

УДК 517.957

*Посвящается светлой памяти Алексея Борисовича Шабата –
одного из главных создателей современной теории
классических интегрируемых систем*

КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АКНС ИЕРАРХИИ

А.О. СМИРНОВ, В.Б. МАТВЕЕВ

Аннотация. Нелинейные нелокальные модели существуют во многих областях физики. Наиболее известными из них являются модели, обладающие \mathcal{PT} -симметрией. Кроме \mathcal{PT} -симметричных моделей активно исследуются нелокальные модели с обратным временем и/или координатой. Другие виды нелокальностей встречаются намного реже. Как правило, в работах, посвященных нелинейным нелокальным уравнениям, рассматриваются солитонные или квази-рациональные решения одного из этих уравнений. В представленной нами работе рассмотрены нелокальные симметрии, которым удовлетворяют все уравнения из иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура. На основании свойств решений, удовлетворяющих нелокальным редукциям уравнений из иерархии АКНС, предложена модификация тэта-функциональной формулы для функции Бейкера-Ахиезера. Найдены условия на параметры спектральных кривых, ассоциированных с многофазными решениями, не имеющих экспоненциального роста на бесконечности. Показано, что при выполнении данных условий происходит разделение переменных. Большинство утверждений нашей работы является верным и для солитонных и квази-рациональных решений, поскольку они являются предельными случаями многофазных.

Ключевые слова: уравнение НШ, иерархия АКНС, нелокальное уравнение, \mathcal{PT} симметрия, конечнозонное решение, спектральная кривая, тэта функция.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 35Q55, 35Q60

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные нелокальные модели возникают во многих областях физики. Наиболее известными из них являются модели, обладающие \mathcal{PT} -симметрией. Для общего представления о роли \mathcal{PT} -симметрии в широком круге физических задач, связанных со спектральной теорией неэрмитовых операторов с вещественными спектрами, ее проявлениями в теории нелинейных волн в различных физических средах и, в частности, в теории нелокальных интегрируемых систем, можно рекомендовать обзор [1] и недавнюю книгу [2].

После появления работ Абловица и Мусслимани [3]– [8] резко увеличилось внимание к решениям нелокальных интегрируемых нелинейных уравнения (см., например, [9]– [30]). Как правило, в этих работах для построения решений авторы использовали преобразование Дарбу или метод Хироты. Естественно, встал вопрос о возможности построения решений нелокальных интегрируемых уравнений методом конечнозонного интегрирования. Первые наши результаты по теории конечнозонных решений нелокальных интегрируемых

A.O. SMIRNOV, V.B. MATVEEV, FINITE-GAP SOLUTIONS OF NONLOCAL EQUATIONS IN ABLOWITZ-KAUP-NEWELL-SEGUR HIERARCHY.

© Смирнов А.О., Матвеев В.Б. 2021.

Исследования были выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-01-00734) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № FSRF-2020-0004).

Поступила 15 марта 2021 г.

уравнений из АКНС иерархии были опубликованы в работах [31]– [33]. В настоящей работе мы подводим итоги наших исследований по данной теме.

Представленная работа состоит из пяти разделов. В первом разделе, следуя [34], [35], мы выводим уравнения из АКНС иерархии и анализируем их симметрии. Второй раздел посвящен предлагаемой нами модификации функции Бейкера-Ахиезера. За основу взята функция Бейкера-Ахиезера для классических вариантов нелинейного уравнения Шредингера [36]– [38]. В заключение второго раздела приводятся формулы для конечнозонных решений, соответствующих предложенной нами функции Бейкера-Ахиезера. В разделе 3 исследованы свойства конечнозонных решений, построенных по трем классам спектральных кривых с антиголоморфной инволюцией. В общем случае конечнозонные решения, построенные по спектральным кривым с антиголоморфной инволюцией, имеют экспоненциальный рост/убывание при стремлении значений независимых аргументов к положительной/отрицательной бесконечности. В связи с этим на спектральные кривые наложено дополнительное условие в виде наличия голоморфной инволюции. В разделах 4 и 5 показано, как наличие данной голоморфной инволюции влияет на параметры построенных в разделе 2 конечнозонных решений нелокальных уравнений АКНС иерархии. В частности, в разделе 5 показано, что наличие голоморфной инволюции приводит к разделению переменных: каждая тэта-функция конечнозонного решения является суммой, составленной из произведений двух тэта-функций меньшей размерности. В аргументе одной из меньших тэта-функций будут присутствовать времена с нечетным индексом t_1, t_3, \dots , в аргументе второй – переменная x и времена с четным индексом t_2, t_4, \dots . Также в разделе 5 приведены примеры выражающихся через одномерные тэта-функции двухзонных решений нелокальных уравнений АКНС иерархии.

1. УРАВНЕНИЯ ИЗ АКНС ИЕРАРХИИ

Хорошо известно, что уравнения из АКНС иерархии [39] получаются как результат совместного рассмотрения уравнений

$$\begin{cases} \Psi_x = \mathfrak{U}\Psi, \\ \Psi_{t_k} = \mathfrak{V}_k\Psi, \end{cases} \quad (1.1)$$

где (см., например, [34], [35])

$$\mathfrak{U} := \lambda J + \mathfrak{U}^0, \quad \mathfrak{V}_1 := 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, \quad \mathfrak{V}_{k+1} := 2\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, \quad k \geq 1, \quad (1.2)$$

$$J := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U}^0 := \begin{pmatrix} 0 & ip \\ -iq & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\mathfrak{V}_k^0 = \begin{pmatrix} -i^k F_k(p, q) & i^{k-1} H_k(p, q) \\ i^{k-1} G_k(p, q) & i^k F_k(p, q) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Из уравнения

$$(\Psi_x)_{t_k} = (\Psi_{t_k})_x$$

вытекают следующие рекуррентные соотношения на функции $F_k(p, q)$, $H_k(p, q)$ и $G_k(p, q)$:

$$\begin{aligned} H_1(p, q) &= -p_x, & G_1(p, q) &= -q_x, \\ (F_k(p, q))_x &= -pG_k(p, q) - qH_k(p, q), \\ H_{k+1}(p, q) &= 2pF_k(p, q) + (H_k(p, q))_x, \\ G_{k+1}(p, q) &= -2qF_k(p, q) - (G_k(p, q))_x. \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} F_1(p, q) &= pq, & H_2(p, q) &= 2p^2q - p_{xx}, \\ G_2(p, q) &= -2q^2p + q_{xx}, & F_2(p, q) &= p_xq - pq_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3(p, q) &= 6pqq_x - p_{xxx}, & G_3(p, q) &= 6pqq_x - q_{xxx}, \\
F_3(p, q) &= pq_{xx} + qp_{xx} - p_xq_x - 3p^2q^2, \\
H_4(p, q) &= -6p^3q^2 + 6qp_x^2 + 4pp_xq_x + 8pqp_{xx} + 2p^2q_{xx} - p_{xxxx}, \\
G_4(p, q) &= 6p^2q^3 - 6pq_x^2 - 4qp_xq_x - 8pqq_{xx} - 2q^2p_{xx} + q_{xxxx}, \\
F_4(p, q) &= -6pq^2p_x + 6p^2qq_x - q_xp_{xx} + p_xq_{xx} + qp_{xxx} - pq_{xxx}, \\
H_5(p, q) &= -30p^2q^2p_x + 10p_x^2q_x + 20qp_xp_{xx} + 10pq_xp_{xx} \\
&\quad + 10pp_xq_{xx} + 10pqp_{xxx} - p_{xxxx}, \\
G_5(p, q) &= -30p^2q^2q_x + 10p_xq_x^2 + 10qq_xp_{xx} + 10qp_xq_{xx} \\
&\quad + 20pq_xq_{xx} + 10pqq_{xxx} - q_{xxxx}, \\
F_5(p, q) &= 10p^3q^3 - 5q^2p_x^2 - 5p^2q_x^2 - 10pqq^2p_{xx} - 10p^2qq_{xx} + p_{xx}q_{xx} \\
&\quad - q_xp_{xxx} - p_xq_{xxx} + qp_{xxx} + pq_{xxx}.
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что функции $F_k(p, q)$, $H_k(p, q)$ и $G_k(p, q)$ обладают следующими свойствами [34], [35]

$$\begin{aligned}
F_k(q, p) &= (-1)^{k-1} F_k(p, q), & F_k(-p, -q) &= F_k(p, q), \\
G_{k+1}(p, q) &= (-1)^k H_{k+1}(q, p), & H_{k+1}(-p, -q) &= -H_{k+1}(p, q)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

