ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 36-43.

УДК 517.95

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О.В. КАПЦОВ, М.М. МИРЗАОХМЕДОВ

Аннотация. В работе найдены общие решения для некоторых классов линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения описывают колебания стержней, акустические волны, а также к ним сводятся некоторые модели газовой динамики. Для построения общих решений используются специальные типы преобразований Эйлера-Дарбу – преобразования типа Леви. Эти преобразования представляют собой дифференциальные подстановки первого порядка. Для построения каждого преобразования необходимо решать два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка. Решения одного из этих уравнений находятся из решений другого с помощью дифференциальной подстановки и формулы Лиувилля. В общем случае решать эти обыкновенные дифференциальные уравнения не просто. Однако можно указать некоторую формулу суперпозиции преобразований типа Леви.

Стартуя с классического волнового уравнения с постоянными коэффициентами и используя найденные преобразования, можно строить бесконечные серии уравнений, обладающих явными общими решениями. С помощью метода Матвеева получены предельные формы итерированных преобразований. Приводится ряд конкретных примеров уравнений обладающих общими решениями.

Ключевые слова: линейные уравнения с переменными коэффициентами, общие решения, предельные преобразования Леви.

Mathematics Subject Classification: 35C05, 35L10, 35A09

1. Введение

Распространение одномерных волн в неоднородных средах часто описывают уравнением вида

$$v_{tt} = a(bv_x)_x, \tag{1.1}$$

где a, b – гладкие положительные функции от x. Например, в случае звуковых волн функция v задает давление, при этом $a = \rho c^2$, $b = \rho^{-1}$, где ρ – плотность, c – скорость звука в среде [1]. Если же уравнение (1.1) моделирует продольные колебания стержня, то v описывает перемещения стержня, причем $a = \frac{E}{\rho\omega}$, $b = \omega$, где E – модуль Юнга, ρ – плотность, ω – площадь поперечного сечения стержня. Кроме того, с уравнением (1.1) связаны другие модели. Например, систему, описывающую одномерные изэнтропические движения газа [4], можно привести к виду (1.1).

Представляет интерес нахождение общих решений уравнения (1.1) для непостоянных функций a, b. Некоторые примеры таких решений имеются в [5], [3]. Общее решение может

O.V. Kaptsov, M.M. Mirzaokhmedov, General solutions of some linear equations with variable coefficients.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631).

Поступила 3 февраля 2021 г.

быть использовано для решения задачи Коши. Для построения общих решений некоторых уравнений вида
$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0,$$
Лаплас придумал каскадный метод [2]. С другой стороны, Эйлер [6] предложил использовать дифференциальные подстановки для нахождения общих решений уравнений вида
$$u_{tt} = Fu_{xx} + Gu_x + Hu, \tag{1.2}$$
где F, G, H – функции от x. Позднее Дарбу [2] и другие математики в конце XIX и начале XX веков обобщали такие преобразования и применяли их к решению геометрических задач. В последние 40 лет интерес к таким преобразованиям резко возрос в связи с развитием теории солитонов [11], [12], [8].

В данной работе мы используем преобразования Эйлера-Дарбу для нахождения общих решений уравнений
$$u_{tt} = u_{xx} + g(x)u_x, \tag{1.3}$$
для специальных классов функций g. Несложно показать, что точечными преобразованиями уравнение (1.1) приводится к виду (1.3). Мы находим преобразования Эйлера-Дарбу, переводящие решения уравнения (1.2) в решения уравнения (1.2), но с другой функцией g. Стартуя с функции $g = 0$, можно получить бесконечные серии уравнений, для которых удается найти общие решения.

Наша работа расширяет исследования, начатые в [3], используя более общие преобразования. Кроме того, мы строим предельные преобразования, используя идеи Матвеева [11].

