ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 18-24.

УДК 517.958

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПОЛУДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ЦИЦЕЙКИ

Р.Н. ГАРИФУЛЛИН

Аннотация. В работе рассматривается полудискретная версия уравнения Цицейки

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} + (e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}},$$

найденная в недавней статье [R.N. Garifullin and I.T. Habibullin 2021 J. Phys. A: Math. Theor. 54 205201]. Было показано, что это уравнение имеет высшие симметрии по дискретному и непрерывному направлению. Эти высшие симметрии являются уравнениями типа Савады-Котеры и дискретной Савады-Котеры. В этой работе мы строим пару Лакса для этого уравнения и его высших симметрий. Найденная пара Лакса выписывается в терминах матриц порядка 3×3 и свидетельствует об интегрируемости найденных уравнений. Для решения этой задачи используется известная связь одной из высших симметрий с хорошо исследованным уравнением Каупа–Купершмидта. Найденные пары Лакса помогут в дальнейших исследованиях этого уравнения – нахождение его законов сохранения, операторов рекурсии и широких классов решений. Кроме того выписаны два представления Лакса в виде скалярных операторов. Первое скалярное представление выписывается по степеням оператора дифференцирования по непрерывной переменной x, второе – по степеням оператора сдвига по дискретной переменной n.

Ключевые слова: интегрируемость, пары Лакса, высшие симметрии, уравнение Цицейки.

Mathematics Subject Classification: 39A14, 39A10, 35L10

1. Введение

В недавней статье [1] было найдено дифференциально-разностное уравнение

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + \lambda_1(e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \lambda_2\sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}}. \tag{1.1}$$

Здесь неизвестная функция $u_n(x)$ зависит от одной целочисленной переменной $n \in \mathbb{Z}$ и одной непрерывной x; λ_1, λ_2 – ненулевые параметры, без ограничения общности их можно считать равными 1. Через $u_{n,x}$ здесь и ниже обозначаются производные по переменной x. Аналогичным образом будем обозначать производные по t и τ: $u_{n,t},\ u_{n,\tau}$.

Уравнение (1.1) в континуальном пределе, очевидно, переходит в знаменитое уравнение Цицейки [2]

$$U_{xy} = ae^{-2U} + be^{U},$$

которое было переоткрыто в работе А.В. Жибера и А.Б. Шабата [3]. Уравнение (1.1) является представителем класса уравнений вида

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n, x). \tag{1.2}$$

R.N. Garifullin, On integrability of semi-discrete Tzizeica equation.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/.

Поступила 25 апреля 2021 г.

Интегрируемые уравнения такого типа возникали как преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений в частных производных эволюционного типа. Наиболее известным представителем этого класса является одевающая цепочка, подробное исследование которой проведено в статье А.П. Веселова и А.Б. Шабата [4]

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + u_{n+1}^2 - u_n^2, \tag{1.3}$$

которая возникла как преобразование Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза:

$$u_{n,t} = u_{n,xxx} - 6u_n^2 u_{n,x}. \tag{1.4}$$

С другой стороны уравнение (1.4) можно рассматривать как высшую симметрию уравнения (1.3). По дискретному направлению высшая симметрия уравнения (1.3) имеет вид

$$u_{n,\tau} = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{1.5}$$

и является известным дифференциально-разностным уравнением [5], [6]. В статье Р.И. Ямилова [7] был приведен ряд примеров троек уравнений типа (1.3)–(1.5).

Рассматриваемое в данной статье уравнение (1.1) является первым примером, у которого высшие симметрии по обоим направлениям имею не третий, а пятый порядок:

$$\begin{aligned}\partial_t u_0 =& u_{0,5} + 5u_{0,3}(u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_2^2 e^{2u} - \lambda_1^2 e^{-4u}) - 5u_{0,2}^2 u_{0,1} \\ &- 15u_{0,2}u_{0,1}(\lambda_2^2 e^{2u} - 4\lambda_1^2 e^{-4u}) + u_{0,1}^5 - 90\lambda_1^2 u_{0,1}^3 e^{-4u} + 5u_{0,1}(\lambda_2^2 e^{2u} + \lambda_1^2 e^{-4u})^2,\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\partial_\tau u =& \Big((v^2-1)^2 - 4v_{-1}^2 T^{-1}\Big)\frac{(v_1^2+1)(v_{-1}^2+1)}{(v^2(v_{-1}+1)^2 + (v_{-1}-1)^2)(v_1(v+1)^2 + (v-1)^2)}, \\ v_n =& \sqrt{1 + e^{2(u_n - u_{n+1})}} + e^{u_n - u_{n+1}},\end{aligned} \tag{1.7}$$