и

$$\begin{aligned}
F_k(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}) &= (-1)^{k-1} F_k(p, q)|_{x=-x}, \\
G_k(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}) &= (-1)^k G_k(p, q)|_{x=-x}, \\
H_k(p|_{x=-x}, q|_{x=-x}) &= (-1)^k H_k(p, q)|_{x=-x}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Следствием условий совместности также являются интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения АКНС иерархии, которые имеют вид

$$p_{t_k} = -i^k H_{k+1}(p, q), \quad q_{t_k} = -i^k G_{k+1}(p, q)$$

или

$$p_{t_k} + i^k H_{k+1}(p, q) = 0, \quad q_{t_k} + (-i)^k H_{k+1}(q, p) = 0. \tag{1.7}$$

В наших обозначениях классические интегрируемые нелинейные уравнения имеют следующий вид:

1. фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера

$$ip_{t_1} - H_2(p, -p^*) = 0;$$

2. дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера

$$ip_{t_1} - H_2(p, p^*) = 0;$$

3. действительное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза

$$p_{t_2} - H_3(p, \pm p) = 0;$$

4. уравнение Лакшманана-Порсециана-Даниеля ([40–42], $t = -t_3$)

$$ip_t - H_4(p, -p^*) = 0.$$

2. ФУНКЦИЯ БЕЙКЕРА-АХИЕЗЕРА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сделаем в уравнениях (1.2) замену спектрального параметра $\lambda \rightarrow i\lambda$:

$$\mathfrak{U} := i\lambda J + \mathfrak{U}^0, \quad \mathfrak{V}_1 := 2i\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, \quad \mathfrak{V}_{k+1} := 2i\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, \quad k \geq 1. \quad (2.1)$$

Нетрудно понять, что условия совместности пар Лакса (1.1) при этом не изменятся, хотя поменяются условия вещественности, а также редукции, содержащие операцию комплексного сопряжения.

Следуя [36], [37] (см. также [34], [35], [43]–[45]) зададим гиперэллиптическую кривую $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$ рода g

$$\Gamma : \quad \chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j) \equiv \lambda^{2g+2} + \sum_{j=1}^{2g+2} \chi_j \lambda^{2g+2-j}, \quad \chi_j \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Выберем на Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем на Γ также нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$d\mathcal{U}_j = \sum_{k=1}^g c_{jk} \lambda^{g-k} \frac{d\lambda}{\chi}, \quad (2.3)$$

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g \quad (2.4)$$

с матрицей периодов

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad B^t = B, \quad \text{Im}(B) > 0. \quad (2.5)$$

Построим по матрице периодов g -мерную тэта-функцию с характеристиками $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^g$ [46]–[51]:

$$\begin{aligned} \Theta[\boldsymbol{\eta}^t; \boldsymbol{\zeta}^t](\mathbf{p}|B) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta})^t B(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta}) + 2\pi i(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta})^t(\mathbf{p} + \boldsymbol{\zeta})\}, \\ \Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) &\equiv \Theta(\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$, суммирование проходит по целочисленной g -мерной решетке.

Определим также на Γ нормированные абелевы интегралы второго — $\Omega_j(\mathcal{P})$ и третьего — $\omega_0(\mathcal{P})$, рода с асимптотикой в бесконечно удаленных точках \mathcal{P}_∞^\pm :

$$\begin{aligned} \oint_{a_k} d\Omega_j &= \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, & k &= 1, \dots, g, \\ \Omega_j(\mathcal{P}) &= \pm((2i)^{j-1} \lambda^j - K_j + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathcal{P}) &= \mp(\ln \lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \chi &= \pm(\lambda^{g+1} + O(\lambda^g)), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Обозначим через $2\pi i \mathbf{V}^j$ векторы b -периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_j(\mathcal{P})$.

Следуя [36], [37] и [38], зададим однозначную от точки $\mathcal{P} \in \Gamma$ векторную функцию Бейкера-Ахиезера

$$\Psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) \\ \phi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{x} = (x, t_1, t_2, \dots)^t$,

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= r_1(\mathbf{x}) \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0)} \exp\{\Omega(\mathcal{P}, \mathbf{x})\}, \\ \phi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= r_2(\mathbf{x}) \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \Delta)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{Z}_0)} \exp\{\omega_0(\mathcal{P}) + \Omega(\mathcal{P}, \mathbf{x})\}.\end{aligned}$$

Здесь r_j – нормирующие множители, Δ – вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки \mathcal{P}_∞^- и \mathcal{P}_∞^+ , и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^1 x + \sum_{j \geq 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j, \\ \Omega(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= x \Omega_1(\mathcal{P}) + \sum_{j \geq 1} t_j \Omega_{j+1}(\mathcal{P}),\end{aligned}$$

$\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{C}^g$ – вектор, задающий начальную фазу.

Нормирующие множители

$$\begin{aligned}r_1(\mathbf{x}) &= \rho_1 \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^+) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))} \exp\left\{K_1 x + \sum_{j \geq 1} K_{j+1} t_j\right\}, \\ r_2(\mathbf{x}) &= K_0 \rho_2 \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^-) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}^-) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \Delta)} \exp\left\{-K_1 x - \sum_{j \geq 1} K_{j+1} t_j\right\},\end{aligned}$$

находим из асимптотики вектор-функции (2.9) в окрестности бесконечно удаленных точек \mathcal{P}_∞^\pm :

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= \left(\rho_1 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j^+(\mathbf{x}) \lambda^{-j}\right) \exp\left\{x \lambda + \sum_{j \geq 1} t_j (2i)^j \lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+, \\ \phi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= \lambda^{-1} \left(s_2(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 1} \beta_j^+(\mathbf{x}) \lambda^{-j}\right) \exp\left\{x \lambda + \sum_{j \geq 1} t_j (2i)^j \lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+, \\ \psi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= \left(s_1(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 1} \alpha_j^-(\mathbf{x}) \lambda^{-j}\right) \exp\left\{-x \lambda - \sum_{j \geq 1} t_j (2i)^j \lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^-, \\ \phi(\mathcal{P}, \mathbf{x}) &= \lambda \left(\rho_2 + \sum_{j \geq 1} \beta_j^-(\mathbf{x}) \lambda^{-j}\right) \exp\left\{-x \lambda - \sum_{j \geq 1} t_j (2i)^j \lambda^{j+1}\right\}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^-.\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Алгебро-геометрические решения уравнений АКНС иерархии, построенные по функции Бейкера-Ахиезера (2.9), имеют вид*

