ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 11-17.

УДК 517.587, 517.929

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА И ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

Б.С. БЫЧКОВ, Г.Б. ШАБАТ

Аннотация. Мы указываем направления возможных обобщений найденных ранее связей между многочленами Чебышева и числами Каталана, возникающими при изучении коммутирующих разностных операторов. Эти обобщения в основном связаны с идеями, высказанными Н.-Х. Абелем в публикации 1826 года, которые излагались на современном языке многими авторами. В качестве обобщений многочленов Чебышева предлагается рассмотреть многочлены ровно с двумя критическими значениями, подробно изученными в так называемой теории детских рисунков. Числа Каталана занимают начальный столбец в таблице чисел Харера–Цагира, связанных с распределением по родам ориентируемых склеек многоугольников с четным числом сторон. Коммутирующие разностные операторы неявно содержатся в теории Абеля, изучавшего квазиэллиптические интегралы (эллиптические интегралы 3-го рода, берущиеся в логарифмах); в настоящей работе формулируются предположения о связи основной теоремы Абеля с коммутирующими полубесконечными матрицами. Работа содержит вычисления, подтверждающие намеченные гипотетические связи.

Ключевые слова: многочлены Чебышева, числа Каталана, числа Харера-Цагира, полиномиальные уравнения Пелля, детские рисунки.

Mathematics Subject Classification: 39A70, 33C75

1. Введение

А.Б. Шабат, считая себя прежде всего специалистом по теории дифференциальных уравнений, обладал широким математическим кругозором. Он умел видеть неожиданные связи между отстоящими далеко друг от друга разделами математики, но предпочитал фиксировать свои идеи не построением общих теорий, а рассмотрением конкретных примеров.

Его последней прижизненной публикацией была совместная с одним из соавторов настоящей заметки работа [7], в которой устанавливались связи между коммутирующими полубесконечными матрицами, многочленами Чебышева и числами Каталана. Мы не сомневаемся в том, что эти связи допускают разнообразные обобщения, и уверены, что, если бы А.Б. Шабат жил дольше, он нашел бы эти обобщения.

В настоящей работе мы намечаем одно из направлений таких обобщений.

2. Многочлены Чебышева и числа Каталана

Напомним кратко упомянутую связь из работы [7].

B.S. Bychkov, G.B. Shabat, On generalizations of Chebyshev polynomials and Catalan numbers.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Исследование Г.Б. Шабата выполнено при поддержке фонда Саймонса.

Поступила 21 апреля 2021 г.

Многочлены Чебышева[1] определяются многими способами, из которых мы приведем два: замкнутую формулу

$$\mathrm{T}_n(u) = \cos(n \arccos u) \tag{2.1}$$

и рекурренцию

$$\mathrm{T}_{n+1}(u) = 2u\mathrm{T}_n(u) - \mathrm{T}_{n-1}(u) \tag{2.2}$$

с начальными условиями $\mathrm{T}_0(u) = 1$ и $\mathrm{T}_1(u) = u$. См., например, [8].

Числа Каталана также определяются многими способами, см., например, [11].

Мы опускаем несколько комбинаторных интерпретаций чисел Каталана (к сожалению, комбинаторика вообще отсутствует в настоящей заметке) и определяем числа Каталана $c_0, c_1, \ldots$ с помощью производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u}. \tag{2.3}$$

Краткая формулировка одного из основных результатов работы [7] заключается в том, что *отношения соседних многочленов Чебышева близки к обрубленной производящей функции для чисел Каталана.* Например,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{T}_8\left(\frac{1}{2M}\right)}{\mathrm{T}_7\left(\frac{1}{2M}\right)} =& \frac{1}{M} - M - M^3 - 2M^5 - 5M^7 - 14M^9 - 42M^{11} - \ldots \\ =& \frac{1}{M} - c_0M - c_1M^3 - c_2M^5 - c_3M^7 - c_4M^9 - 4c_5M^{11} - \ldots\end{aligned} \tag{2.4}$$

Прямых обобщений этих равенств мы на сегодняшний день не знаем, однако полагаем, что они возможны. Однако объекты, фигурирующие и в левой, и в правой части равенств (2.4), естественные обобщения допускают, и мы расскажем о них в последующих разделах. Затем мы упомянем теорию, в рамках которой надеемся найти более концептуальные объяснения происходящего.

А.Б. Шабат, видимо, чувствовал общематематическую перспективу, объясняющую природу обсуждаемых связей. Наша задача – рано или поздно ее восстановить.