2. Преобразования Эйлера-Дарбу

Как известно [6], Эйлер нашел условия, при выполнении которых дифференциальная подстановка первого порядка
$$w = M(u_x + su)$$
переводит решения уравнения (1.2) в решения уравнения
$$w_{tt} = F_1 w_{xx} + G_1 w_x + H_1 w, \tag{2.1}$$
где M, s, F_1, G_1, H_1 – функции от x. Мы приведем немного измененную формулировку этого результата из книги [3], поскольку ее удобнее применять в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть u – решение уравнения (1.2). Тогда подстановка*
$$w = \frac{u_x - (\ln h)_x u}{r} \tag{2.2}$$
переводит функцию u в решение уравнения (2.1), если:

1) функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению
$$Fh'' + Gh' + (H + c)h = 0, \tag{2.3}$$
где r – произвольная гладкая функция от x, c – произвольная константа;

2) F_1, G_1, H_1 задаются формулами
$$F_1 = F, \quad G_1 = G + F' + 2F(\ln r)', \quad H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)''. \tag{2.4}$$

Уравнение (1.1) несложно упростить с помощью замены независимой переменной. Действительно, пусть $v(t, x) = u(t, y(x))$, где $y = y(x)$ новая переменная. Вычисляя производные v_{tt}, v_x, v_{xx} и подставляя их в (1.1), получим уравнение
$$u_{tt} = aby'^2 u_{yy} + (aby'' + ab'y')u_y.$$

Полагая $aby'^2 = 1$, находим
$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{ab}}.$$
Здесь интеграл существует, поскольку функции a, b – гладкие и положительно определенные. Таким образом, уравнение (1.1) заменой приводится к виду
$$u_{tt} = u_{xx} + G(x)u_x. \tag{2.5}$$

Предложение 2.1. *Подстановка (2.2) переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения*
$$w_{tt} = w_{xx} + G_1 w_x, \tag{2.6}$$
если выполнены условия:

1) $h(x)$ удовлетворяет уравнению
$$h'' + Gh' + ch = 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$
2)
$$G_1 = G + 2\Big(\ln \frac{h'}{h}\Big)', \tag{2.8}$$
3) функция r удовлетворяет уравнению
$$r'' + Gr' + \big(G' + 2(\ln h)''\big)r = 0. \tag{2.9}$$

Это предложение следует из леммы 2.1. Чтобы получить (2.9), нужно положить $H_1 = H = 0$ в формуле (2.4).

Предложение 2.2. *Подстановка*
$$r = \frac{h'}{h} \tag{2.10}$$
переводит решения уравнения (2.7) в решения уравнения (2.9). Подстановка
$$w = u - \frac{h}{h'}u_x \tag{2.11}$$
переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения (2.6).

Доказательство проводится прямой подстановкой (2.10) в (2.9). При этом следует учитывать уравнение (2.7) и его дифференциальные следствия.

Замечание 2.1. *Подстановка типа (2.11) называется преобразованием Леви в теории сопряженных сетей* [7]. *Отметим, что, зная общее решение уравнения (2.7), мы не получим общего решения уравнения (2.9). Общее решение находится по известной формуле Лиувилля.*

Пример 1. Пусть функция G в (2.5) равна нулю. Тогда в зависимости от выбора константы c, мы получим три типа решений уравнения (2.7):

1) при $c = 0$ функция h – линейная, т.е.
$$h = c_1 x + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
2) при $c = -k^2 < 0$ решение
$$h = c_1 \exp(kx) + c_2 \exp(-kx), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
3) при $c = k^2 > 0$ функция h равна
$$h = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx).$$

Рассмотрим первый вариант. В этом случае общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$r = \frac{d_1}{x+b} + d_2(x+b)^2, \qquad d_1, d_2 \in R, \qquad b = \frac{c_2}{c_1}.$$

Значит, согласно (2.8), получаем

$$G_1 = \frac{4m(x+b)^3 - 2}{(x+b)(m(x+b)^3+1)}, \qquad m = \frac{d_2}{d_1}.$$

Следовательно, в соответствии с предложением 2.1, общее решение уравнения (2.6) в данном случае имеет вид

$$w = \frac{(x+b)u_x + u}{d_1 + d_2(x+b)^3},$$

где $u = X(x+t) + T(x-t)$, а X, T – произвольные гладкие функции.