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}) &= \frac{2i A \rho_1}{\rho_2} \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) - \Delta)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))} \exp\{2\Phi(\mathbf{x})\}, \\ q(\mathbf{x}) &= \frac{2i \rho_2 K_0^2}{A \rho_1} \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \Delta)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + \mathbf{U}(\mathbf{x}))} \exp\{-2\Phi(\mathbf{x})\},\end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$A = \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) - \mathbf{Z}_0)}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = K_1 x + \sum_{j \geq 1} K_{j+1} t_j.$$

3. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ С АНТИИНВОЛЮЦИЕЙ

Пусть канонический базис циклов преобразуется при антиголоморфной инволюции

$$\tau_a : (\chi, \lambda) \rightarrow (\chi^*, \lambda^*) \quad (3.1)$$

по следующим формулам ($\sigma_a = \pm 1$)

$$\tau_a \mathbf{a} = \sigma_a \mathbf{a}, \quad \tau_a \mathbf{b} = -\sigma_a (\mathbf{b} + K\mathbf{a}). \quad (3.2)$$

Введем обозначения

$$\mathcal{A}_{jm} = \oint_{a_j} \lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi}, \quad \mathcal{B}_{jm} = \oint_{b_j} \lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi}.$$

Тогда матрица коэффициентов нормированных голоморфных дифференциалов (2.3) и матрица периодов (2.5) равны

$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}^t)^{-1}, \quad B = \mathcal{B}\mathcal{C}^t = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}.$$

Из уравнения

$$\int_{\tau\ell} d\omega = \int_{\ell} \tau d\omega,$$

где ℓ есть произвольный путь на Γ , а $d\omega$ – произвольный абелев дифференциал, следует, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{jm})^* &= \oint_{a_j} \left(\lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi} \right)^* = \oint_{a_j} \tau_a \left(\lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi} \right) \\ &= \oint_{\tau_a a_j} \lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi} = \sigma_a \oint_{a_j} \lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi} = \sigma_a \mathcal{A}_{jm}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{A}^* = \sigma_a \mathcal{A}$ и $\mathcal{C}^* = \sigma_a \mathcal{C}$. Поступая аналогично с интегралами по b -циклам, получаем

$$\mathcal{B}^* = -\sigma_a (\mathcal{B} + K\mathcal{A}) \quad \text{или} \quad B^* = -B - K$$

и

$$\text{Re}(B) = -\frac{1}{2}K. \quad (3.3)$$

Обобщая эти формулы на произвольный путь ℓ , имеем

$$\left(\int_{\ell} d\mathcal{U} \right)^* = \sigma_a \int_{\tau_a \ell} d\mathcal{U}. \quad (3.4)$$

Из билинейных соотношений Римана (см., например, [38], [46], [49]) следует, что

$$V_j^k = \text{Res}_{\mathcal{P}_{\infty}^+}(\mathcal{U}_j(\mathcal{P})d\Omega_k) - \text{Res}_{\mathcal{P}_{\infty}^-}(\mathcal{U}_j(\mathcal{P})d\Omega_k) = \frac{-2^k i^{k-1}}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^k \mathcal{U}_j}{\partial \xi_+^k} \right|_{\xi_+=0}.$$

Соответственно,

$$(\mathbf{V}^k)^* = (-1)^{k-1} \sigma_a \mathbf{V}^k. \quad (3.5)$$

Из равенств $(\Omega_j(\mathcal{P}))^* = (-1)^{j-1} \Omega_j(\tau_a \mathcal{P})$ и $\tau_a \mathcal{P}_{\infty}^{\pm} = \mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ следует, что

$$K_j^* = (-1)^{j-1} K_j \quad \text{и} \quad \Phi^*(\mathbf{x}) = -\Phi(\widehat{J}\mathbf{x}),$$

где $\widehat{J}_{km} = (-1)^k \delta_{km}$.

Рассмотрим 4 типа спектральных кривых с инволюцией (3.1), (3.2).

1. Все точки ветвления не лежат на действительной оси, $\text{Im}(\lambda_{2g+2}) \neq 0$, $\sigma_a = -1$, $\text{Re}(B) \neq 0$ при $g > 1$, (например, рис. 1).
2. Только часть точек ветвления не лежит на действительной оси, $\sigma_a = -1$, $\text{Re}(B) \neq 0$ при $g > 1$, (например, рис. 2).

3. Все точки ветвления лежат на действительной оси: $\text{Im}(\lambda_j) = 0$, $\sigma_a = -1$, $\text{Re}(B) = 0$ (рис. 3).
4. Все точки ветвления лежат на действительной оси: $\text{Im}(\lambda_j) = 0$, $\sigma_a = 1$, $\text{Re}(B) = 0$ (рис. 4).

Во всех четырех случаях будем считать, что

$$\Omega_j(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\Omega_j, \quad \omega_0(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0, \quad \mathcal{U}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\mathcal{U}.$$

Следовательно, во всех четырех случаях выполняются условия

$$\begin{aligned} \Omega_j(\tau_0\mathcal{P}) &= -\Omega_j(\mathcal{P}), & \omega_0(\tau_0\mathcal{P}) &= -\omega_0(\mathcal{P}), & \mathcal{U}(\tau_0\mathcal{P}) &= -\mathcal{U}(\mathcal{P}), \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) &= -\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) & \text{и} & & \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) &= \frac{1}{2}\Delta, \end{aligned}$$

где τ_0 есть гиперэллиптическая инволюция, $\tau_0 : (\chi, \lambda) \rightarrow (-\chi, \lambda)$.

В **случае 1** выполняется условие $\tau_a\mathcal{P}_{2g+2} = \mathcal{P}_{2g+1}$. Поэтому из уравнения (3.4) и соотношения $\tau_a\mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm$ вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^* &= \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^+} d\mathcal{U} \right)^* = \sigma_a \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_\infty^+} d\mathcal{U} = \sigma_a \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U} + \sigma_a \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+), \\ (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^* &= \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^-} d\mathcal{U} \right)^* = \sigma_a \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_\infty^-} d\mathcal{U} = \sigma_a \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U} + \sigma_a \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-). \end{aligned} \tag{3.6}$$

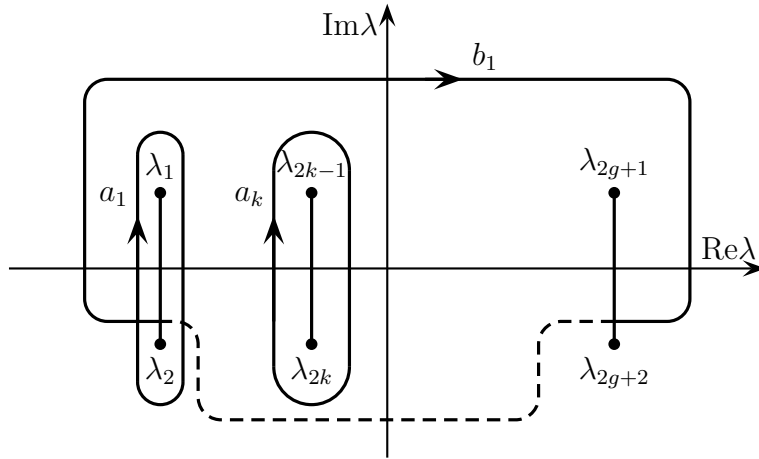


Рис. 1. Случай 1

Заметим, что пути интегрирования в уравнениях (3.6) принадлежат разным листам двулистной поверхности Γ . Поэтому в случае 1

$$\Delta^* = -\sigma_a \sum_{k=1}^g \int_{a_k} d\mathcal{U} + \sigma_a \Delta = \mathbf{e} - \Delta \quad \text{или} \quad \text{Re}(\Delta) = \frac{1}{2}\mathbf{e},$$

где $e_j = 1$, $j = 1, \dots, g$.