3. Обобщенные многочлены Чебышева

Одно из свойств обычных многочленов Чебышева T_n — иметь *всего два конечных критических значения*; это свойство очевидно, если воспользоваться определением (2.1). Оно положено в основу одного из обобщений, которые мы имеем в виду.

Произвольный многочлен $P \in \mathbb{C}[u]$ степени не меньше двух называется *обобщенным многочленом Чебышева*[2], если существуют такие числа $a, b \in \mathbb{C}$, что

$$[P'(u) = 0] \Longrightarrow [P(u) \in \{a, b\}].$$

Нетрудно доказать, что в этом случае прообраз $P^{-1\circ}[a, b]$ отрезка, соединяющего критические значения – дерево на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Более того, указанная процедура сопоставления обобщенному многочлену Чебышева плоского дерева устанавливает *взаимно однозначное соответствие между классами подобия обобщенных многочленов Чебышева* (то есть орбитами действия квадрата группы $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ на многочленах линейными заменами и в аргументе, и в образе) *и изотопическими классами плоских деревьев*; см. [6].

Это соответствие дает неограниченный запас обобщенных многочленов Чебышева (хотя нахождение конкретного многочлена по соответствующему ему плоскому дереву — нетривиальная вычислительная задача). Обычные многочлены Чебышева соответствуют *цепочкам*.

---

[1] *первого рода*, упоминание о чем мы опускаем.

[2] или *многочленом Шабата*, причем имеется в виду не А.Б. Шабат, а один из авторов настоящей заметки.

Нам понадобится лишь одно свойство обобщенных многочленов Чебышева.

Пусть P — обобщенный многочлен Чебышева со старшим коэффициентом 1 и с критическими значениями $\{a, b\} = \{\pm 1\}$ (в каждом классе подобия можно выбрать такого представителя). Вершины дерева, соответствующие многочлену P, являются прообразами критических значений ± 1 и распадаются в несвязное объединение

$$V_P = V_P^+ \coprod V_P^-, \tag{3.1}$$

где

$$V_P^{\pm} = \{u \in \mathbb{C} \mid P(u) = \pm 1\}. \tag{3.2}$$

Тогда имеют место разложения на множители

$$P \pm 1 = \prod_{\alpha \in V_P^{\pm}} (u - \alpha)^{v_\alpha}, \tag{3.3}$$

где v_α — *валентность* вершины α дерева, соответствующего многочлену P.

Обозначим еще

$$P_{\mathrm{odd}} := \prod_{\alpha \in V_P : v_\alpha \in 2\mathbb{N}+1} (u - \alpha)$$

многочлен, простыми корнями которого являются вершины нечетной валентности дерева, соответствующего многочлену P.

Отметим, что $\deg P_{\mathrm{odd}} \geq 2$: у любого дерева есть по крайней мере две вершины нечетной валентности, причем их ровно две тогда и только тогда, когда дерево – цепочка (и соответствующий многочлен является обычным многочленом Чебышева).

Теорема 3.1. *Пусть P – обобщенный многочлен Чебышева. Тогда найдутся такие многочлены $X, Y \in \mathbb{C}[u]$, что*

$$X^2 - P_{odd} Y^2 = 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Перемножив приведенные выше равенства (3.3), получим

$$P^2 - 1 = \prod_{\alpha \in V_P} (u - \alpha)^{v_\alpha}. \tag{3.5}$$

Для получения (3.4) остается положить $X := P$ и выделить полный квадрат в правой части. □

Утверждение доказанной теоремы фактически означает, что любой обобщенный многочлен Чебышева дает коэффициент *полиномиального уравнения Пелля*, имеющего нетривиальные решения.

4. Квазиэллиптические интегралы

В работе Н.-Х. Абеля [1] рассматривался вопрос о том, какие интегралы вида

$$\int \frac{\rho \, \mathrm{d}u}{\sqrt{R}},$$

где ρ и R – многочлены над $\mathbb{C}$, берутся в элементарных функциях. Точнее, выяснялось, для каких многочленов R четной степени (по очевидным причинам можно ограничиться многочленами без кратных корней) существует многочлен ρ с указанным свойством.

Будем называть многочлены R, удовлетворяющие обсуждаемому условию, *абелевыми*.

В работе [1] приведены следующие свойства многочлена R, равносильные абелевости.

(1) *Существуют многочлены X и Y положительных степеней, удовлетворяющие полиномиальному уравнению Пелля*

$$X^2 - RY^2 = 1.$$

(2) Коэффициенты $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}[u]$ разложения в цепную дробь

$$\sqrt{R} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

периодичны.

На современном математическом языке условие (1) можно переформулировать следующим равносильным образом.

