное значение λ_n является положительным и максимальным среди всех собственных значений оператора $XD|_{A_n}$. Разумно предположить, что семейство многочленов P_n не только имеет красивое рекуррентное определение (5.14), но также обладает полезными приложениями, которые еще предстоит установить.

6. Характеристические алгебры для систем ранга 2

По аналогии со случаем скалярных гиперболических уравнений понятие характеристической алгебры может быть распространено и на случай произвольной системы экспоненциального типа: следуя работе [1], *характеристической алгеброй* системы вида (1.1) будем называть алгебру Ли, порожденную операторами

$$\frac{\partial}{\partial w^1}, \quad \frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^r}, \quad D_y,$$

где D_y — оператор полного дифференцирования по y в силу системы. Для экспоненциальных систем, соответствующих невырожденным матрицам Картана, характеристическая алгебра конечномерна [1].

Рассмотрим экспоненциальные системы, соответствующие матрицам Картана аффинных алгебр Ли небольшого ранга r. Нетрудно проверить, что в самом простом случае ранга 1 экспоненциальные системы, соответствующие матрицам Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

сводятся к уравнениям

$$u_{xy} = e^u + e^{-u} \quad \text{и} \quad u_{xy} = e^u + e^{-2u}$$

соответственно. Оба этих уравнения хорошо изучены, первое из них называется *уравнением* sin-*Гордон*[1], а второе — *уравнением Цицейки*. Характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон была описана в явном виде в [21], а характеристическая алгебра уравнения Цицейки — в [25]. В работах [33], [34] была построена другая система образующих для этих бесконечномерных алгебр Ли и было показано, что они изоморфны неотрицательным частям алгебр петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))^{\geqslant 0}$ и скрученных петель $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),\mu)^{\geqslant 0}$ соответственно. Приведем в явном виде эти системы образующих.

[1]Точнее, уравнением sin-Гордон более естественно называть уравнение $u_{xy} = \sin u$, которое связано с рассматриваемым нами уравнением комплексной заменой. Но поскольку нам удобнее работать именно с уравнением, содержащим экспоненты, мы позволим себе допустить подобную терминологическую вольность.

Для уравнений вида $u_{xy} = f(u)$ характеристическая алгебра порождена операторами $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}$ и оператором D_y полного дифференцирования в силу уравнения. Нетрудно проверить, что если $f(u) = e^u + e^{\alpha u}$, при $\alpha \neq 0, 1$, то $D_y = X_1 + X_2$, где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_n}, \quad X_2 = e^{\alpha u} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\alpha \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_n},$$

а $B_n(\mathbf{u}) = B_n(u_1, \ldots, u_n) = e^{-u} D_x(e^u)$ — полный многочлен Белла.

Теорема 6.1. [33], [34] *Характеристическая алгебра* $\chi_{sG} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ *уравнения* sin-*Гордон порождена образующими* X_0, X_1, X_2*:*

$$X_{3k+1} = -[X_1, X_{3k}], \quad X_{3k+2} = [X_2, X_{3k}], \quad X_{3k+3} = [X_1, X_{3k+2}], \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.1}$$

Характеристическая алгебра χ_{sG} является естественно градуированной: ее можно представить в виде $\oplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$, где $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$. В самом деле, пользуясь соотношениями (6.1) и полагая

$$\mathfrak{g}_0 = \langle X_0 \rangle, \quad \mathfrak{g}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle, \ldots, \mathfrak{g}_{2k} = \langle X_{3k} \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2k+1} = \langle X_{3k+1}, X_{3k+2} \rangle, \ldots,$$

получаем, что естественная градуировка базисного элемента X_n — это количество коммутаторов в его минимальном представлении образующими. Изображая это диаграммой (см. рис. 1), легко видеть, что средняя скорость роста этой характеристической алгебры

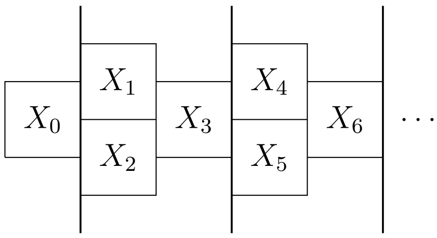

Рис. 1. Характеристическая алгебра уравнения sin-Гордон

(т.е. увеличение размерности при добавлении одной градуированной компоненты) равна $\frac{3}{2}$.