Также в данном случае выполняется равенство

$$(\omega_0(\mathcal{P}))^* = \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 \right)^* = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} \tau_a(d\omega_0) = \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\tau_a\mathcal{P}} d\omega_0 = \int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0 + \omega_0(\tau_a\mathcal{P}),$$

где путь интегрирования, соединяющий точки \mathcal{P}_{2g+1} и \mathcal{P}_{2g+2} , не пересекает базисные циклы. Вычисляя интеграл $\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0$, получаем

$$\int_{\mathcal{P}_{2g+1}}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\omega_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^g \int_{a_k} d\omega_0 + 2\pi i \operatorname{Res}_{\mathcal{P}_\infty^+}(d\omega_0) \right) = -\pi i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\ln K_0) &= \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} (\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} \int_{\tau_a \mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \{0; 1; -1\} \end{aligned}$$

или $K_0^2 = -|K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу \mathbf{Z}_0 так, что выполняется условие

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + B\mathbf{M} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^g, \quad \mathbf{N} = -(\operatorname{Re} B)\mathbf{M}, \quad (3.7)$$

имеем

$$\begin{aligned} p^*(\mathbf{x}) &= \frac{-2iA^* \rho_1^* \Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\hat{J}\mathbf{x}) + \Delta - \mathbf{e})}{\rho_2^* \Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\hat{J}\mathbf{x}))} e^{-2\Phi(\hat{J}\mathbf{x})} \\ &= -e^{\pi i \mathbf{M}^t \mathbf{e}} \left| \frac{A\rho_1}{K_0 \rho_2} \right|^2 e^{2\pi \mathbf{M}^t \operatorname{Im} \Delta} q(\hat{J}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, при $|\rho_2| = |A\rho_1 K_0^{-1} \exp\{\pi \mathbf{M}^t \operatorname{Im} \Delta\}|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям $\operatorname{Im}(\lambda_j) \neq 0$, $\sigma_a = -1$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = \sigma p^*(\hat{J}\mathbf{x})$, где

$$\sigma = -\exp\{\pi i \mathbf{M}^t \mathbf{e}\}. \quad (3.8)$$

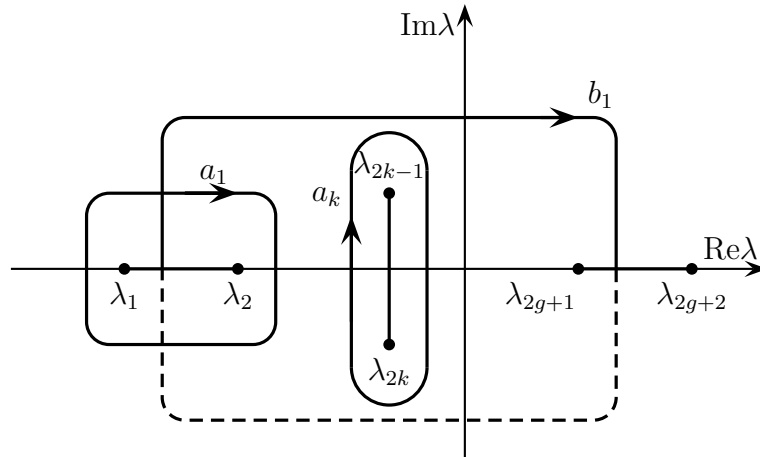


Рис. 2. Случай 2

В **случае 2** существуют отличные от нуля диагональные элементы матрицы K . Из формулы

$$\Theta^*(p|B) = \Theta(p^* + \mathbf{d}|B),$$

где $(\mathbf{d})_j = K_{jj}/2$, вытекает что спектральная кривая данного типа не может быть использована для построения нелокальных редукций многофазных решений из иерархии АКНС.

В случае 3 выполняется условие $\tau_a \mathcal{P}_{2g+2} = \mathcal{P}_{2g+2}$, и поэтому

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^* = -\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+), \quad (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^* = -\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) \quad \text{и} \quad \Delta^* = -\Delta,$$

и

$$(\omega_0(\mathcal{P}))^* = \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 \right)^* = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} \tau_a(d\omega_0) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\tau_a \mathcal{P}} d\omega_0 = \omega_0(\tau_a \mathcal{P}).$$

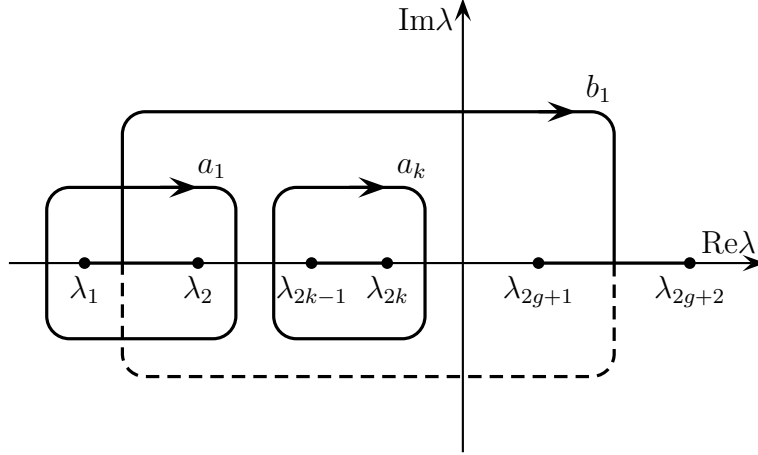


Рис. 3. Случай 3

Соответственно,

$$\text{Im}(\ln K_0) = \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} (\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*) = \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} \int_{\tau_a \mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \pi n, \quad n \in \{0; 1; -1\}$$

или $K_0^2 = |K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу \mathbf{Z}_0 так, что выполняется условие

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + B\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g, \quad (3.9)$$

имеем

$$\begin{aligned} p^*(\mathbf{x}) &= \frac{-2iA^* \rho_1^* \Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x}) + \Delta)}{\rho_2^* \Theta((\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* + U(\widehat{J}\mathbf{x}))} e^{-2\Phi(\widehat{J}\mathbf{x})} \\ &= \left| \frac{A\rho_1}{K_0\rho_2} \right|^2 e^{2\pi\mathbf{M}^t \text{Im}\Delta} q(\widehat{J}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, при $|\rho_2| = |A\rho_1 K_0^{-1} \exp\{\pi\mathbf{M}^t \text{Im}\Delta\}|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям, $\text{Re}(B) = 0$, $\text{Im}(\lambda_j) = 0$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x})$.

Для случая 4 снова выполняется условие $\tau_a \mathcal{P}_{2g+2} = \mathcal{P}_{2g+2}$, но поскольку $\sigma_a = 1$, то

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+))^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+), \quad (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-))^* = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-) \quad \text{и} \quad \Delta^* = \Delta.$$

Аналогично случаю 3 выполняются равенства

$$(\omega_0(\mathcal{P}))^* = \left(\int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 \right)^* = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}} \tau_a(d\omega_0) = \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\tau_a \mathcal{P}} d\omega_0 = \omega_0(\tau_a \mathcal{P})$$

и

$$\text{Im}(\ln K_0) = \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} (\omega_0(\mathcal{P}) - (\omega_0(\mathcal{P}))^*) = \frac{1}{2i} \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+} \int_{\tau_a \mathcal{P}}^{\mathcal{P}} d\omega_0 = \pi n, \quad n \in \{0; 1; -1\}$$

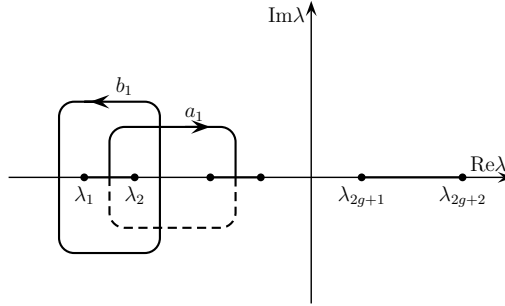


Рис. 4. Случай 4

или $K_0^2 = |K_0|^2$.