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую, гладкая аффинная модель $\ddot{\mathbf{X}}_R$ которой задается уравнением:

$$v^2 = R(u).$$

Эта модель имеет вид

$$\ddot{\mathbf{X}}_R = \mathbf{X}_R \setminus \{\underline{\infty}_\pm\},$$

где $\mathbf{X}_R$ – гладкая проективная модель (если $R = u^{2g+2} + \dots$, то в проколотых окрестностях точек $\underline{\infty}_\pm$ имеет место асимптотическое равенство $v \approx \pm u^{g+1}$). Равносильное (1) условие заключается в том, что

(1)'. $\underline{\infty}_+ - \underline{\infty}_- \in \operatorname{tors}(\operatorname{Pic}\mathbf{X})$, *разность бесконечных точек имеет конечный порядок.*

Обычные многочлены Чебышева соответствуют «вырожденному» случаю кривой $\mathbf{X}$ рода 0, абелеву многочлену $R = u^2 - 1$, стандартным интегралам $\int \frac{\rho \, \mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}$, решениям (при любом натуральном n) полиномиального уравнения Пелля вида $X = \mathrm{T}_n$, $Y = \mathrm{U}_{n-1}$ (многочлены Чебышева *второго рода*) и разложению в цепную дробь

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2-1} =& u + \left(\sqrt{u^2-1} - u\right) = u + \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \\ =& u + \frac{1}{2u + \left(\sqrt{u^2-1} - u\right)} = u + \cfrac{1}{2u + \frac{1}{2u + \frac{1}{2u + \dots}}}.\end{aligned}$$

Приведем нетривиальный пример кривой рода 1. Она задается уравнением

$$v^2 = u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1 =: R,$$

а парой решений уравнения Абеля-Пелля $X^2 - Ry^2 = 1$ являются многочлены

$$X = u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1, \qquad Y = u.$$

Разложение в периодическую цепную дробь имеет вид

$$\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1} = u^2 + \frac{u}{2} + \cfrac{2}{2u + \frac{1}{u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2u + \frac{1}{u^2 + \frac{u}{2} + \dots}}}},$$

а квазиэллиптический интеграл –

$$\int \frac{(6u+2)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}} = \log \frac{u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1 + u\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}}{u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 1 - u\sqrt{u^4 + u^3 + \frac{1}{4}u^2 + 2u + 1}}.$$

В 19-м веке такие интегралы высоко ценились и нахождение какого-нибудь одного было достаточной причиной публикации. Из результатов предыдущего раздела следует, что любое плоское дерево позволяет построить квазиэллиптический интеграл.

Мы полагаем, что обобщенные многочлены Чебышева — естественный кандидат для обобщений результатов работы [7]. Связанные с ними цепные дроби интерпретируются в рамках разностных операторов 2-го порядка (см., например, [10]), также фигурирующих в [7].

5. Числа Харера-Цагира

Эти числа $\varepsilon_g(n)$ были введены в работе [2]; каждое такое число определяется как *количество склеек* $(2n)$*-угольника в ориентируемую поверхность рода* g. Они удовлетворяют различным рекурренциям, объясняемым производящей функцией

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y =: 1 + 2xy + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{g=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\frac{\varepsilon_g(n)}{(2n-1)!!}x^{n+1}y^{n+1-2g}$$

(отметим, что коэффициент $\frac{\varepsilon_g(n)}{(2n-1)!!}$ можно интерпретировать как *вероятность того, что случайная ориентированная склейка* $(2n)$*-угольника будет иметь род* g) — см., например, [5].

Числа Каталана образуют нулевой столбец таблицы Харера-Цагира,

$$c_n \equiv \varepsilon_0(n).$$

Другие столбы таблицы ведут себя похожим образом. Например, столбец рода 1 удовлетворяет рекурсии

$$\varepsilon_{1,n+1} = \frac{4n+2}{n-1}\varepsilon_{1,n},$$

близкой к рекурсии

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n$$

для чисел Каталана. Производящая функция

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{1,n}u^n = \frac{1}{(1-4x)^{\frac{5}{2}}}$$

также близка к определению (2.3).

Отмеченные параллели указывают на то, то числа Харера-Цагира – естественные кандидаты для обобщений результатов из [7]. Разумеется, хотелось бы найти эти обобщения не только на формульном уровне, но и на концептуальном – на такую возможность указывает роль этих чисел в [2].