Теорема 6.2. [33], [34] *Характеристическая алгебра* $\chi_{Tz} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ *уравнения Цицейки порождена образующими* X_0, X_1, X_2*:*

$$X_{8k+1} = -[X_1, X_{8k}], \qquad X_{8k+2} = \frac{1}{2}[X_2, X_{8k}], \qquad X_{8k+3} = [X_1, X_{8k+2}], \quad X_{8k+4} = [X_1, X_{8k+3}],$$

$$X_{8k+5} = -\frac{1}{3}[X_1, X_{8k+4}], \quad X_{8k+6} = -\frac{1}{2}[X_1, X_{8k+5}], \quad X_{8k+7} = [X_2, X_{8k+5}], \quad X_{8k+8} = [X_1, X_{8k+7}],$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Представляя структуру этой алгебры в виде диаграммы (см. рис. 2), нетрудно заметить, что скорость ее роста равна $\frac{4}{3}$.

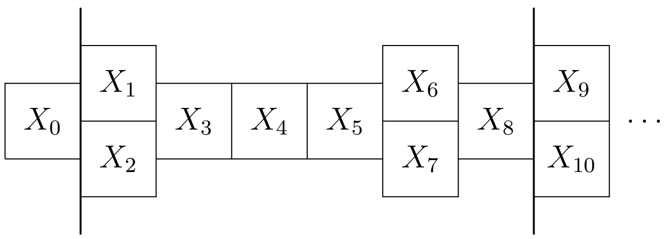

Рис. 2. Характеристическая алгебра уравнения Цицейки

Перейдем теперь к изучению характеристических алгебр для экспоненциальных систем, соответствующих аффинным матрицам Картана ранга 2 (такие матрицы имеют размер 3×3). Матрице Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$ отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - w_2 - w_3), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_1 - w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - w_2 - w_3$, $v = -w_1 + 2w_2 - w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - e^v - e^{-u-v}, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - e^{-u-v}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.2) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_3 = -e^{-u-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - \mathbf{v}) \left(\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial}{\partial v_n} \right).$$

Теорема 6.3. *Характеристическая алгебра* $\chi_{A_2^{(1)}} = \langle X_0, X_1, \dots, X_n, \dots \rangle$ *системы (6.2) порождена образующими* $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3*:*

$$X_{8k+1} = [X_1, X_{8k-1}], \quad X_{8k+2} = -[X_2, X_{8k}], \quad X_{8k+3} = [X_3, X_{8k-1}], \quad X_{8k+4} = [X_1, X_{8k+2}],$$
$$X_{8k+5} = [X_1, X_{8k+3}], \quad X_{8k+6} = [X_2, X_{8k+3}], \quad X_{8k+7} = [X_2, X_{8k+5}], \quad X_{8k+8} = [X_1, X_{8k+6}],$$

где $X_{-1} = -2Y_0 + Y_0'$, $X_0 = -Y_0 + 2Y_0'$ *и* $k = 0, 1, 2, \dots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.2) равна $\frac{8}{3}$.

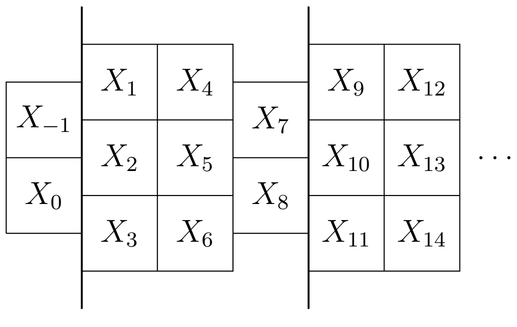

Рис. 3. Характеристическая алгебра системы $A_2^{(1)}$

Для доказательства нам потребуются следующие две простые леммы (первая из которых восходит к А.Б. Шабату). Пусть

$$D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + v_1\frac{\partial}{\partial v} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + v_2\frac{\partial}{\partial v_2} + \dots$$

(мы сохраним с целью упрощения формул обозначение D за оператором более общего вида, чем в параграфе 3).

Лемма 6.1. *Если для дифференциального оператора*

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(P_n(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2 \dots)\frac{\partial}{\partial u_n} + Q_n(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2 \dots)\frac{\partial}{\partial v_n}\right),$$

где P_n и Q_n — многочлены, выполнено соотношение $[D, X] = 0$, то $X = 0$.

Следующая лемма обобщает лемму 5.2 из параграфа 5.