Кратко остановимся на втором варианте. В этом случае два решения уравнения (2.9) выглядят так

$$r_1 = k\frac{\exp(kx) - b\exp(-kx)}{\exp(kx) + b\exp(-kx)}, \qquad r_2 = \frac{kx(\exp(2kx) - b) - 2b}{\exp(2kx) + b}, \qquad b = \frac{c_2}{c_1}.$$

Функция G_1 находится по формуле (2.8) и при $r = r_1$ имеет вид

$$G_1 = \frac{8bk\exp(2kx)}{b^2\exp(4kx) - 1}.$$

Общее решение уравнения (2.6), с данной функцией G_1, находится с помощью подстановки (2.2) и имеет вид

$$w = X + T - \frac{(X' + T')(\exp(kx) + b\exp(-kx))}{k(\exp(kx) - b\exp(-kx))}, \tag{2.12}$$

где $X(x+t)$, $T(x-t)$ – произвольные гладкие функции, штрих означает производную. Очевидно, при $b < 0$ решение (2.12) является гладким. Аналогичным образом рассматривается третий вариант.

В [3] получена лемма о последовательности преобразований типа Леви.

Лемма 2.2. *Пусть $h_1, \ldots, h_n$ – линейно независимые решения уравнения (2.7), соответствующие параметрам $c_1, \ldots, c_n$ (причем $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$). Тогда преобразование*

$$z = \frac{W(u, h_1, \ldots, h_n)}{W(h_1', \ldots, h_n')}, \tag{2.13}$$

где W – вронскиан, переводит решения уравнения (2.5) в решения уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + G_n z_x, \tag{2.14}$$

при этом функция G_n задается формулой

$$G_n = G + 2\frac{d}{dx}\Big(\ln\frac{W(h_1', \ldots, h_n')}{W(h_1, \ldots, h_n)}\Big). \tag{2.15}$$

В [3] можно найти примеры, относящиеся к этой лемме. В работе [9] изучалась последовательность Леви, возникающая в теории сопряженных сетей.

3. Предельные преобразования и примеры

В лемме 2.2 о последовательности преобразований типа Леви предполагалось, что функции h_i соответствуют попарно различным параметрам c_i. Здесь мы рассмотрим случай совпадающих параметров. Будем далее иногда использовать обозначения ∂_x, ∂_k для операторов дифференцирования по x и k соответственно. Стандартные обозначения для производных мы тоже продолжим применять.

Лемма 3.1. *Пусть $h(x,k)$ – решение уравнения*

$$h'' + gh' - k^2 h = 0, \tag{3.1}$$

где g – гладкая функция от x, $k \in \mathbb{R}$. Тогда преобразование

$$z = \frac{W(u, h, \partial_k h, \dots, \partial_k^m h)}{W(\partial_x h, \partial_k \partial_x h, \dots, \partial_k^m \partial_x h)} \tag{3.2}$$

переводит решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + g u_x, \tag{3.3}$$

в решения уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + g_{m+1} z_x, \tag{3.4}$$

где функция g_{m+1} задается формулой

$$g_{m+1} = g + 2\partial_x \Big(\ln \frac{W(\partial_x h, \partial_k \partial_x h, \dots, \partial_k^m \partial_x h)}{W(h, \partial_k h, \dots, \partial_k^m h)} \Big). \tag{3.5}$$

Доказательство. Мы будем использовать в рассуждениях идеи работы Матвеева [10]. Для упрощения рассмотрим случай $m = 1$. Пусть $h(x,k)$ – решение уравнения (3.1). Введем обозначения: $h^1 = h(x, k_1)$, $h^2 = h(x, k_2)$. Согласно формуле Тейлора имеем

$$h^2 = h^1 + \varepsilon \partial_k h^1 + o(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = k_2 - k_1$, $o(\varepsilon)$ – символ Ландау.

Далее мы хотим перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в формулах (2.13), (2.15). Вронскиан $W(u, h^1, h^2)$ записывается следующим образом

$$\begin{aligned} W(u,h^1,h^2) &= \begin{vmatrix} u & h^1 & h^1 + \varepsilon\partial_k h^1 + o(\varepsilon) \\ u_x & h^1_x & h^1_x + \varepsilon \partial_k h^1_x + o_x(\varepsilon) \\ u_{xx} & h^1_{xx} & h^1_{xx} + \varepsilon\partial_k h^1_{xx} + o_{xx}(\varepsilon) \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} u & h^1 & \partial_k h^1 + o \\ u_x & h^1_x & \partial_k h^1_x + o_x \\ u_{xx} & h^1_{xx} & \partial_k h^1_{xx} + o_{xx} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon W(u, h^1, \partial_k h^1 + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается формула

$$W(h^1_x, h^2_x) = \varepsilon W(\partial_x h^1, \partial_k \partial_x h^1 + o(\varepsilon)).$$