6. О коммутирующих разностных операторах

Другим основным результатом работы [7] является естественная связь многочленов Чебышева и элементов некоторых коммутирующих разностных операторов. А именно, рассмотрим задачу коммутирования трехдиагональной матрицы A с вандермондовой матрицей Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & b_{n-1} & a_n & b_n & 0\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \lambda^n & \lambda^{2n} & \dots & \lambda^{n^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ свободный параметр и полубесконечная матрица Λ считается данной. Элементы искомой трехдиагональной матрицы A предполагаются рациональными функциями λ, удовлетворяющими условию «вещественности».

Оказывается, при подходящих начальных условиях $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ матрицы A и Λ коммутируют, тогда и только тогда, когда элементы матрицы A являются рациональными функциями от λ с полюсами в точках 0 и -1, и функции $\varphi_n(\lambda) = 1 - a_{n+1}(\lambda)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (ср. (2.2))

$$\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} = \mu\varphi_n + 2, \quad \varphi_n = \frac{1}{\lambda^{n-1}}\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)^2 = 1 - a_{n+1}, \quad n \geq 0, \qquad (6.2)$$

где $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda}$.

Классическая работа ван Мербеке-Мамфорда [4], содержащая ссылку на заметку В.Е. Захарова и А.Б. Шабата [9], связывает много идей и конструкций из разных областей математики. Помимо прочего, она указывает на тесную параллель между коммутативными кольцами разностных и дифференциальных операторов; в обоих случаях еще в 70-х годах прошлого века была прояснена связь между алгеброй (структурой этих колец), геометрией (динамикой прямолинейного движения по якобианам спектров этих колец) и дифференциальными уравнениями (явными решениями этих уравнений в тета-функциях). Сам предмет этой работы говорит о пересечении с [7] – например, всюду фигурируют трехдиагональные (полу)бесконечные матрицы, среди которых выделяются коммутирующие.

Геометрическая теория коммутирующих разностных операторов интенсивно развивалась в последующие десятилетия в нескольких интересных направлениях – см., например, [3].

Отметим, однако, что теория Абеля, опубликованная в 1826 году, в этих работах не всегда цитируется и, возможно, некоторые связи еще только предстоит осознать.

7. Заключение

Мы очень кратко наметили некоторые направления развития идей А.Б. Шабата, выработанные им в последние годы его жизни и работы (для него эти понятия совпадали). Как близкие ему люди, мы видим свою задачу в том, чтобы эти идеи не были забыты, а, наоборот, прояснялись, уточнялись и углублялись; надеемся внести посильный вклад.

Мы будем счастливы, если настоящая заметка вызовет у кого-нибудь из наших коллег — друзей и учеников А.Б. Шабата или новых людей — желание участвовать в этой работе.

Благодарности

Авторы благодарны С.В. Смирнову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N.H. Abel. *Sur l'integration de la formule differentielle* $\frac{\rho\,\mathrm{d}z}{\sqrt{R}}$, *R et ρ etant des fonctions entieres* // J. Reine Angew. Math. **1**, 185–221 (1826).
2. J. Harer, D. Zagier. *The Euler characteristic of the moduli space of curves* // Invent. Math. **85**, 457–485 (1986).
3. A. Izosimov. *Pentagrams, inscribed polygons, and Prym varieties* // El. Res. An. in Math. Sc. **23**, 25–40 (2016).
4. P. Van Moerbeke, D. Mumford. *The spectrum of difference operators and algebraic curves* // Acta Math. **143**, 93–154 (1979).
5. B.G. Pittel. *Another Proof of the Harer-Zagier Formula* // Electron. J. Comb. **23**:1 (2016).
6. G. Shabat, A. Zvonkin. *Plane trees and algebraic numbers* // Contemporary Math. **178**, 233–275 (1994).
7. А.Е. Артисевич, Б.С. Бычков, А.Б. Шабат. *Многочлены Чебышева, числа Каталана и трехдиагональные матрицы* // ТМФ. **204**:1, 3–9 (2020).
8. Н. Васильев, А. Зелевинский. *Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения* // Квант. 1, 12–19 (1982).
9. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния* // Функц. анализ. **8**:3, 54–56 (1974).
10. А.Я. Хинчин. *Цепные дроби.* М.: Физматлит. 1960.
11. Г.Б. Шабат. *Несколько взглядов на числа Каталана.* В сб. Элементы математики в задачах под ред. А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б. Скопенкова. М.: МЦНМО. 2018.

Борис Сергеевич Бычков,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
ул. Усачева, 6,
119048, г. Москва, Россия
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14,
150003, г. Ярославль, Россия
E-mail: `bbychkov@hse.ru`

Георгий Борисович Шабат,
Российский государственный гуманитарный университет,
Миусская площадь, 6,
125993, г. Москва, Россия
E-mail: `george.shabat@gmail.com`