Лемма 6.2. *Пусть $f = f(u_1, v_1, u_2, v_2 \dots)$ — функция, зависящая от конечного числа переменных, а c — произвольная константа. Тогда для любых постоянных α и β уравнение*

$$(D + \alpha u_1 + \beta v_1)f = c$$

не имеет решений при $c \neq 0$ и имеет лишь тривиальное решение $f \equiv 0$ при $c = 0$.

Доказательство. Поскольку $[Y_0, D_y] = [Y_0, X_1 + X_2 + X_3] = X_1 - X_3$, оператор $X_1 - X_3$ принадлежит характеристической алгебре. Далее, $[Y_0', X_1 - X_3] = X_3$, откуда следует, что X_3 (а, следовательно и X_1) также лежат в характеристической алгебре. Поэтому

$$X_2 = D_y - X_1 - X_3 \in \chi_{A_2^{(1)}}.$$

Таким образом, характеристическая алгебра порождается элементами Y_0, Y_0', X_1, X_2 и X_3.

Из тождества Якоби вытекает, что все высшие коммутаторы выражаются как линейные комбинации коммутаторов вида $[A, [B, [C, [\dots]]]]$, где $A, B, C, \dots$ — образующие. Таким образом, достаточно рассматривать лишь коммутаторы такого вида. Далее доказательство аналогично доказательству теорем 6.1 и 6.2 из статьи [34] и проводится индукцией по k, где k — количество периодически повторяющихся групп по 8 элементов (см. рис. 3). Сперва, выписывая коммутационные соотношения образующих и их коммутаторов с элементами Y_0, Y_0' и D, при помощи леммы 6.1 можно показать, что все среди коммутаторов естественной градуировки 2, 3 нетривиальны лишь элементы $X_4, X_5, \dots, X_8$. Независимость всех элементов $X_1, X_2, \dots, X_8$ доказывается от противного при помощи лемм 6.1, 6.2. Это завершает базу индукции.

Шаг индукции основан на двух замечаниях. Во-первых, из коммутационных соотношений внутри одной группы $X_{8k+1}, X_{8k+2}, \dots, X_{8k+8}$ следуют аналогичные коммутационные соотношения в следующей группе. Отсюда при помощи леммы 6.1 можно вывести тривиальность тех коммутаторов, которые не приведены в таблицы. Во-вторых, независимость остальных выводится из доказанной на предыдущем шаге независимости при помощи последовательного добавления новых элементов (с использованием лемм 6.1, 6.2), что завершает шаг индукции. □

Перейдем теперь к изучению характеристических алгебр систем, соответствующих другим аффинным алгебрам Ли. Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $B_2^{(2)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-2w_1 + 2w_2 - 2w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - w_2$, $v = -2w_1 + 2w_2 - 2w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - e^v, \\ v_{xy} = -2e^u + 2e^v - 2e^{-u-v}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.3) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$
$$X_3 = -2e^{-u-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.4. *Характеристическая алгебра $\chi_{B_2^{(2)}} = \langle X_0, X_1, \dots, X_n, \dots \rangle$ системы (6.3) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$\begin{array}{lll} X_{15k+1} = -[X_1, X_{15k-1}], & X_{15k+2} = [X_2, X_{15k}], & X_{15k+3} = -[X_3, X_{15k}], \\ X_{15k+4} = [X_1, X_{15k+2}], & X_{15k+5} = [X_2, X_{15k+3}], & X_{15k+6} = [X_1, X_{15k+4}], \\ X_{15k+7} = [X_1, X_{15k+5}], & X_{15k+8} = [X_3, X_{15k+5}], & X_{15k+9} = [X_1, X_{15k+7}], \\ X_{15k+10} = [X_1, X_{15k+8}], & X_{15k+11} = [X_1, X_{15k+10}], & X_{15k+12} = [X_2, X_{15k+9}], \\ X_{15k+13} = [X_2, X_{15k+10}], & X_{15k+14} = [X_1, X_{15k+13}], & X_{15k+15} = [X_3, X_{15k+12}], \end{array}$$

где $X_{-1} = Y_0 - Y_0'$, $X_0 = -Y_0'$ и $k = 0, 1, 2, \dots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.3) равна $\frac{5}{2}$.