Выбирая начальную фазу \mathbf{Z}_0 так, что выполняется условие

$$(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0)^* = -(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0) + \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^g, \quad (3.10)$$

имеем

$$p^*(\mathbf{x}) = \frac{-2iA^*\rho_1^* \Theta(\mathbf{N} - (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + U(\widehat{J}\mathbf{x}) + \Delta))}{\rho_2^* \Theta(\mathbf{N} - (\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 + U(\widehat{J}\mathbf{x})))} e^{-2\Phi(\widehat{J}\mathbf{x})} = \left| \frac{A\rho_1}{K_0\rho_2} \right|^2 q(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Таким образом, при $|\rho_2| = |A\rho_1 K_0^{-1}|$ функции (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой, обладающей инволюцией (3.1), (3.2) и удовлетворяющей условиям $\text{Im}(\lambda_{2g+2}) = 0$, являются алгебро-геометрическими решениями нелокальных уравнений АКНС иерархии с редукцией $q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x})$.

4. РЕШЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ С ГОЛОМОРФНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

К сожалению, алгебро-геометрические решения (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой (2.2), обладающей инволюцией (3.1), (3.2) при $K_{2j-1} \neq 0$ имеют экспоненциальный рост по соответствующим переменным. Этого можно избежать, если использовать гиперэллиптические кривые с голоморфной инволюцией

$$\tau_h : (\chi, \lambda) \rightarrow (\chi, -\lambda). \quad (4.1)$$

Легко видеть, что во всех четырех рассмотренных случаях базисы циклов преобразуются по правилу

$$\tau_h \mathbf{a} = S\mathbf{a}, \quad \tau_h \mathbf{b} = Q\mathbf{a} + R\mathbf{b}, \quad \tau_h \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm,$$

где (см., например, [38], [52])

$$SR^t = I \quad \text{и} \quad QR^t = RQ^t.$$

Вычисляя периоды голоморфных дифференциалов $d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) = d\mathcal{U}_j(\tau_h \mathcal{P})$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{a_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) &= \int_{\tau_h a_k} d\mathcal{U}_j = \sum_{m=1}^g S_{km} \int_{a_m} d\mathcal{U}_j = S_{kj}, \\ \int_{a_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) &= \sum_{m=1}^g c_{jm} \int_{a_k} \tau_h \left(\lambda^{g-m} \frac{d\lambda}{\chi} \right) = \sum_{m=1}^g c_{jm} (-1)^{g+1-m} \mathcal{A}_{km} = (\mathcal{A}J\mathcal{C}^t)_{kj}, \end{aligned}$$

где

$$J_{mn} = (-1)^{g+1-m} \delta_{mn}. \quad (4.2)$$

Соответственно, $d\widehat{\mathcal{U}} = S^t d\mathcal{U}$, а матрицы S и J подобны,

$$S = (\mathcal{C}^t)^{-1} J \mathcal{C}^t \quad \text{и} \quad S^t = \mathcal{C} J \mathcal{C}^{-1}.$$

Поскольку $R = (S^t)^{-1}$ и $S^2 = I$, то $R = S^t$.

Интегрируя голоморфные дифференциалы по b -циклам, имеем

$$\begin{aligned} \int_{b_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) &= \int_{\tau_h b_k} d\mathcal{U}_j = \sum_{m=1}^g \left(Q_{km} \int_{a_m} d\mathcal{U}_j + R_{km} \int_{b_m} d\mathcal{U}_j \right) = (Q + RB)_{kj}, \\ \int_{b_k} d\widehat{\mathcal{U}}_j(\mathcal{P}) &= \sum_{m=1}^g (S^t)_{jm} \int_{b_k} d\mathcal{U}_m = (BS)_{kj}, \end{aligned}$$

или

$$BS = Q + RB. \quad (4.3)$$

Транспонируя равенство (4.3), имеем

$$S^t B = Q^t + BR^t \quad \text{или} \quad RB = Q^t + BS.$$

Следовательно, $Q^t = -Q$. Вычисляя действительную часть равенства (4.3), получаем

$$Q = (\operatorname{Re}B)S - S^t(\operatorname{Re}B)$$

и

$$S^t Q = S^t(\operatorname{Re}B)S - (\operatorname{Re}B) = Q^t S.$$

Заметим, что из асимптотики функции $\chi(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленных точек следует, что:

- если g – нечетное, то $\tau_h \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm$,
- если g – четное, то $\tau_h \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\mp$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S^t \Delta &= 2 \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^+} S^t d\mathcal{U} = 2 \int_{\mathcal{P}_{2g+2}}^{\mathcal{P}_\infty^+} \tau_h d\mathcal{U} = 2 \int_{\mathcal{P}_1}^{\tau_h \mathcal{P}_\infty^+} d\mathcal{U} \\ &= 2 \int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_{2g+2}} d\mathcal{U} + 2\mathcal{U}(\tau_h \mathcal{P}_\infty^+) = (-1)^{g+1} \Delta - 2\mathcal{U}(\mathcal{P}_1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введем обозначения: $\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P}) = \Omega_j(\tau_h \mathcal{P})$. Эти интегралы обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \int_{a_k} d\widehat{\Omega}_j &= \int_{\tau_h a_k} d\Omega_j = \sum_{m=1}^g S_{km} \int_{a_m} d\Omega_j = 0, \\ \widehat{\Omega}_j(\mathcal{P}) &= \pm ((2i)^{j-1} (-\lambda)^j - K_j + O(\lambda^{-1})), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned}$$

Поскольку абелев интеграл $\mu_j(\mathcal{P}) = \widehat{\Omega}_j(\mathcal{P}) - (-1)^j \Omega_j(\mathcal{P})$ не имеет особенностей и имеет нулевые a -периоды, то он является постоянной величиной. Из асимптотики $\mu_j(\mathcal{P})$ в бесконечно удаленных точках

$$\mu_j(\mathcal{P}) = \mp ((-1)^j - 1) K_j + O(\lambda^{-1}), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm$$

следует, что $\mu_j(\mathcal{P}) \equiv 0$, $\widehat{\Omega}_j(\mathcal{P}) \equiv (-1)^j \Omega_j(\mathcal{P})$, $K_{2j-1} = 0$.

Таким образом, многофазные решения (2.10), построенные по гиперэллиптической кривой (2.2) с инволюциями (3.1), (4.1) не имеют экспоненциального роста.

Вычисляя b -периоды абелевых интегралов второго рода, получаем

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{V}}^j)_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} d\widehat{\Omega}_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_h b_k} d\Omega_j \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^g \left(Q_{km} \int_{a_m} d\Omega_j + R_{km} \int_{b_m} d\Omega_j \right) = (R\mathbf{V}^j)_k, \end{aligned}$$

$$(\widehat{\mathbf{V}}^j)_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} d\widehat{\Omega}_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{b_k} d\Omega_j = (-1)^j (\mathbf{V}^j)_k.$$

Следовательно, векторы \mathbf{V}^j являются собственными векторами матрицы R : $R\mathbf{V}^j = (-1)^j \mathbf{V}^j$ или

$$S^t \mathbf{V}^j = (-1)^j \mathbf{V}^j. \quad (4.5)$$

Однофазные решения нелокальных уравнений из АКНС иерархии были рассмотрены нами в работах [31]– [33]. Поэтому далее мы будем считать, что $g > 1$.