Следовательно, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{W(u,h^1,h^2)}{W(h^1_x, h^2_x)} = \frac{W(u, h^1, \partial_k h^1)}{W(\partial_x h^1, \partial_k \partial_x h^1)}.$$

Точно также из формулы (2.15) получаем выражение (3.5). Конечно можно проверить справедливость леммы 3.1 при $m = 1$ прямыми вычислениями. □

Замечание 3.1. *Можно получить более общее утверждение, чем лемма 3.1, аналогичное утверждению из* [10]. *Оно отвечает случаю, когда не все константы c_i в лемме 2.2 совпадают. Рассуждения примерно такие же, как и выше, но формулы становятся более громоздкими.*

Пример 2. Пусть $g = 0$, $k \neq 0$, $m = 1$. Тогда решение уравнения (3.1) имеет вид

$$h = a_1 \operatorname{sh}(kx) + a_2 \operatorname{ch}(kx). \tag{3.6}$$

Для упрощения формул будем считать $a_2 = 0$. Тогда, согласно (3.5), функция g_2 равна

$$g_2 = -\frac{2k(4kx \operatorname{ch}^2(kx) - \operatorname{sh}(2kx) - 2kx)}{\operatorname{ch}^2(kx)\operatorname{sh}^2(kx) - k^2x^2}. \tag{3.7}$$

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$z = \frac{(\operatorname{ch}(kx)\operatorname{sh}(kx) - kx)g'' + (-2k\operatorname{ch}^2(kx) + 2k)g' + \cdots + k(k^2xf - xf'' + 2f')}{k^2(\operatorname{ch}(kx)\operatorname{sh}(kx) + kx)}. \tag{3.8}$$

Здесь $f(x+t)$, $g(x-t)$ – произвольные гладкие функции. В формуле (3.7) и решении (3.8) можно перейти к пределу при $k \to 0$. Тогда

$$g_2 \xrightarrow[k\to 0]{} \tilde{g}_2 = -\frac{4}{x}, \qquad z \xrightarrow[k\to 0]{} \tilde{z} = \frac{1}{3}(f'' + g'')x^2 - (f' + g')x + f + g.$$

Пусть теперь $m = 2$. Выражения для g_3 и z будут громоздкими, но они легко вычисляются с помощью систем компьютерной алгебры. Однако, если перейти к пределу при $k \to 0$ в формулах для g_3 и z, то получим

$$g_3 = -\frac{6}{x}, \qquad z = -\frac{1}{15}(f''' + g''')x^3 + \frac{2}{5}(f'' + g'')x^2 - (f' + g')x + f + g.$$

Можно выполнить обратный переход от уравнения (1.3) к уравнению (1.1) с помощью преобразования независимой переменной. Действительно, пусть $u(t,x) = v(t, y(x))$. Тогда, подставляя производные

$$u_{tt} = v_{tt}, \qquad u_x = y'v_y, \qquad u_{xx} = y'^2 v_{yy} + y'' v_y$$

в (1.3), получаем

$$v_{tt} = y'^2 v_{yy} + \Big(y'' + gy'\Big) v_y.$$

Сравнивая с (1.1), приходим к системе

$$ab = y'^2, \qquad ab_y = y'' + gy', \tag{3.9}$$

где a, b – функции от y, g – функция от x. Выражая a из первого уравнения (3.9) и подставляя во второе, получаем

$$\frac{b_y}{b} = \frac{y'' + gy'}{y'^2}. \tag{3.10}$$

Если выбрать функции $y(x)$, $g(x)$ и затем выразить правую часть (3.10) через y, то получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции b. Решая его, находим b, а затем $a(y)$.