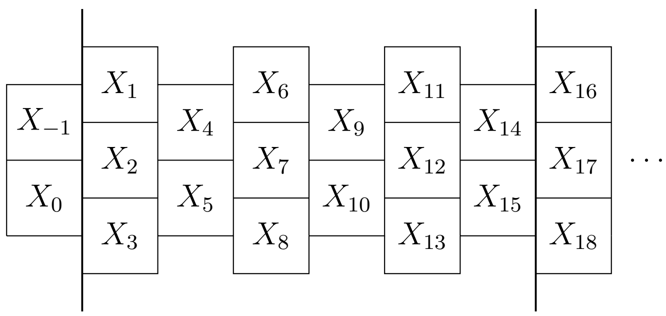

Рис. 4. Характеристическая алгебра системы $B_2^{(2)}$

Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

аффинной алгебры Ли $\tilde{B}_2^{(2)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - 2w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - 2w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - 2w_2$, $v = -w_1 + 2w_2 - 2w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - 2e^v, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - 2e^{-\frac{u}{2}-v}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.4) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-2\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_3 = -2e^{-\frac{u}{2}-v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}\left(-\frac{\mathbf{u}}{2} - \mathbf{v} \right) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.5. *Характеристическая алгебра $\chi_{\tilde{B}_2^{(2)}} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ системы (6.4) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$\begin{aligned}
X_{24k+1} &= -\frac{1}{2}[X_1, X_{24k-1}], & X_{24k+2} &= 2[X_2, X_{24k}], & X_{24k+3} &= -2[X_3, X_{24k}], \\
X_{24k+4} &= [X_1, X_{24k+2}], & X_{24k+5} &= [X_2, X_{24k+3}], & X_{24k+6} &= [X_1, X_{24k+5}], \\
X_{24k+7} &= [X_2, X_{24k+4}], & X_{24k+8} &= [X_3, X_{24k+5}], & X_{24k+9} &= [X_1, X_{24k+8}], \\
X_{24k+10} &= [X_2, X_{24k+6}], & X_{24k+11} &= [X_2, X_{24k+9}], & X_{24k+12} &= [X_3, X_{24k+10}], \\
X_{24k+13} &= [X_2, X_{24k+12}], & X_{24k+14} &= [X_3, X_{24k+12}], & X_{24k+15} &= [X_1, X_{24k+13}], \\
X_{24k+16} &= [X_2, X_{24k+14}], & X_{24k+17} &= [X_3, X_{24k+14}], & X_{24k+18} &= [X_1, X_{24k+16}], \\
X_{24k+19} &= [X_3, X_{24k+16}], & X_{24k+20} &= [X_1, X_{24k+19}], & X_{24k+21} &= [X_2, X_{24k+18}], \\
X_{24k+22} &= [X_2, X_{24k+19}], & X_{24k+23} &= [X_1, X_{24k+22}], & X_{24k+24} &= [X_3, X_{24k+21}],
\end{aligned}$$

где $X_{-1} = 2Y_0 - Y_0'$, $X_0 = -\frac{1}{2}Y_0'$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.4) равна $\frac{12}{5}$.

Рассмотрим матрицу Картана

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

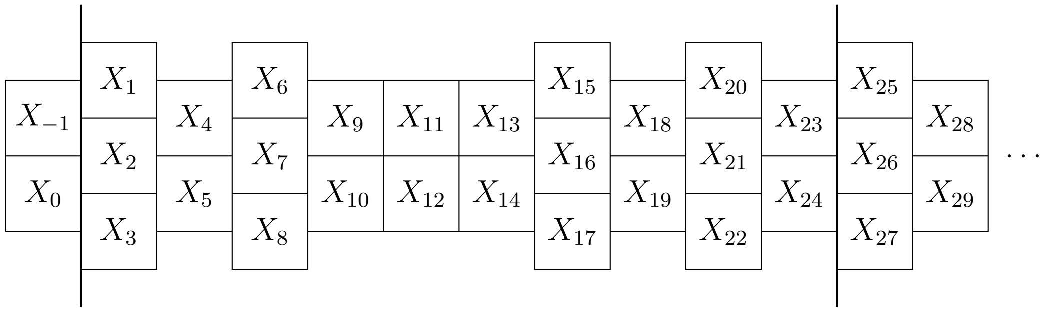

Рис. 5. Характеристическая алгебра системы $\tilde{B}_2^{(2)}$

аффинной алгебры Ли $C_2^{(1)}$; ей отвечает экспоненциальная система

$$\begin{cases} w_{1,xy} = \exp(2w_1 - 2w_2), \\ w_{2,xy} = \exp(-w_1 + 2w_2 - w_3), \\ w_{3,xy} = \exp(-2w_2 + 2w_3). \end{cases}$$