где T – оператор сдвига по дискретной переменной n. Здесь и ниже используются обозначения $u = u_n$, $u_k = u_{n+k}$, $v_k = v_{n+k}$, $u_{k,m} = \frac{d^m u_{n+k}}{dx^m}$. Под порядком эволюционного уравнения понимается количество производных по пространственной переменной или количество сдвигов u_{n+i} в правой части.

Уравнение (1.6) было известно ранее [8], а уравнения (1.1) и (1.7) были впервые приведены в статье [1]. В этой работе мы находим пары Лакса для всех этих трех уравнений. Пары Лакса для интегрируемых уравнений являются одним из самых важных атрибутов. Во-первых, их наличие является наиболее признанным критерием интегрируемости. Во-вторых, пары Лакса помогают в исследованиях уравнений – нахождение их законов сохранения, высших симметрий, операторов рекурсии и широких классов решений.

2. Нахождение пар Лакса

Найти сразу пару Лакса для уравнения (1.1) представляется сложной задачей. Для ее решения надо сразу искать два неизвестных линейных оператора или две матрицы, для которых априори не известна структура зависимостей от переменных. Поэтому в начале предлагается найти пару Лакса для известного уравнения (1.6), для которого, более того, известны преобразования типа Миуры к хорошо исследованному уравнению.

2.1. Пара Лакса для уравнения (1.6)**.** Для решения этой задачи мы используем известную связь [8]

$$w = -u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u} - \lambda_2^2 e^{2u} \tag{2.1}$$

между уравнением (1.6) и уравнением Каупа–Купершмидта [9]

$$w_t = w_5 + 10ww_3 + 25w_x w_2 + 20w^2 w_x. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет представление Лакса [9], [10]

$$\widetilde{L}_t = [\widetilde{L}, \widetilde{A}], \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{L} = \partial^3 + 2w\partial + w_x, \\ &\widetilde{A} = 9(\widetilde{L}^{5/3})_+ = 9\partial^5 + 30w\partial^3 + 45w_x\partial^2 + 5(4w^2 + 7w_2)\partial + 10(w_3 + 2ww_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь ∂ обозначает оператор дифференцирования по x, обозначение $()_+$ определяет положительную часть формального ряда по степеням оператора ∂.

Если мы в представление Лакса (2.4) подставим замену (2.1), то полученные операторы будут конечно же совместны на решениях (1.6), но из их условия совместности (2.3) не будет следовать уравнение (1.6), а будет следовать некоторое дифференциальное следствие этого уравнения. Для получения настоящего представления Лакса уравнения (1.6) нужно заметить, что оператор $\widetilde{L}$ в переменной u допускает следующую факторизацию:

$$\widetilde{L} = \left(\partial - u_{0,1} + \lambda_1 e^{-2u}\right)\left(\partial^2 + (u_{0,1} - \lambda_1 e^{-2u})\partial + u_{0,2} + 2\lambda_1 u_{0,1} e^{-2u} - \lambda_2^2 e^{2u}\right) + \lambda_1\lambda_2^2.$$

Тогда в качестве оператора L для уравнения (1.6) можно использовать оператор

$$L = \left(\partial^2 + (u_{0,1} - \lambda_1 e^{-2u})\partial + u_{0,2} + 2\lambda_1 u_{0,1} e^{-2u} - \lambda_2^2 e^{2u}\right)\left(\partial - u_{0,1} + \lambda_1 e^{-2u}\right) + \lambda_1\lambda_2^2. \tag{2.5}$$