Пример 3. Пусть $g = -\frac{2}{x}$, $y = \operatorname{cth}(x)$. Тогда уравнение на функцию b

$$b_y = \frac{2(2\operatorname{cth}^2(y) - 1)}{\operatorname{cth}(y)} b$$

имеет решение

$$b = A\frac{\operatorname{sh}^4(y)}{\operatorname{ch}^2(y)}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция a имеет вид

$$a = \frac{\operatorname{ch}^2(y)}{A}.$$

Как отмечалось ранее, общее решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{2}{x} u_x$$

записывается в виде

$$u = xV_x - V,$$

где $V = f_1(x+t) + f_2(x-t)$, f_1, f_2 – произвольные гладкие функции. Следовательно, общее решение уравнения

$$v_{tt} = \mathrm{ch}^2(y)\Big(\frac{\mathrm{sh}^4(y)}{\mathrm{ch}^2(y)} v_y\Big)_y$$

имеет вид

$$v = \mathrm{cth}(y)\big(f_1'(\mathrm{cth}(y)+t) + f_2'(\mathrm{cth}(y)-t)\big) - \Big(f_1(\mathrm{cth}(y)+t) + f_2(\mathrm{cth}(y)-t)\Big).$$

Пример 4. Пусть $g = 2/x$, $y = \mathrm{cth}(x)$. Тогда уравнение на функцию b

$$b_y = \frac{2b}{\mathrm{cth}(y)},$$

имеет решение

$$b = \frac{\mathrm{ch}^2(y)}{A}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция a имеет вид

$$a = A\frac{\mathrm{sh}^4(y)}{\mathrm{ch}^2(y)}.$$

Как отмечалось ранее, общее решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2}{x} u_x$$

записывается в виде

$$u = \frac{f_1(x+t) + f_2(x-t)}{x},$$

где f_1, f_2 – произвольные гладкие функции. Следовательно, общее решение уравнения

$$v_{tt} = \frac{\mathrm{sh}^4(y)}{\mathrm{ch}^2(y)}\Big(\mathrm{ch}^2(y) v_y\Big)_y$$

имеет вид

$$v = \frac{f_1(\mathrm{cth}(y)+t) + f_2(\mathrm{cth}(y)-t)}{\mathrm{cth}(y)}.$$

Пример 5. Пусть теперь $g = 2/\mathrm{sh}(x)$, $y = \exp(x)$. Тогда функция имеет вид

$$b = A\frac{y(y-1)^2}{(y+1)^2}, \tag{3.11}$$

где A – произвольная константа. В этом случае функция a задается формулой

$$a = \frac{y(y+1)^2}{A(y-1)^2}. \tag{3.12}$$

Общее решение (1.3) с данной функцией g задается формулой (2.12). Подставляя $x = \ln y$ и найденные значения a, b, получаем общее решение уравнения (1.1) с функциями (3.11), (3.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.М. Бреховских. *Волны в слоистых средах.* М.: Наука. 1973.
2. Ж. Дарбу. *Лекции по общей теории поверхностей.* Т.2. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2013.
3. О.В. Капцов. *Методы интегрирования уравнений с частными производными.* М: Физматлит. 2009.
4. Л.В. Овсянников. *Лекции по основам газовой динамики.* М.: Наука. 1981.
5. А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики.* М: Физматлит. 2002.
6. Л. Эйлер. *Интегральное исчисление.* Т.3, М: ГИФМЛ. 1958.
7. L. Eisenhart. *Transformations of surfaces.* Chelsea Publ., Princeton. 1962.
8. C. Gu, H. Hu, Z. Zhou. *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry.* Springer, New York. 2005.
9. E.S. Hammond. *Periodic conjugate nets* // Ann. Math. **22**:4, 238—261 (1921).
10. V.B. Matveev. *Generalized Wronskian formula for solutions of the KdV equations: first applications* // Phys. Lett. A. **166**:3, 205–208 (1992).
11. V.B. Matveev, M.A. Salle. *Darboux transformations and solitons.* Springer-Verlag, New York. 1991.
12. C. Rogers, W.K. Schief. *Backlund and Darboux Transformations Geometry and Modern Applications in Soliton Theory.* Cambridge University Press, Cambridge. 2002.

Олег Викторович Капцов,
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44,
660036, г. Красноярск, Россия
E-mail: `kaptsov@icm.krasn.ru`

Мансур Мавлонович Мирзаохмедов,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79,
660041, г. Красноярск, Россия
E-mail: `mansur.mirzoahmedov@mail.ru`