Заменой $u = 2w_1 - 2w_2$, $v = -w_1 + 2w_2 - w_3$ эта система приводится к виду

$$\begin{cases} u_{xy} = 2e^u - 2e^v, \\ v_{xy} = -e^u + 2e^v - e^{-u-2v}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Оператор D_y полного дифференцирования в силу системы (6.5) имеет вид

$$D_y = X_1 + X_2 + X_3,$$

где

$$X_1 = e^u \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{u}) \left(2\frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_2 = e^v \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(\mathbf{v}) \left(-2\frac{\partial}{\partial u_n} + 2\frac{\partial}{\partial v_n} \right),$$

$$X_3 = -e^{-u-2v} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(-\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Теорема 6.6. *Характеристическая алгебра $\chi_{C_2^{(1)}} = \langle X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \rangle$ системы (6.5) порождена образующими $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_0' = \frac{\partial}{\partial v}$, X_1, X_2, X_3:*

$$X_{10k+1} = [X_1, X_{10k}], \qquad X_{10k+2} = -[X_2, X_{10k-1}], \qquad X_{10k+3} = [X_3, X_{10k}],$$
$$X_{10k+4} = [X_1, X_{10k+2}], \qquad X_{10k+5} = [X_2, X_{10k+3}], \qquad X_{10k+6} = [X_1, X_{10k+5}],$$
$$X_{10k+7} = [X_2, X_{10k+4}], \qquad X_{10k+8} = [X_2, X_{10k+5}], \qquad X_{10k+9} = [X_1, X_{10k+8}],$$
$$X_{10k+10} = [X_2, X_{10k+6}],$$

где $X_{-1} = Y_0' - 2Y_0$, $X_0 = Y_0' - Y_0$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что средняя скорость роста характеристической алгебры системы (6.5) равна $\frac{5}{2}$.

Доказательство теорем 6.4–6.6 проводится аналогично доказательству теоремы 6.3.

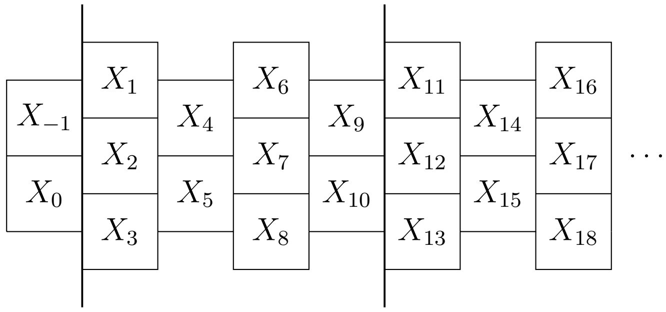

Рис. 6. Характеристическая алгебра системы $C_2^{(1)}$

7. Характеристические алгебры и симметрии

Хорошо известно (см., например, [31]), что каждое из уравнений sin-Гордон и Цицейки обладает бесконечной иерархией высших симметрий. Сформулируем соответствующие результаты.

Теорема 7.1. [31] *Уравнение $u_{xy} = e^u + e^{-u}$ имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий $u_t = F_k(u_1, u_2, u_3, \dots)$, где $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ и*

$$F_{2k+1} = L^k(u_1), \quad L = (D + u_1)(D - u_1 + D^{-1}u_2).$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, u_2, u_3, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий $F_1, F_3, F_5, \dots$.

Теорема 7.2. [31] *Уравнение $u_{xy} = e^u + e^{-2u}$ имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий*

$$u_t = F_{6k+1}(u_1, u_2, u_3, \dots) \quad \text{и} \quad u_t = F_{6k+5}(u_1, u_2, u_3, \dots),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ и

$$F_{6k+1} = L^k(u_1), \quad F_{6k+5} = L^k\left(u_5 + 5(u_2 - u_1^2)u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5\right),$$
$$L = (D - u_1 - 2u_1D^{-1}u_1)(D - u_1)D(D + u_1)(D^2 + u_1D - 2u_1^2 + 2u_1D^{-1}u_2).$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, u_2, u_3, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий F_{6k+1}, F_{6k+5}.