В **случае 1** выполняется равенство $\operatorname{Re}(B_{jk}) = (\delta_{jk} - 1)/2$, а элементы матриц преобразования циклов при инволюции τ_h равны:

$$\begin{aligned} S_{1k} &= (-1)^g, & S_{jk} &= (-1)^{g+1} \delta_{j,g+2-k}, & j &= 2, \dots, g, & k &= 1, \dots, g, \\ Q_{jk} &= (-1)^g (\delta_{j1} - \delta_{1k}), & j, k &= 1, \dots, g, \\ (S^t Q)_{jk} &= 1 - \delta_{j1} \delta_{1k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В частности, при $g = 2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а при $g = 3$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений (4.4), (4.6) и условия вещественности вектора Δ следует, что

$$S^t \Delta = (-1)^{g+1} (\Delta + (B - I)\mathbf{e}_1),$$

где $\mathbf{e}_1^t = (1, 0, \dots, 0)$.

Можно показать, что при четном g условие (3.7) выполняется только для $\mathbf{M} \in 2\mathbb{Z}^g$. Следовательно, при четном g решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = -p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Вместе с тем, при нечетном g существуют начальные фазы \mathbf{Z}_0 для обоих видов редукций:

$$q(\mathbf{x}) = \pm p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

В **случае 3** элементы матрицы S определяются формулой (4.6), а также выполняются равенства:

$$\operatorname{Re}(B_{jk}) = 0, \quad Q_{jk} = 0, \quad S^t \Delta = (-1)^{g+1} (\Delta + B\mathbf{e}_1).$$

Нетрудно показать, что в случае 3 при любом $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$ и при начальной фазе \mathbf{Z}_0 , удовлетворяющей условию (3.9), решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

В **случае 4**

$$\operatorname{Re}(B_{jk}) = 0, \quad Q_{jk} = 0, \quad S_{jk} = (-1)^g \delta_{j,g+1-k}, \quad j, k = 1, \dots, g, \quad (4.7)$$

$$S^t \Delta = (-1)^{g+1} (\Delta - \mathbf{e}),$$

и при любом $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^g$ и при начальной фазе \mathbf{Z}_0 , удовлетворяющей условию (3.10), решение (2.10), построенное по кривой (2.2), (3.1), (4.1), удовлетворяет редукции

$$q(\mathbf{x}) = p^*(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5. РЕДУКЦИЯ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ К ТЭТА-ФУНКЦИЯМ
МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

5.1. Общие положения. Из уравнения (4.3) следует, что матрица периодов B удовлетворяет уравнению

$$B = S^t B S - S^t Q. \quad (5.1)$$

Следуя [52], рассмотрим матрицу T , $T_{jk} \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющую условию

$$S = T J T^{-1}, \quad (5.2)$$

где матрица J определяется формулой (4.2).

В первом и третьем случаях, когда матрица S определяется условиями (4.6), из уравнения (5.2) вытекают следующие ограничения на элементы матрицы T :

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^g T_{mk} &= ((-1)^{k-1} - 1) T_{1k}, \\ T_{g+2-j,k} &= (-1)^k T_{jk}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Зафиксируем элементы первой строки матрицы T :

$$T_{1k} = 1, \quad k = 1, \dots, g.$$

Остальные элементы матрицы T определим следующим образом. Если $g = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} T_{j,2k} &= -\delta_{j,m+k} - \delta_{j,m+2-k}, \\ T_{j,2k-1} &= \delta_{j,m+k} - \delta_{j,m+2-k}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Если $g = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то $T_{j1} = 0$,

$$\begin{aligned} T_{j,2k} &= -\delta_{j,m+1+k} - \delta_{j,m+2-k}, \\ T_{j,2k+1} &= \delta_{j,m+1+k} - \delta_{j,m+2-k}, \quad j = 2, \dots, g, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Из свойств определителя следует, что $\det T = (-2)^m$.

В четвертом случае ограничения на элементы матрицы T имеют вид

$$T_{g+1-j,k} = (-1)^{k-1} T_{jk}.$$

Определим элементы матрицы T следующим образом. Если $g = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} T_{jk} &= 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq 2(m+1-j), \\ T_{jk} &= 0 \quad \text{при} \quad 1 < j \leq m, \quad 2(m+1-j) < k \leq 2m, \quad m \neq 1, \\ T_{jk} &= (-1)^{k-1} \quad \text{при} \quad m < j \leq 2m, \quad 1 \leq k \leq 2(j-m), \\ T_{jk} &= 0 \quad \text{при} \quad m < j < 2m, \quad 2(j-m) < k \leq 2m, \quad m \neq 1. \end{aligned}$$

Если $g = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} T_{jk} &= 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq 2(m-j) + 3, \\ T_{jk} &= 0 \quad \text{при} \quad 1 < j \leq m, \quad 2(m-j) + 3 < k \leq 2m + 1, \quad m \neq 1, \\ T_{jk} &= (-1)^{k-1} \quad \text{при} \quad m < j \leq 2m + 1, \quad 1 \leq k \leq 2(j-m) - 1, \\ T_{jk} &= 0 \quad \text{при} \quad m < j < 2m + 1, \quad 2(j-m) \leq k \leq 2m + 1. \end{aligned}$$

В этом случае также выполняется равенство $\det T = (-2)^m$.

Введем обозначения

$$\tilde{B} = T^t(i\text{Im}B)T, \quad \tilde{A} = T^t(\text{Re}B)T, \quad \tilde{\mathbf{V}}^j = T^t \mathbf{V}^j.$$

Из уравнений (4.5), (5.1) и (5.2) вытекают следующие соотношения

$$\tilde{B} = J \tilde{B} J, \quad J \tilde{\mathbf{V}}^j = (-1)^j \tilde{\mathbf{V}}^j, \quad (\tilde{A})_{jk} \in \mathbb{Z}. \quad (5.3)$$

Заменяя порядок суммирования в формуле многомерной тэта-функции с матрицей B , получаем (см. [52])

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)} e^{-\pi i \eta^t(\mathbf{k})(\tilde{A}-D)\eta(\mathbf{k})} \Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t \mathbf{p} | \tilde{B} + D),$$

где суммирование $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)$ означает конечную сумму по \mathbf{k} : $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g$, $0 \leq T^{-1}\mathbf{k} < 1$, D – диагональная матрица, $D_{jj} = \tilde{A}_{jj}$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) = T^{-1}\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k}) = (\tilde{A} - D)\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k})$. Число слагаемых в сумме равно $|\det T|$. При этом, поскольку выполняются соотношения (5.3), матрица \tilde{B} имеет блочную структуру и тэта-функция

$$\Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t \mathbf{p} | \tilde{B} + D)$$

может быть представлена в виде произведений двух тэта-функций меньшей размерности. Также из соотношений (5.3) следует, что в аргументе одной из тэта-функций будут присутствовать времена с нечетным индексом t_1, t_3, \dots , во втором – переменная x и времена с четным индексом t_2, t_4, \dots .

В заключение раздела приведем примеры представления двухфазных решений нелокальных уравнений из АКНС иерархии через одномерные тэта-функции.