Оператор A приобретает вид:

$$\begin{aligned} A =& 9(L^{5/3})_+ = 9\partial^5 - 15(u_{0,2} + u_{0,1}^2 + \lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u})\partial^3 - 15(2u_{0,3} + 4u_{0,2}u_{0,1} \\ &- 8\lambda_1^2 u_{0,1} e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u} u_{0,1})\partial^2 - 5\big(5u_{0,4} + 10u_{0,3}u_{0,1} - 2u_{0,2}u_{0,1}^2 + 9u_{0,2}^2 - u_{0,1}^4 \\ &- (\lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u})^2 + 2\lambda^2(39u_{0,2} - 11u_{0,1}^2)e^{-4u} - u_{0,2}\lambda_2^2 e^{2u}\big)\partial - 10\big(u_{0,5} + 2u_{0,1}u_{0,4} \\ &+ 5u_{0,2}u_{0,3} - u_{0,1}^2 u_{0,3} - 2u_{0,1}u_{0,2}^2 - 2u_{0,1}^3 u_{0,2} - \lambda_2^2 e^{2u}(2u_{0,3} + 7u_{0,2}u_{0,1} + 3u_{0,1}^3) \\ &- 5\lambda_1^2 e^{-4u}(u_{0,3} - 10u_{0,2}u_{0,1} + 12u_{0,1}^3) + u_{0,1}(4\lambda_1^4 e^{-8u} + 5\lambda_1^2\lambda_2^2 e^{-2u} + \lambda_2^4 e^{4u})\big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.6) *эквивалентно представлению Лакса*

$$L_t = [L, A], \tag{2.7}$$

где операторы L и A определены выражениями (2.5) *и* (2.6).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что на решениях (1.6) уравнение (2.7) выполняется.

Для проверки обратного утверждения заметим, что коэффициенты

$$l_1 = -u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u} + \lambda_2^2 e^{2u}$$

и l_0 оператора L при соответствующих степенях оператора ∂ связаны соотношением:

$$l_0 = \partial l_1 + 3u_{0,1}\lambda_2^2 e^{2u}.$$

Поэтому из (2.7) находятся выражения для $\partial_t(l_1)$ и $\partial_t(u_{0,1}e^{2u})$. Комбинируя их, можно однозначно выразить u_t, получив уравнение (1.6). □

2.2. Пара Лакса для уравнения (1.1)**.** Уравнение (1.1) должно иметь представление Лакса

$$(TL)M - ML = 0, \tag{2.8}$$

с некоторым оператором M, где T – оператор сдвига по дискретной переменной n. Однако, нам априори не известен ни способ нахождения оператора M, ни его порядок и структура зависимости его коэффициентов. Поэтому вместо поиска этого оператора предлагается перейти к матричной форме записи операторов L и A, для которых понятно как искать матричную запись оператора M. Для этого вводится скалярная функция P и спектральный параметр λ и выписываются две линейные задачи

$$LP = \lambda P, \quad P_t + AP = 0, \tag{2.9}$$

условие совместности которых эквивалентно уравнению (1.6). Эти две задачи можно переписать в матричном виде

$$\frac{dV}{dx} = \mathcal{L}V, \quad \frac{dV}{dt} = \mathcal{A}V. \tag{2.10}$$

Здесь V – некоторая вектор-функция, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ – некоторые матрицы. Оператор L имеет третий порядок, поэтому матрицы должны иметь размер 3×3. Выбирая вектор-функцию V, можно найти матрицы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$, соответствующие скалярным операторам L и A. Матрица $\mathcal{L}$, соответствующая оператору L, имеет наиболее простой вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^{-2u} & 0 & -e^u \\ 0 & \lambda_1 e^{-2u} & e^u \\ \frac{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1} e^u & \frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1} e^u & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

для вектор-функции:

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 P - e^{2u} P_x \\ \lambda_1 P + e^{2u} P_x \\ e^u P_{xx} + 2u_{0,1} e^u P_x - \lambda_1^2 e^{-3u} P \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{A}$, соответствующая оператору A, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = &\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \frac{9\lambda(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1} & \mathcal{A}_{13} \\ -\frac{9\lambda(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1} & -\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_{11} = &\frac{(3\lambda + 2\lambda_1\lambda_2^2)(3\lambda - \lambda_1\lambda_2^2)}{2\lambda_1} e^{2u} - 3\lambda(u_{0,2} + u_{0,1}^2) - \lambda_1^2(3\lambda + 2\lambda_1\lambda_2^2)e^{-4u} \\
&+ \lambda_1(2u_{0,4} + 4u_{0,3}u_{0,1} + 3u_{0,2}^2 - 2u_{0,2}u_{0,1}^2 - u_{0,1}^4)e^{-2u} - 10\lambda_1^3(u_{0,2} - 3u_{0,1}^2)e^{-6u} \\
&- \lambda_1\lambda_2^2(7u_{0,2} + 12u_{0,1}^2) - \lambda_1^5 e^{-10u}, \\
\mathcal{A}_{13} = &-((9\lambda + 12\lambda_1\lambda_2^2)u_{0,1} + u_{0,4} - u_{0,3}u_{0,1} + 3u_{0,2}^2 - 4u_{0,2}u_{0,1}^2 + u_{0,1}^4)e^u \\
&- \lambda_1(9\lambda - 3u_{0,3} - 6u_{0,2}u_{0,1} + 2\lambda_1\lambda_2^2)e^{-u} + 2\lambda_1^2(u_{0,2} - 15u_{0,1}^2)e^{-3u} \\
&- 12\lambda_1^3 u_{0,1} e^{-5u} - \lambda_1^4 e^{-7u} + 5\lambda_2^2 u_{0,2} e^{3u} - \lambda_2^2 e^{5u}, \\
\mathcal{A}_{23} = &-\mathcal{A}_{13} + 6\lambda_1((u_{0,3} + 2u_{0,2}u_{0,1} - 3\lambda)e^{-u} - 4u_{0,1}(\lambda_1^2 e^{-5u} + \lambda_2^2 e^u)), \\
\mathcal{A}_{31} = &\frac{\lambda - \lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}(\mathcal{A}_{23} + 18\lambda(\lambda_1 e^{-u} - u_{0,1}e^u)), \\
\mathcal{A}_{32} = &-\frac{\lambda + \lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1}(\mathcal{A}_{13} + 18\lambda(\lambda_1 e^{-u} + u_{0,1}e^u)), \\
\mathcal{A}_{33} = &3\lambda(2u_{0,2} + 2u_{0,1}^2 + 2\lambda_1^2 e^{-4u} - \lambda_2^2 e^{2u}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Условие совместности матричных линейных задач (2.10)

$$\mathcal{L}_t - \mathcal{A}_x + [L, A] = 0$$

эквивалентно уравнению (1.6).

Теперь можно перейти к построению пары Лакса для уравнения (1.1). Для этого у нас уже есть одна линейная задача по переменной x, см. (2.10), и осталось найти матрицу $\mathcal{M}$, определяющую сдвиг вектор-функции V:

$$V_{n+1} = \mathcal{M}V_n. \tag{2.13}$$

Поскольку матрица $\mathcal{L}$ зависит только от $u_{n,0}$, то матрица $\mathcal{M}$ должна зависеть от переменных $u_{n,0},\ u_{n+1,0}$. Условие совместности имеет вид:

$$\mathcal{M}_x + \mathcal{M}\mathcal{L} - (T\mathcal{L})\mathcal{M} = 0. \tag{2.14}$$

Оно должно выполняться в силу уравнения (1.1). Матрица $\mathcal{M}$ находится из этого требования и имеет вид:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)(e^{u_1-u}+e^{u-u_1}) & (\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)e^{u-u_1} & 2e^{u-u_1}\lambda_1\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1} \\ -(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)e^{u_1-u} & 0 & 0 \\ -(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1} & 0 & \lambda-\lambda_1\lambda_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие совместности (2.14) с приведенными матрицами $\mathcal{L},\ \mathcal{M}$ эквивалентно полудискретному уравнению Цицейки (1.1):

Теорема 2.2. *Пара Лакса для полудискретного уравнения Цицейки имеет вид* (2.14) *с матрицами* (2.11) *и* (2.15).