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, в обоих случаях структура симметрий оказывается связанной со структурой естественно градуированных компонент соответствующих характеристических алгебр: для уравнения sin-Гордон наблюдается периодичность с периодом 2, а для уравнения Цицейки — с периодом 6 (симметрии пронумерованы в соответствии с их градуировкой). Во-вторых, несмотря на то, что операторы рекурсии L в каждом из случаев содержат псевдодифференциальные компоненты D^{-1}, симметрии устроены таким образом, что при применении к ним оператора L нелокальность пропадает.

Подобная связь между иерархией симметрий и структурой естественно градуированных компонент соответствующей характеристической алгебры наблюдается и для экспоненциальных систем ранга 2.

Теорема 7.3. *Экспоненциальная система (6.2), соответствующая матрице Картана аффинной алгебры Ли $A_2^{(1)}$, имеет бесконечную иерархию однородных по градуировке полиномиальных симметрий*

$$u_t = F_{3k+1}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \qquad v_t = G_{3k+1}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots),$$
$$u_t = F_{3k+2}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \qquad v_t = G_{3k+2}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots),$$

где

$$\begin{pmatrix}F_{3k+1}\\ G_{3k+1}\end{pmatrix} = L^k\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}F_{3k+2}\\ G_{3k+2}\end{pmatrix} = L^k\begin{pmatrix}u_2+2v_2+u_1^2+2u_1v_1\\ -2u_2-v_2-v_1^2-2u_1v_1\end{pmatrix},$$

а оператор L задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} L = &\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}D^3 + 2\begin{pmatrix}u_1+v_1 & u_1\\ -v_1 & -u_1-v_1\end{pmatrix}D^2\\ &+\left(\begin{pmatrix}u_2+v_2 & u_2\\ -v_2 & -u_2-v_2\end{pmatrix} - \frac{A}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right)D - \begin{pmatrix}u_1 & 0\\ 0 & v_1\end{pmatrix}D^{-1}\begin{pmatrix}B & C\\ B & C\end{pmatrix}D \\ &+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}u_2+2v_2+2u_1v_1+u_1^2 & 0\\ 0 & v_2+2u_2+2u_1v_1+v_1^2\end{pmatrix}D^{-1}\begin{pmatrix}-2u_1-v_1 & -u_1-2v_1\\ 2u_1+v_1 & u_1+2v_1\end{pmatrix}D,\\ &A = u_1^2+u_1v_1+v_1^2, \quad B = \frac{2}{3}u_1^2 - \frac{1}{3}v_1^2 + \frac{2}{3}u_1v_1 + v_2, \quad C = \frac{1}{3}u_1^2 - \frac{2}{3}v_1^2 - \frac{2}{3}u_1v_1 - u_2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Все полиномиальные симметрии вида $u_t = F(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$, $v_t = G(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) симметрий (F_{3k+1}, G_{3k+1}), (F_{3k+2}, G_{3k+2}).

Доказательство. Для удобства введем обозначения

$$X = e^{-u}X_1, \quad Y = e^{-v}X_2, \quad Z = e^{u+v}X_3.$$

Нетрудно проверить, что имеют место соотношения

$$(D+u_1)X = XD, \quad (D+v_1)Y = YD, \quad (D-u_1-v_1)Z = ZD \tag{7.2}$$

и что уравнения $u_t = F$, $v_t = G$ задают симметрию системы (6.2) если и только если выполнены следующие условия:

$$XD\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2F\\ -F\end{pmatrix}, \quad YD\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-G\\ 2G\end{pmatrix}, \quad ZD\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F+G\\ F+G\end{pmatrix}.$$

Пусть пара однородных (по градуировке) многочленов $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ одной степени задает симметрию системы (6.2). Тогда, пользуясь соотношениями (7.2), можно показать, что функции

$$F = XZY\tilde{F} \quad \text{и} \quad G = YXZ\tilde{G} \tag{7.3}$$

удовлетворяют условиям (7.3), т.е. тоже задают симметрию системы (6.2). Поскольку применение каждого из операторов X, Y и Z к однородному многочлену понижает его градуировку на единицу, градуировка симметрии (F, G) будет меньше градуировки $\tilde{F}, \tilde{G}$ на 3. Прямой проверкой можно убедиться, что единственными (с точностью до умножения на константу) симметриями первого и второго порядка для системы (6.2) являются

$$u_t = F_1, \quad v_t = G_1 \quad \text{и} \quad u_t = F_2, \quad v_t = G_2$$

соответственно. Аналогично, нетрудно показать, что система (6.2) не имеет симметрий третьего порядка, откуда вытекает, что она также не может иметь симметрий порядка $3k$, где $k \in \mathbb{N}$. Далее, путем довольно громоздких вычислений с использованием равенств (7.2) можно обратить формулы (7.3):

$$\begin{pmatrix}\tilde{F}\\ \tilde{G}\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot L\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix},$$