5.2. Двухфазное решение. Случай 1. Вычисления, проведенные для спектральной кривой

$$\chi^2 = (\lambda^2 + c^2) (\lambda^4 - 2(a^2 - b^2)\lambda^2 + (a^2 + b^2)^2), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

дают следующие формулы

$$B = \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & i\beta_1 - 1/2 \\ i\beta_1 - 1/2 & i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1/2 - i\beta_1 \\ 1/2 + i\delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ v_{2j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j, \delta_j, v_j \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & 0 \\ 0 & 4i\beta_2 - 2i\beta_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$f_s(\mathbf{x}) = \Theta \left(\mathbf{z} + \mathbf{V}^1 x + \sum_{j \geq 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j + s \Delta \middle| B \right)$$

$$= \theta[0; 0](p_1 | 2i\beta_1) \theta[0; 0](p_2 | 4i\beta_2 - 2i\beta_1) + \theta[1/2; 1/2](p_1 | 2i\beta_1) \theta[1/2; 1/2](p_2 | 4i\beta_2 - 2i\beta_1),$$

где $s \in \{-1; 0; 1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 \equiv \mathbf{Z} = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 = z_1 + 2 \sum_{j \geq 1} v_{2j} t_{2j-1} + s \left(\frac{1}{2} - i\beta_1 \right),$$

$$p_2 = z_1 - 2z_2 - 2iv_1 x - 2i \sum_{j \geq 1} v_{2j+1} t_{2j} - s \left(\frac{1}{2} + i\beta_1 + 2i\delta_2 \right),$$

допускает следующие редукции

$$f_0^*(\mathbf{x}) = f_0(\hat{J}\mathbf{x}), \quad f_1^*(\mathbf{x}) = f_{-1}(\hat{J}\mathbf{x}), \quad f_{-1}^*(\mathbf{x}) = f_1(\hat{J}\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.4), при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = -p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5.3. Двухфазное решение. Случай 3. Вычисления, проведенные для спектральной кривой

$$\chi^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

дают следующие формулы

$$B = \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & i\beta_1 \\ i\beta_1 & i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -i\beta_1 \\ i\delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ v_{2j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j, \delta_j, v_j \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 2i\beta_1 & 0 \\ 0 & 4i\beta_2 - 2i\beta_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{V}}^{2j-1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2iv_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}^{2j} = \begin{pmatrix} 2v_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}) &= \Theta \left(\mathbf{Z} + \mathbf{V}^1 x + \sum_{j \geq 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j + s\Delta \middle| B \right) \\ &= \theta[0; 0](p_1 | 2i\beta_1) \theta[0; 0](p_2 | 4i\beta_2 - 2i\beta_1) + \theta[1/2; 0](p_1 | 2i\beta_1) \theta[1/2; 0](p_2 | 4i\beta_2 - 2i\beta_1), \end{aligned}$$

где $s \in \{-1; 0; 1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 \equiv \mathbf{Z} = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 = z_1 + 2 \sum_{j \geq 1} v_{2j} t_{2j-1} - is\beta_1,$$

$$p_2 = z_1 - 2z_2 - 2iv_1 x - 2i \sum_{j \geq 1} v_{2j+1} t_{2j} - is(\beta_1 + 2\delta_2),$$

допускает редукции (5.5). Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.6), при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

5.4. Двухфазное решение. Случай 4. Вычисления, проведенные для спектральной кривой (5.6) дают следующие формулы

$$B = \begin{pmatrix} i\beta_2 & i\beta_1 \\ i\beta_1 & i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 - \delta_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j-1} = \begin{pmatrix} -v_{2j-1} \\ v_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{2j} = \begin{pmatrix} iv_{2j} \\ iv_{2j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j, \delta_j, v_j \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 2i(\beta_2 + \beta_1) & 0 \\ 0 & 2i(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{V}}^{2j-1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}^{2j} = \begin{pmatrix} 2iv_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что соответствующая двумерная тэта-функция

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}) &= \Theta \left(\mathbf{Z} + \mathbf{V}^1 x + \sum_{j \geq 1} \mathbf{V}^{j+1} t_j + s\Delta \middle| B \right) \\ &= \theta[0; 0](p_1 | 2i(\beta_2 + \beta_1)) \theta[0; 0](p_2 | 2i(\beta_2 - \beta_1)) \\ &\quad + \theta[1/2; 0](p_1 | 2i(\beta_2 + \beta_1)) \theta[1/2; 0](p_2 | 2i(\beta_2 - \beta_1)), \end{aligned}$$

где $s \in \{-1; 0; 1\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{Z}_0 \equiv i\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z} = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 = iz_1 + iz_2 + 2i \sum_{j \geq 1} v_{2j} t_{2j-1} + s,$$

$$p_2 = iz_1 - iz_2 - 2v_1 x - 2 \sum_{j \geq 1} v_{2j+1} t_{2j} + s(1 - 2\delta_2),$$

допускает редукции (5.5). Следовательно, решение (2.10) уравнений иерархии АКНС, построенное по кривой (5.6) при втором выборе базиса циклов, для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ также удовлетворяет редукции

$$q^*(\mathbf{x}) = p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для построения решений только одного из нелокальных уравнений из АКНС иерархии можно взять любое решение локальных уравнений АКНС иерархии, удовлетворяющее условиям

$$p(-x, 0, 0, \dots) = p(x, 0, 0, \dots),$$

$$q^*(\mathbf{x}) = \sigma p(\mathbf{x}), \quad x, t_k \in \mathbb{R}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Тогда, в частности, функции

$$p(x, t, iT_2, T_3, iT_4, \dots), \quad q(x, t, iT_2, T_3, iT_4, \dots), \quad T_k \in \mathbb{R}$$

будут решениями \mathcal{PT} -симметричного нелинейного уравнения Шредингера

$$q^*(\mathbf{x}) = \sigma p(\widehat{J}\mathbf{x}).$$

Заметим, что именно таким условиям удовлетворяют волны-убийцы, построенные в работах [27], [29]. Вместе с тем, функции

$$p(x, T_1, iT_2, t, iT_4, \dots), \quad q(x, T_1, iT_2, t, iT_4, \dots), \quad T_k \in \mathbb{R}$$

будут являться решениями \mathcal{PT} -симметричного уравнения Лакшманана-Порсециана-Даниеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Konotop, J. Yang, D. Zezulín. *Nonlinear waves in PT-symmetric systems* // Rev. Modern Phys. **88**, 035002, (2016).
2. D. Christodoulides, J. Yang, editors. *Parity-time symmetry and its applications*. V. 280 of Springer Tracts in Modern Physics. Springer. 2018.
3. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation* // Phys. Rev. Let. **110**, 064105 (2013).
4. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable discrete PT symmetric model* // Phys. Rev. E. **90**:3, 032912 (2014).
5. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation*// Nonlinearity. **29**:3, 915–946 (2016).
6. M.J. Ablowitz, Z.H. Musslimani. *Integrable nonlocal nonlinear equations* // Stud. Appl. Math. **139**:1, 7–59 (2017).
7. Т.П. Horikis, M.J. Ablowitz. *Rogue waves in nonlocal media* // Phys. Rev. E. **95**:4, 042211 (2017).
8. M.J. Ablowitz, B.F. Feng, X.D. Luo, Z.H. Musslimani. *Reverse space-time nonlocal Sine-Gordon/Sinh-Gordon equations with nonzero boundary conditions* // Stud. Appl. Math. (2018).
9. V.S. Gerdjikov, G.G. Grahovski, R.I. Ivanov. *The N-wave equations with PT symmetry* // Theor. Math. Phys. **188**:3, 1305–1321 (2016).
10. D.Y. Liu, W.R. Sun. *Rational solutions for the nonlocal sixth-order nonlinear Schrödinger equation* // Appl. Math. Lett. **84**, 63–69 (2018).