После нахождения матрицы $\mathcal{M}$ также можно выписать оператор M для условия совместности (2.8):

$$M = (\partial + \lambda_2\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}})(\partial^2 - u_{0,2} - u_{0,1}^2 - \lambda_1^2 e^{-4u}). \tag{2.16}$$

2.3. Пара Лакса для уравнения (1.7)**.** Осталось найти матрицу $\mathcal{B}$, определяющую линейную задачу по τ:

$$\frac{dV}{d\tau} = BV. \tag{2.17}$$

В этом случае условие совместности

$$\mathcal{M}_\tau + \mathcal{M}\mathcal{B} - T(\mathcal{B})\mathcal{M} = 0 \tag{2.18}$$

должно выполняться в силу уравнения (1.7). Матрица $\mathcal{B}$ находится из этого условия:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_{22}-\mathcal{B}_{33} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{23} \\ \mathcal{B}_{31} & \mathcal{B}_{32} & \mathcal{B}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{12} = -\frac{2(v_1^2+1)(v_0^2-1)^2(v_{-1}^2+1)}{Z_0Z_1}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}+1\right),$$

$$\mathcal{B}_{13} = -\frac{2\lambda_1\lambda_2(v_0^2-1)(v_{-1}^2+1)}{(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} + \frac{4\lambda_1\lambda_2 v_{-1}(v_0^2-1)^2)(v_1^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0Z_1},$$

$$\mathcal{B}_{21} = -\frac{8(v_0^2+1)(v_{-2}^2+1)v_{-1}^2}{Z_0Z_{-1}}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}-1\right),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{22} = &-\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{3}\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}\right) + \frac{2\lambda_1\lambda_2^2(v_0^2+1)(v_{-1}^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} \\ &+ \frac{(v_0-1)^2v_{-1}^2+5v_0^2-2v_0+5}{Z_0} + \frac{4v_0(v_0-1)^2(v_{-1}^2+1)}{Z_0Z_1} \\ &- \frac{4(2v_{-1}^2v_{-2}+(v_{-2}-1)^2)(v_0^2+1)}{Z_0Z_{-1}},\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{23} = \frac{8\lambda_1\lambda_2 v_{-1}^2(v_0^2-1)(v_{-2}^2+1)}{(\lambda+\lambda_1\lambda_2^2)Z_{-1}Z_0} - \frac{4\lambda_1\lambda_2 v_{-1}(v_0^2+1)}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_n},$$

$$\mathcal{B}_{31} = -\frac{2\lambda_2(v_0^2+1)v_{-1}}{Z_0}\left(\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}-1\right) - \frac{4(v_0^2-1)(v_{-2}^2+1)v_{-1}}{Z_{-1}Z_0},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{32} =& -\frac{2(v_{-1}^2+1)(v_0^2-1)\lambda_1\lambda_2^2}{(\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)Z_0} + \frac{2\lambda_2(2v_{-1}(v_0^2-v_0+1)+(v_{-1}-1)^2)}{Z_0} - \lambda_2 \\
&+ \frac{8\lambda_2 v_{-1}v_0(v_0-1)^2}{Z_0Z_1}, \\
\mathcal{B}_{33} =& -\frac{2}{3}\lambda_1\lambda_2^2\left(1-\frac{6(v_0^2-1)v_{-1}}{Z_n}\right)\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}\right), \\
Z_n =&(v_{n-1}+1)^2v_n^2+(v_{n-1}-1)^2, \quad v_n = \sqrt{1+e^{2(u_n-u_{n+1})}}+e^{u_n-u_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Однако, условие совместности (2.18) с построенными матрицами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ не является эквивалентным дифференциально-разностному уравнению (1.7). Оно позволяет только найти $(u_1-u_0)_\tau$. Для получения матриц, которые давали бы эквивалентное уравнению (1.7) условие совместности, надо использовать калибровочное преобразование, например с матрицей $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие преобразования соответствуют линейной замене вектор-функции V вида $V=\mathcal{T}U$, при такой замене соответствующие матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ преобразуются по известным формулам.

Теорема 2.3. *Пара Лакса для дифференциально-разностного уравнения* (1.7) *имеет вид* (2.14) *с матрицами* $\mathcal{T}_{n+1}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{B}\mathcal{T}-\mathcal{T}_\tau)$.