где оператор L определен формулой (7.1). Таким образом, каждая из симметрий (F_1, G_1) и (F_2, G_2) однозначно (с точностью до умножения на константу) порождает последовательность симметрий в градуировках $3k+1$ и $3k+2$ соответственно. $\square$

Похожим образом выглядит структура симметрий и для систем (6.3)–(6.5). Компьютерный эксперимент показывает, у системы (6.3) есть по одной симметрии в градуировках $1, 3, 5, 7$, а в градуировках $2, 4, 6$ симметрий нет (мы не приводим здесь явных выражений для симметрий ввиду их громоздкости). Нетрудно построить операторы, подобные (7.3), которые переводят симметрии в симметрии и понижают градуировку на 6. Отсюда, в частности, следует, что система (6.3) не имеет симметрий в четных градуировках.

Система (6.5) имеет по одной симметрии в градуировках $1, 3, 5, 7$ и не имеет симметрий в градуировках $2, 4, 6$. Поскольку для этой системы существует оператор, который переводит симметрии в симметрии и понимает градуировку на 4, отсюда вытекает, что у нее нет симметрий в четных градуировках. Для системы (6.4) нам удалось найти симметрии в градуировках $1, 3, 7$ и показать, что их нет в градуировках $2, 4, 5, 6$. Для этой системы существует оператор, переводящий симметрии в симметрии, который понижает градуировку на 10. Нетрудно заметить, что эти результаты полностью повторяют структуру характеристических алгебр для соответствующих систем (см. рис. 3–6). Описанные выше наблюдения позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 7.1. *Характеристическая алгебра экспоненциальной системы, соответствующей матрице Картана произвольной аффинной алгебры Ли, имеет линейный рост, причем средняя скорость ее роста не превосходит размера $r+1$ соответствующей матрицы Картана (где r — ранг этой матрицы). Естественно градуированная структура характеристической алгебры такой системы периодична с некоторым периодом $m \in \mathbb{N}$. Такая система обладает бесконечной иерархией однородных по градуировке симметрий, которая состоит из конечного числа последовательностей. Все элементы каждой такой последовательности имеют вид $L^k(\mathbf{F})$, где L — некий линейный оператор, $k = 1, 2, \ldots$ и $\mathbf{F} = (F^1, \ldots, F^r)$ — затравочная симметрия, которая имеет порядок, меньший m. Любая симметрия, полиномиально зависящая от x-производных динамических переменных, является линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) описанных выше симметрий.*

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.В. Жиберу, О.В. Капцову, М.В. Павлову, В.В. Соколову, Е.В. Ферапонтову и И.Т. Хабибуллину за полезные обсуждения, которые, во многом, способствовали написанию данной статьи. Работа второго автора (параграфы 6, 7) выполнена за счет средств гранта РНФ №20-11-20214.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт. Уфа: БФАН СССР (1981).
2. А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. **51**:1, 10-22 (1982).
3. А.Н. Лезнов. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве* // ТМФ. **42**:3, 343–349 (1980).
4. V.E. Adler, I.T. Habibullin. *Integrable boundary conditions for the Toda lattice* // J. Phys. A: Math. Gen. **28**:23, 67116129 (1995).
5. B. Gürel, I. Habibullin. *Boundary conditions for two-dimensional integrable chains* // Phys. Lett. A. **233**:3-4, 68-72 (1997).
6. И.Т. Хабибуллин. *Обрывы цепочки Тоды и проблема редукций* // ТМФ. **143**:1, 22–48 (2005).
7. R.S. Ward. *Discrete Toda field equations* // Phys. Lett. A. **199**:1-2, 45–48 (1995).
8. A. Doliwa. *Geometric discretisation of the Toda system* // Phys. Lett. A. **234**:3, 187–192 (1997).
9. И.Т. Хабибуллин. *Дискретные цепочки серии C* // ТМФ. **146**:2, 208–221 (2006).