11. H.Q. Zhang, M. Gao. *Rational soliton solutions in the parity-time-symmetric nonlocal coupled nonlinear Schrödinger equations* // Comm. Nonlin. Sci. and Num. Sim. **63**, 253–260 (2018).
12. Z.X. Zhou. *Darboux transformations and global solutions for a nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **62**, 480–488 (2018).
13. Y. Cao, B. Malomed, J. He. *Two (2+1)-dimensional integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equations: Breather, rational and semi-rational solutions* // Chaos, Solitons and Fractals. **114**, 99–107 (2018).
14. B. Yang, Y. Chen. *Reductions of Darboux transformations for the PT-symmetric nonlocal Davey–Stewartson equations* // Appl. Math. Lett. **82**, 43–49 (2018).
15. Z.J. Yang, S.M. Zhang, X.L. Li, Z.G. Pang. *Variable sinh-Gaussian solitons in nonlocal nonlinear Schrödinger equation* // Appl. Math. Lett. **82**, 64–70 (2018).
16. K. Manikandan, Priya N. Vishnu, M. Senthilvelan, R. Sankaranarayanan. *Deformation of dark solitons in a PT-invariant variable coefficients nonlocal nonlinear Schrödinger equation* // Chaos. **28**:8, 083103 (2018).
17. J. Rao, Y. Zhang, A. Fokas, J. He. *Rogue waves of the nonlocal Davey-Stewartson I equation* // Nonlinearity. **31**:9, 4090–4107 (2018).
18. X.Y. Tang, Z.F. Liang, X.Z. Hao. *Nonlinear waves of a nonlocal modified KdV equation in the atmospheric and oceanic dynamical system* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **60**, 62–71 (2018).
19. K. Chen, X. Deng, S. Lou, D.J. Zhang. *Solutions of nonlocal equations reduced from the AKNS hierarchy* // Stud. Appl. Math. **141**:1, 113–141 (2018).
20. W. Liu, X. Li. *General soliton solutions to a (2+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger equation with zero and nonzero boundary conditions* // Nonlinear Dynamics. **93**:2, 721–731 (2018).
21. P. Vinayagam, R. Radha, U. Al Khawaja, L. Ling. *New classes of solutions in the coupled PT symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equations with four wave mixing* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **59**, 387–395 (2018).
22. Y. Cao, J. Rao, D. Mihalache, J. He. *Semi-rational solutions for the (2+1)-dimensional nonlocal Fokas system* // Appl. Math. Lett. **80**, 27–34 (2018).
23. C. Qian, J. Rao, D. Mihalache, J. He. *Rational and semi-rational solutions of the y-nonlocal Davey–Stewartson I equation* // Computers and Mathematics with Applications. **75**:9, 3317–3330 (2018).
24. M. Gurses, A. Pekcan. *Nonlocal modified KdV equations and their soliton solutions by Hirota method* // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **67**, 427–448 (2019).
25. Q. Zhang, Y. Zhang, R. Ye. *Exact solutions of nonlocal Fokas-Lenells equation* // Appl. Math. Lett. **98**, 336–343 (2019).
26. V.S. Gerdjikov. *On the integrability of Ablowitz-Ladik models with local and nonlocal reductions* // Journal of Physics: Conference Series. **1205**:1, 012015 (2019).
27. B. Yang, J. Yang. *Rogue waves in the nonlocal PT-symmetric nonlinear Schrödinger equation* // Lett. Math. Phys. **109**, 945–973 (2019).
28. J. Yang. *General n-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations* // Phys. Lett. A. **383**, 328–337 (2019).
29. B. Yang, J. Yang. *On general rogue waves in the parity-time-symmetric nonlinear Schrödinger equation* // Preprint, arXiv:1903.06203, 19 pp. (2019).
30. Y. Yang, T. Suzuki, X. Cheng. *Darboux transformations and exact solutions for the integrable nonlocal Lakshmanan-Porsezian-Daniel equation* // Appl. Math. Lett. **99**, 105998 (2020).
31. A.O. Smirnov, E.E. Aman. *The simplest oscillating solutions of nonlocal nonlinear models* // Journal of Physics: Conference Series. **1399**:2, 022020 (2019).
32. A.O. Smirnov, E.E. Aman. *One-phase elliptic solutions of the nonlocal nonlinear equations from AKNS hierarchy and their spectral curves* // Journal of Physics: Conference Series. **1515**:3, 032080 (2020).
33. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Multiphase solutions of nonlocal symmetric reductions of equations of the AKNS hierarchy: general analysis and simplest examples* // Theor. Math. Phys. **204**:3, 1154–1165 (2020).

34. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *AKNS hierarchy, MRW solutions, P_n breathers, and beyond* // J. Math. Phys. **59**:9, 091419 (2018).
35. V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Two-phase periodic solutions to the AKNS hierarchy equations* // J. Math. Sci. **242**:5, 722–741 (2019).
36. A.R. Its, V.P. Kotlyarov. *On a class of solutions of the nonlinear Schrödinger equation* // Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Ser. A (Russian). **11**, 965–968 (1976).
37. V.P. Kotlyarov. *Periodic problem for the nonlinear Schrödinger equation* // Preprint, arXiv:1401.4445, 14pp. (2014).
38. E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its, V.B. Matveev. *Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations*. Springer Ser. Nonlinear Dynamics. Springer. 1994.
39. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems* // Studies in Appl. Math. **53**:4, 249–315 (1974).
40. M. Lakshmanan, K. Porsezian, M. Daniel. *Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain* // Phys. Lett. A. **133**:9, 483–488 (1988).
41. K. Porsezian, M. Daniel, M. Lakshmanan. *On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain* // J. Math. Phys. **33**, 1807–1816 (1992).
42. M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan. *On the integrable models of the higher order water wave equation* // Phys. Lett. A. **174**:3, 237–240 (1993).
43. A.O Smirnov. *Solution of a nonlinear Schrödinger equation in the form of two-phase freak waves* // Theor. Math. Phys. **173**:1, 1403–1416 (2012).
44. A.O Smirnov. *Periodic two-phase “rogue waves”* // Math. Notes. **94**:6, 897–907 (2013).
45. A.O Smirnov., S.G. Matveenko, S.K. Semenov, E.G. Semenova. *Three-phase freak waves* // SIGMA. **11**, 032 (2015).
46. B.A. Dubrovin. *Theta functions and non-linear equations*. Russ. Math. Surv. **36**:2, 11–92 (1981).
47. J.D. Fay. *Theta-functions on Riemann surfaces*. V. 352 of Lect. Notes in Math. Springer. 1973.
48. A. Krazer. *Lehrbuch der Thetafunktionen*. Teubner, Leipzig. 1903.
49. H.F. Baker. *Abel's theorem and the allied theory including the theory of theta functions*. Cambridge. 1897.
50. D. Mumford. *Tata lectures on theta. I*. V. 28 of Progress in Math. Birkhäuser Boston Inc. Boston, MA. 1983.
51. D. Mumford. *Tata lectures on theta. II*. V. 43 of Progress in Math. Birkhäuser Boston Inc. Boston, MA. 1984.
52. A.O. Smirnov. *A matrix analogue of the Appell theorem and reduction of multidimensional Riemann theta-functions* // Math. USSR Sb. **61**:2, 379–388 (1988).

Александр Олегович Смирнов,
 Санкт-Петербургский государственный университет
 аэрокосмического приборостроения,
 ул. Большая Морская, 67А,
 190000, г. Санкт-Петербург, Россия
 E-mail: alsmir@guap.ru

Владимир Борисович Матвеев,
 Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
 Наб. р. Фонтанки, 27,
 191023, г. Санкт-Петербург, Россия
 E-mail: vladimir.matveev9@gmail.com