Замечание 2.1. *Зная матрицу* $\mathcal{B}$, *также можно выписать оператор* B, *однако он будет нелокальным из-за наличия спектрального параметра в знаменателях элементов матрицы* $\mathcal{B}$.

2.4. Представление операторов через оператор сдвига T. В заключительной части работы выпишем операторы $\hat{M}$ и $\hat{L}$ через оператор сдвига T. Для этого возьмем вектор-функцию в виде

$$V = (\lambda-\lambda_1\lambda_2^2)^n e^u \begin{pmatrix} -TP \\ P \\ \frac{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2\sqrt{e^{2u_1-2u}+1}}\left(-\frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}P+(e^{2u_1-2u}+1)TP-e^{2u_1-2u}T^2P\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда в векторном соотношении $TV=\mathcal{M}V$ два равенства выполнены автоматически, а третье дает линейное разностное уравнение на функцию P:

$$\left((T-1)\frac{e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}+\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}T\right)\Lambda P + \left((T-1)\frac{e^{2u_1}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}-\sqrt{e^{2u_2}+e^{2u_1}}\right)T^2P = 0,$$

где $\Lambda = \frac{\lambda+\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda-\lambda_1\lambda_2^2}$ – новый спектральный параметр. Отсюда, выражая формально ΛP, получаем оператор $\hat{M}$ в нелокальном виде:

$$\hat{M} = \left((T-1)\frac{e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}+\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}T\right)^{-1}\left((T-1)\frac{e^{2u_1}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^{2u}}}-\sqrt{e^{2u_2}+e^{2u_1}}\right)T^2.$$

Оператор $\hat{L}$ находится из соотношения $\frac{dV}{dx}=\mathcal{L}V$, вторая компонента которого имеет вид:

$$\frac{dP}{dx} = \left(\lambda_1 e^{-2u} - u_{0,1} + \frac{\lambda_2 e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1}+e^u}}\right)P - \frac{\lambda_2}{\Lambda-1}\frac{e^{2u}P-(e^{2u_1}+e^{2u})TP+e^{2u_1}T^2P}{\sqrt{e^{2u_1}+e^u}}.$$

Оператор $\hat{L}$ определяет оператор дифференцирования и имеет вид:

$$\hat{L} = \left(\lambda_1 e^{-2u} - u_{0,1} + \frac{\lambda_2 e^{2u}}{\sqrt{e^{2u_1} + e^u}}\right) - \lambda_2 \frac{(T-1)e^{2u}(T-1)}{\sqrt{e^{2u_1} + e^u}}(\hat{M} - 1)^{-1}. \quad (2.19)$$

Условие совместности операторов $\hat{M}$ и $\hat{L}$ имеет вид:

$$\frac{d\hat{M}}{dx} + [\hat{M}, \hat{L}] = 0.$$

Оно эквивалентно уравнению (1.1). Эти операторы полезны для вычисления законов сохранения, см. например [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.N.Garifullin, I.T.Habibullin. *Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:20, 205201 (2021).
2. G. Tzitzeica. *Sur une nouvelle classe de surfaces* // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25**:1, 180–187 (1907).
3. А. В. Жибер, А. Б. Шабат. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой,* // Докл. АН СССР, **247**:5, 1103–1107 (1979).
4. А.П. Веселов, А.Б. Шабат. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера* // Функц. ан. прил. **27**:2, 1–21 (1993).
5. R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**(45), R541 (2006).
6. Р.И. Ямилов. *О классификации дискретных эволюционных уравнений* // Усп. матем. наук. **38**:6, 155–156 (1983).
7. Р.И. Ямилов. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // Теор. и матем. физ. **85**:3, 368–375 (1990).
8. А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой* // Уфимск. матем. журн. **4**:3, 104–154 (2012).
9. D.J. Kaup. *On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class* $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ // Stud. Appl. Math. **62**:3, 189–216 (1980).
10. A.P. Fordy, J. Gibbons. *Factorization of operators I. Miura transformations* // J. Math. Phys. **21**(10), 2508–2510 (1980).
11. R.N.Garifullin, R.I.Yamilov. *On integrability of a discrete analogue of Kaup–Kupershmidt equation* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 158–164 (2017).

Рустем Наилевич Гарифуллин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `rustem@matem.anrb.ru`