10. С.В. Смирнов. *Полудискретные цепочки Тоды* // ТМФ. **172**:3, 387–404 (2012).
11. I. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva. *Cartan matrices and integrable lattice Toda field equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **44**:46, 465202 (2011).
12. R. Garifullin, I. Habibullin, M. Yangubaeva. *Affine and finite Lie algebras and integrable Toda field equations on discrete time-space* // SIGMA. **8**:062 (2012).
13. С.В. Смирнов. *Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды* // ТМФ. **182**:5, 228–253 (2015).
14. D.K. Demskoi, D.T. Tran. *Darboux integrability of determinant and equations for principal minors* // Nonlinearity. **29**:7, 1973–1991 (2016).
15. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Discrete exponential type systems on a quad graph, corresponding to the affine Lie algebras $A^{(1)}_{N-1}$* // J. Phys. A: Math. Theor. **52**:36, 365202 (2019).
16. I. Habibullin, A. Khakimova. *Integrable boundary conditions for the Hirota-Miwa equation and Lie algebras* // J. Nonlinear Math. Phys. **27**:3, 393–413 (2020).
17. I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, A.U. Sakieva. *Integrability conditions for two-dimensional Toda-like equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **53**:39, 395203 (2020).
18. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Ann. Fac. Sci. Toulouse. **1**, 31–78, 439–464 (1899).
19. А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат. *Уравнения типа Лиувилля* // Докл. АН СССР. **249**:1, 26–29 (1979).
20. I.T. Habibullin. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // SIGMA. **1**:023 (2005).
21. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина. *О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$* // Фундамент. и прикл. матем. **12**:7, 65–78 (2006).
22. И.Т. Хабибуллин, А. Пекан. *Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей* // ТМФ. **151**:3, 413–423 (2007).
23. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **3**:2, 173-184 (2010).
24. Н.А. Желтухина, А.У. Сакиева, И.Т. Хабибуллин. *Характеристическая алгебра Ли и интегрируемые по Дарбу дискретные цепочки* // Уфимск. матем. журн. **2**:4, 39–51 (2010).
25. А.У. Сакиева. *Характеристическое кольцо Ли уравнения Жибера-–Шабата-–Цицейки* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 155-160 (2012).
26. М. Гюрсес, А.В. Жибер, И.Т. Хабибуллин. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений* // Уфимск. матем. журн. **4**:1, 53–62 (2012).
27. А.В. Жибер, С.Н. Камаева. *Построение точных решений уравнения синус-Гордона на основе его характеристического кольца Ли* // Уфимск. матем. журн. **8**:3, 49–58 (2016).
28. I. Habibullin, M. Poptsova. *Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic Lie rings* // SIGMA. **13**:073 (2017).
29. М.Н. Попцова, И.Т. Хабибуллин. *Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью* // Уфимск. матем. журн. **10**:3, 89–109 (2018).
30. И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова. *О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли–Райнхарта* // ТМФ. **203**:1, 161–173 (2020).
31. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения.* 2 изд., испр. и доп., М., «Юрайт» (2018).
32. А.В. Жибер, А.Б. Шабат. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой* // Докл. АН СССР. **247**:5, 1103–1107 (1979).
33. Д.В. Миллионщиков. *Характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки* // УМН. **72**:6, 203-204 (2017).
34. D. Millionshchikov. *Lie Algebras of Slow Growth and Klein–Gordon PDE* // Algebras and Representation Theory. **21**:5, 1037–1069 (2018).
35. G. Rinehart. *Differential forms for general commutative algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 195–222 (1963).
36. В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. *Полиномиальные алгебры Ли* // Функц. анализ и его прил. **36**:4, 18–34 (2002).

37. Д.В. Миллионщиков. *Полиномиальные алгебры Ли и рост их конечно порожденных подалгебр Ли* // Тр. МИАН. **302**, 316–333 (2018).
38. В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. **121**:2, 271–284 (1999).
39. В.Г. Кац. *Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **32**:5, 1323–1367 (1968).
40. O. Mathieu. *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth* // Invent. Math. **108**, 455-519 (1990).
41. G.R. Krause, T.H. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand–Kirillov dimension*, AMS Providence, R.I. (2000).
42. I.M. Gelfand, A.A. Kirillov. *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie* // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **31**, 5–19 (1966).
43. Дж. Риордан. *Комбинаторные тождества.* М.: Наука. 1982.

Дмитрий Владимирович Миллионщиков,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия
РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина,
Ленинский пр-т, д. 65,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: millionshchikov.d@gubkin.ru

Сергей Валерьевич Смирнов,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Ленинские Горы, д. 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: ssmirnov@higeom.math.msu.su